



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

**ENSEÑANZA DE FUNCIONES Y  
GRÁFICAS DE 1º DE BACHILLERATO  
BASADA EN LA UTILIZACIÓN DE LA  
PIZARRA DIGITAL INTERACTIVA  
COMO RECURSO DIDÁCTICO**

**Presentado por:** Julen Fernández de Arróyabe Guerras  
**Línea de investigación:** Métodos pedagógicos (matemáticas)/  
Recursos educativos (TIC)  
**Director/a:** Don Pedro Viñuela

**Ciudad:** Vitoria-Gasteiz

**Fecha:** 5 de junio de 2014

---

## RESUMEN

El presente trabajo trata sobre el estudio del uso de la PDI como herramienta efectiva en la enseñanza del tema de funciones y sus representaciones gráficas a través de programas informáticos en primero de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. En el marco teórico se estudia la efectividad de la PDI, se estudian y repasan trabajos anteriores que recojan problemas en el dibujo de gráficas y los errores y dificultades más comunes que cometen los alumnos en los apuntes en sus cuadernos y en los exámenes realizados. En el estudio de campo se discute la inclusión de software matemático que ayude a superar, a través de la PDI, las limitaciones actuales en la metodología relacionada con las gráficas de las funciones. Para esto se realizan y analizan encuestas a profesores y alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en diferentes centros educativos. Se presenta y fundamenta una propuesta didáctica consistente en una metodología para impartir el tema de funciones de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología utilizando programas matemáticos a través de la PDI. La conclusión principal a la que llega el trabajo es que tanto alumnos como profesores tienen una visión y una experiencia positiva de la PDI, pero que existe una clara falta de formación del profesorado. La línea de investigación futura más significativa es la adaptación de diferente software de manera simple a otras unidades didácticas para que los alumnos se acostumbren a manejar programas y se acerquen a las matemáticas desde otro ángulo. Asimismo, se plantea estudiar la implantación de programas de formación de profesorado en la PDI entre otras.

*Palabras clave:* Funciones, PDI, Errores comunes, Bachillerato, Software matemático.

## ABSTRACT

The current work deals with the use of the Interactive whiteboard as an effective educative tool for the functions and their graphical representation through software that the students of first of Baccalaureate in Sciences and Technology perform. In the theoretical framework the effectiveness of the Interactive whiteboard is checked, previous studies are reviewed and the most common errors and difficulties written down in their notes of the notebooks and in their exams are analyzed. In the field study the inclusion of mathematical software to help overcoming the present methodological limitations related to the graphical representations as an innovative solution is discussed. For that a survey to professors and students in first of Baccalaureate in Sciences and Technology of different educational centers is proposed. A Didactic proposal is presented and grounded to teach the topic of functions in 1<sup>st</sup> of Baccalaureate in Sciences and Technology. The main conclusion is the necessity of training courses for teachers and the positive view of the Interactive whiteboard from students and teachers. The most meaningful future research is the adaptation of the different software to other topics to make students get accustomed to using programs and to bring them closer to mathematics from another angle and the study of the inclusion of training programs in the Interactive whiteboard, among others.

*Key words:* Graphical representation of functions, IWB, Common errors, Baccalaureate, mathematical software.

---

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b>  |           |
| <b>1.1 Presentación</b> .....   | <b>6</b>  |
| <b>1.2 Justificación</b> .....  | <b>8</b>  |
| <b>2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>  |           |
| <b>2.1 Definición del problema</b> .....  | <b>9</b>  |
| <b>2.2 Objetivos</b> .....  | <b>10</b> |
| <b>2.3 Metodología</b> .....  | <b>11</b> |
| 2.3.1. Investigación bibliográfica .....  | 11        |
| 2.3.2. Trabajo de campo.....  | 11        |
| 2.3.3. Propuesta metodológica.....  | 12        |
| <b>2.4 Justificación de la bibliografía utilizada</b> .....                     | <b>13</b> |
| <b>3. MARCO TEÓRICO</b>   |           |
| <b>3.1 Informes</b> .....   | <b>15</b> |
| 3.1.1 Informe PISA 2012 .....   | 15        |
| 3.1.2 Informe PIAAC 2013.....   | 16        |
| 3.1.3 Education at a glance.....  | 16        |
| 3.1.4 Eskola 2.0 .....  | 17        |
| <b>3.2 Marco Legal</b> .....  | <b>18</b> |
| 3.2.1 La LOE .....  | 18        |
| 3.2.2 La LOMCE .....  | 18        |
| 3.2.3 El Real Decreto 1467/2007.....  | 19        |
| 3.2.4 El Decreto 23/2009 .....  | 19        |
| <b>3.3 Las Competencias</b> .....   | <b>20</b> |
| <b>3.4 Las Funciones</b> .....  | <b>21</b> |
| 3.4.1 Errores en las gráficas de las funciones.....                             | 22        |
| <b>3.5 La PDI</b> .....   | <b>22</b> |
| 3.5.1 PDI Utilidad para los alumnos .....                                       | 23        |
| 3.5.2 Programas matemáticos para representar funciones a través de la PDI ..... | 24        |
| <b>4. ESTUDIO DE CAMPO</b>  |           |
| <b>4.1 Introducción</b> .....   | <b>26</b> |
| <b>4.2 Marco contextual</b> .....   | <b>26</b> |
| 4.2.1 Santa María Marianistas.....  | 26        |
| 4.2.2 Miguel de Unamuno .....   | 27        |
| <b>4.3 Metodología</b> .....  | <b>28</b> |
| 4.3.1 Determinación de la población.....  | 28        |
| 4.3.2 Selección y tamaño de la muestra.....                                     | 28        |
| 4.3.3 Diseño del material para realizar la encuesta.....                        | 28        |
| <b>4.4 Resultados</b> .....   | <b>33</b> |
| 4.4.1 Alumnos.....  | 33        |
| 4.4.2 Profesores .....  | 36        |
| <b>4.5 Interpretación global de los resultados</b> .....                        | <b>39</b> |
| 4.5.1 Alumnos.....  | 39        |
| 4.5.2 Profesores .....  | 40        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. PROPUESTA DIDÁCTICA</b>                                     |           |
| <b>5.1 Introducción</b> .....                                     | <b>41</b> |
| <b>5.2 Objetivos</b> .....  | <b>42</b> |
| 5.2.1 Objetivos curriculares.....                                 | 42        |
| 5.2.2 Objetivos didácticos.....                                   | 42        |
| 5.2.3 Competencias que adquieren los alumnos .....                | 43        |
| <b>5.3 Desarrollo de la propuesta</b> .....                       | <b>43</b> |
| 5.3.1 Distribución de la propuesta didáctica.....                 | 43        |
| 5.3.2 Desarrollo de las Funciones.....                            | 46        |
| 5.3.3 Desarrollo de las Derivadas .....                           | 48        |
| 5.3.4 Ejemplo de la sesión de trabajo en equipo en funciones..... | 50        |
| <b>6. APORTACIONES DEL TRABAJO</b> .....                          | <b>52</b> |
| <b>7. DISCUSIÓN</b> .....   | <b>53</b> |
| <b>8. CONCLUSIONES</b> .....                                      | <b>54</b> |
| <b>9. LIMITACIONES DEL TRABAJO</b> .....                          | <b>56</b> |
| <b>10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA</b> .....                   | <b>57</b> |
| <b>11. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b>                             |           |
| <b>11.1 Referencias</b> .....                                     | <b>58</b> |
| <b>11.2 Bibliografía complementaria</b> .....                     | <b>61</b> |
| <b>12. ANEXOS</b> .....   | <b>62</b> |

---

## ÍNDICE DE TABLAS

|  |    |
|--|----|
| Tabla N° 1. Contenidos matemáticas I, 1° de Bachillerato, Análisis .....             | 19 |
| Tabla N° 2. Competencias básicas y su contribución matemática en Bachillerato....    | 19 |
| Tabla N° 3. Reparto de cuestionarios .....   | 28 |
| Tabla N° 4. Resumen del cuestionario a alumnos con opciones y justificación .....    | 30 |
| Tabla N° 5. Resumen del cuestionario a profesores con opciones y justificación ..... | 31 |
| Tabla N° 6. Resumen distribución de las sesiones de la propuesta didáctica.....      | 42 |
| Tabla N° 7. Objetivos curriculares de la propuesta didáctica .....                   | 42 |
| Tabla N° 8. Objetivos didácticos de la propuesta didáctica .....                     | 43 |
| Tabla N° 9. Desarrollo de la parte de funciones.....                                 | 44 |
| Tabla N° 10. Desarrollo de la parte de la derivada.....                              | 46 |
| Tabla N° 11. Competencias desarrolladas con la propuesta didáctica .....             | 48 |
| Tabla N° 12. Evaluación del trabajo grupal de funciones.....                         | 51 |

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

|  |    |
|--|----|
| Gráfico N° 1. Resultado de la competencia de matemáticas según los estudios PISA.6                                   |    |
| Gráfico N° 2. Extracto de las puntuaciones medias en competencia matemática por países .....                         | 7  |
| Gráfico N° 3. Distribución de alumnos en niveles de rendimiento por sub-áreas.....                                   | 15 |
| Gráfico N° 4. Porcentaje de asignaturas donde se utiliza la PDI .....  | 33 |
| Gráfico N° 5. Porcentaje de conformidad, alumnos sin exp. ....   | 34 |
| Gráfico N° 6. Porcentaje de conformidad, alumnos con exp. ....   | 34 |
| Gráfico N° 7. Porcentaje de dificultades con funciones .....   | 35 |
| Gráfico N° 8. Conformidad profesores con atributos de la PDI.....  | 37 |
| Gráfico N° 9. Satisfacción de uso de la PDI .....  | 37 |
| Gráfico N° 10. Errores en funciones en 1° de Bachillerato. ....  | 38 |
| Gráfico N° 11. Dibujo de $f(x)$ .....  | 47 |
| Gráfico N° 12. Dominio de $f(x)$ .....   | 47 |
| Gráfico N° 13. Rango o recorrido de $f(x)$ .....   | 47 |
| Gráfico N° 14. Ejemplo en GeoGebra para el estudio del crecimiento, decrecimiento, cortes con ejes y tendencia ..... | 47 |

---

|  |    |
|--|----|
| Gráfico N° 15. Ejemplo en GeoGebra para explicar límites en un punto y discontinuidades .....  | 48 |
| Gráfico N° 16. Ejemplo en GeoGebra de función $f(x)$ con su función derivada $g(x)=f'(x)$ y rectas pendiente en dos puntos A y B ..... | 49 |
| Gráfico N° 17. Ejemplo en GeoGebra de extremos relativos y lo que sucede en el punto, a su derecha y a su izquierda.....               | 49 |
| Gráfico N° 18. Funciones con GeoGebra del problema.....  | 50 |

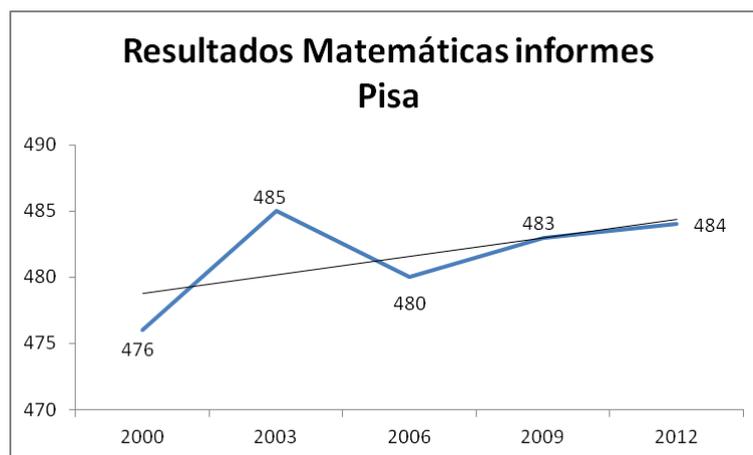
## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

|   |    |
|---|----|
| Ilustración N° 1. Cono del aprendizaje según Edgar Dale.....        | 23 |
| Ilustración N° 2. Diagrama de una Pizarra Digital Interactiva ..... | 62 |

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. PRESENTACIÓN

Las matemáticas en España, desde el estudio del Informe PISA de 2003 hasta el de 2012, han tenido una evolución muy estable: 485 puntos (2003), 480 puntos (2006), 483 puntos (2009), 484 puntos (2012). Esta evolución no es significativamente positiva por falta de datos suficientes para establecer una línea de tendencia efectiva. Se estanca en un intervalo de entre los 480 y los 485 puntos.



*Gráfico N° 1.* Resultado de la competencia de matemáticas según los estudios PISA.  
Fuente: Elaboración propia a partir de INEE (2000, 2003, 2006, 2009, 2012).

Según los resultados más recientes España ocupa el lugar 25 de los 34 países de la OCDE participantes en matemáticas, el 23 en lectura y el 21 en ciencias, siendo la asignatura de matemáticas la que obtiene peores resultados. Los resultados en matemáticas en el año 2012 son de 484 puntos. Dentro de las sub-áreas evaluadas, los peores resultados se encuentran en la de Espacio y Forma donde se incluyen la geometría, las funciones y las gráficas.

Mientras que el Informe PISA aporta los datos, el Programa Internacional para la Evaluación de las Competencias de la Población Adulta llamado Informe PIAAC de 2013 nos transporta a los resultados de los alumnos de 1º de Bachillerato, con el inconveniente de ser un estudio con un intervalo de edad muy amplio (16 a 65 años, ambos inclusive) y una muestra no significativamente relevante (228 alumnos de 16 años, 12 por comunidades autónomas). En este estudio se muestra que en matemáticas, España obtiene 246 puntos; 23 por debajo del promedio de la OCDE y 22 por debajo del promedio de la UE. Aquí, nuestro país ocupa la última posición dentro de las naciones examinadas.

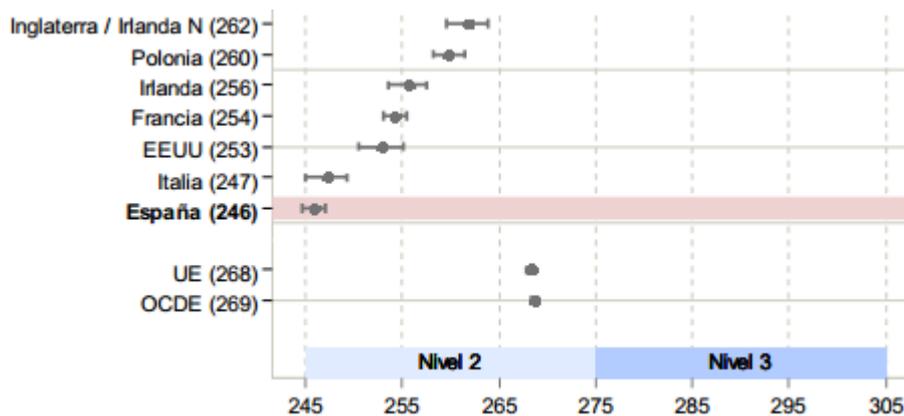


Gráfico N°2. Extracto de las puntuaciones medias en competencia matemática por países. Fuente: INEE (2013).

Se comprueba además que las desviaciones típicas respecto de la media son muy pequeñas con lo que el resultado está muy centralizado en los 246 puntos.

Por otro lado, el número total de horas de clase obligatorias para los alumnos en casi todas las edades de Educación Primaria y Secundaria en España, es superior al promedio de la OCDE. Esto, como muestra Education at a Glance 2013, sugiere que la mejora radica en la calidad de la enseñanza y no en el número de horas.

Para mejorar la calidad de la enseñanza la LOMCE en el artículo 122 bis (*Acciones destinadas a fomentar la calidad de los centros docentes*) introduce la Pizarra Digital Interactiva en las aulas como un intento de mejora en la calidad educativa.

La Pizarra Digital Interactiva ofrece un soporte similar al de un ordenador. Toda aplicación ejecutable en el sistema operativo de Windows se puede controlar desde la pizarra. Es por esto que la mayoría de programas matemáticos para visualizar funciones se pueden manejar a través de este recurso didáctico, acercándolos a los alumnos.

Duval (1993) razona que los sistemas de representación son el motor para el aprendizaje y el dominio de un concepto: el conocimiento de varios sistemas de representación y la capacidad para pasar de unos a otros enriquece la imagen o esquema conceptual de un concepto. Las funciones son una rama visual del comportamiento de ciertos sucesos de la vida real susceptibles de ser comprendidos por los alumnos. Aunque muchos países incluyen la enseñanza de habilidades para mostrar datos o tendencias (tablas, expresiones simbólicas, funciones, etc.) como parte importante de su currículum, la representación gráfica no ha sido desarrollada de manera relevante (Monteiro y Ainley, 2003). Varios estudios han destacado la

---

importancia del rol del profesor en el desarrollo del entendimiento de los alumnos en la representación de funciones (Diezmann y Lowrie, 2010), pero todavía falta mucho en la superación de las dificultades a las que se enfrentan profesores y alumnos en el proceso enseñanza–aprendizaje. Según Tall (1992), los alumnos tienen dificultades fundamentales con términos como “límite” de una función o “tiende a” y “simetría respecto de” y los profesores no poseen una metodología clara para explicar estos conceptos.

## 1.2. JUSTIFICACIÓN

Según Ballester (2009) mediante la representación gráfica se pueden relacionar fácilmente conceptos y magnitudes de la vida cotidiana visualmente e interpretar esta relación de forma rápida y sencilla. Los gráficos son objetos susceptibles de ser transformados mediante traslaciones  $f(x)+c$  y  $f(x-c)$ , reflexiones  $-f(x)$ , y estiramientos  $k \cdot f(x)$ . El uso de software aclara los problemas de interpretación de estos significados que causan grandes dificultades a los alumnos Tall (1997).

A raíz del estudio de Duval (1993) expuesto anteriormente, Arce y Ortega (2013) elaboraron un estudio con 29 alumnos donde mostraban que, en ocasiones, las representaciones elaboradas por los alumnos contienen errores, desajustes, y pueden revelar características o componentes erróneos.

Por todo lo anterior, lo que se presenta a continuación es un estudio de, por un lado, las necesidades educativas de los alumnos cuando grafican funciones y por otro, de si la utilización de un software matemático que, a través de la PDI, grafique y permita al alumno modificar, manipular, crear y jugar con las funciones y ver las gráficas al mismo tiempo que aporta una mejora real al proceso de enseñanza–aprendizaje.

La tecnología ofrece recursos que pueden usarse en diversas formas de enseñanza y motivación para los alumnos de manera que puedan entender mejor. Las funciones con sus gráficas son el tema perfecto para una primera aproximación mediante software matemático (*GeoGebra*, *Wiris*, *Wolfram Mathematica*) y la interacción con éstos a través de la PDI.

---

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

Los alumnos, como se comprueba en el trabajo realizado por Arce y Ortega (2013), cometen errores sistemáticos a la hora de representar gráficas de funciones. A raíz de esto se pueden formular las siguientes preguntas: ¿Cómo enseñan los profesores las gráficas de las funciones? ¿Utilizan la PDI para ello? ¿Implican a los alumnos a la hora de graficar las funciones? ¿Qué errores comenten habitualmente los alumnos? Es de suma importancia dotar de una herramienta interactiva que incluya la participación de los alumnos en el aprendizaje de las funciones y su representación gráfica (Ausubel, 1983). La implicación de la interactividad en la Pizarra Digital Interactiva es algo que, como exponen Glover, Miller, Averis y Door (2007), muchos profesores de Reino Unido no terminan de entender. Los profesores saben utilizar la PDI pero no utilizan de manera efectiva la interactividad que proporciona.

El problema principal a estudiar es: ¿existe la posibilidad de la inclusión de software matemático como herramienta interactiva a través de la PDI para solucionar los errores relacionados con la representación gráfica de funciones en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

A lo largo de este trabajo se intentará dar respuesta a estas preguntas, poniendo especial énfasis en la interactividad de la Pizarra Educativa Interactiva. Se profundizará en las posibilidades de la misma y se analizará si los programas matemáticos son una ayuda real a la hora de enseñar y aprender el tema de funciones de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

---

## 2.2. OBJETIVOS

El objetivo principal del presente trabajo es:

Presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar el bloque de funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, basada en el software matemático a través de la Pizarra Digital Interactiva.

Los objetivos específicos que se buscan conseguir en el trabajo son los siguientes:

- a) Averiguar y exponer las principales características y ventajas de la utilización de la Pizarra Digital Interactiva como herramienta didáctica en el bloque de funciones de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.
- b) Recopilar experiencias de profesores que impartan la asignatura de matemáticas a los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología relativas al uso de la PDI en el tema de funciones.
- c) Indagar y explicar las principales dificultades que enfrentan los alumnos relativas a la hora de estudiar funciones en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.
- d) Estudiar y discutir la eficacia real de una metodología que incluya software matemático interactivo para ayudar, a través de la Pizarra Digital Interactiva, a superar las dificultades anteriormente mencionadas.

---

## **2.3. METODOLOGÍA**

Es el resultado de combinar una investigación bibliográfica y un estudio de campo.

### **2.3.1. Investigación bibliográfica**

En la investigación bibliográfica se buscan metodologías y experiencias asociadas a la Pizarra Digital Interactiva en diferentes enseñanzas matemáticas, se recopilan las dificultades más recurrentes de los alumnos a la hora de graficar funciones en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y se exponen las soluciones encontradas.

La investigación bibliográfica se ha realizado a través de Internet en plataformas como la biblioteca virtual de la UNIR y Dialnet, así como EducaLAB y la plataforma Procomún y visitando la biblioteca universitaria El Aulario en Vitoria-Gasteiz. Se han recogido los libros, revistas y trabajos que tuvieran por título las palabras clave “pizarra digital”, “funciones y gráficas”, “errores en funciones”, “Bachillerato” y “programa matemático”. La información ha sido recogida, leída y analizada para comprobar que era pertinente para el presente trabajo. De cada uno de los escritos se ha seleccionado únicamente la información relevante para el estudio, las gráficas e imágenes necesarias para entender los resultados y todo aquello que tuviera relación con este trabajo.

### **2.3.2. Trabajo de campo**

El trabajo de campo recoge un estudio cuantitativo a través de encuestas y cuadernos y cualitativo a través de entrevistas. El objetivo de las encuestas es obtener información que se pueda analizar, extraer modelos y hacer comparaciones.

El estudio de campo se realiza a dos colectivos:

1. Docentes de matemáticas de los colegios Santa María Marianistas y Miguel de Unamuno de Vitoria-Gasteiz que impartan clase a alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.
2. Alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología que hayan cursado la unidad didáctica de funciones y gráficas.

Al término de la encuesta se incluye la propuesta para utilizar software matemático que, a través de la PDI, se mostrará como herramienta educativa en el tema de funciones y gráficas de funciones para que den su opinión al respecto.

---

El número de docentes es de cuatro, para ofrecer más de un punto de vista y porque la falta de tiempo no permite realizar más encuestas. Se les entrega un cuestionario con 8 preguntas cerradas y dos preguntas abiertas y se les realiza una entrevista para que puedan entrar en más detalle. La entrevista es no estructurada para proporcionar un ambiente más distendido.

Se incluyen encuestas de 6 preguntas cerradas con una pregunta abierta a 26 alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología de diferentes clases para conocer su opinión sobre la forma en que se utiliza la PDI en la asignatura de matemáticas y su opinión sobre la propuesta estudiada. Se recogen 15 cuadernos para estudiar los errores más comunes. A la hora de estudiar estos errores se procede a utilizar la técnica de investigación denominada *el análisis de contenido* (Bardin, 1996; Krippendorff, 1990), técnica de interpretación de textos capaces de albergar un contenido que, leído e interpretado adecuadamente, nos permite conocer mejor diversos aspectos y fenómenos (Andréu, s.f.). La técnica es especialmente adecuada para analizar material poco estructurado (Krippendorff, 1990) como los cuadernos y su principal objetivo es pasar de la mera descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla el análisis.

Tanto para docentes como para alumnos la recogida de información será en el propio centro, con la autorización de la Dirección, en los descansos entre clases, en los patios y en las horas posteriores al horario escolar. Se cuantifican los resultados uno a uno y se muestran estos resultados en el apartado 4.5 *Interpretación global de los resultados*.

### **2.3.3. Propuesta metodológica asociada a la PDI**

La última parte es la realización de la propuesta didáctica a partir de la información recopilada tanto en la investigación bibliográfica como en el trabajo de campo. Se trata de una propuesta de utilización de la Pizarra Digital Interactiva para la enseñanza del tema de funciones en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

---

## 2.4. JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

La razón por la que es pertinente la bibliografía que se ha utilizado en la elaboración de este trabajo es porque aborda de manera directa o indirecta temas implicados con la razón fundamental de la existencia de este trabajo.

La Educación sufre cambios constantes, se promueven reformas, se introducen términos nuevos, se fijan objetivos y competencias, nuevas maneras de entender los procesos de enseñanza–aprendizaje y metodologías para llevarlos a cabo. Pero, ¿por qué?, ¿para qué? El informe llevado a cabo por la UNESCO, a través del trabajo de Aguerrondo (2009) nos introduce en la situación de crisis en la que nos encontramos hoy en día con las nuevas necesidades educativas en la sociedad del conocimiento.

Con el fin de conocer la situación actual de las matemáticas en nuestro país en comparación con los países de la OCDE, se han consultado informes y estudios internacionales como los informes PISA y la revista *Education at a glance* de donde se concluye que los alumnos españoles van a la cola del resto de países en matemáticas. Con el trabajo de Ceballos, Núñez y Rodríguez (2012) *¿Se Puede Mejorar la Enseñanza de Matemáticas en Cualquiera de sus Niveles?* se argumenta que la enseñanza matemática es susceptible de mejora y que es necesaria la misma. Además se ha estudiado la normativa correspondiente: la LOE, la LOMCE y el Real Decreto 1467/2007 por el que se establece la estructura del Bachillerato y se establecen sus enseñanzas mínimas.

En segundo lugar era importante establecer la pertinencia de la representación de las funciones como forma de entender mejor las matemáticas y sus relaciones con la vida cotidiana. Para ello ha sido fundamental consultar *Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas* de Ballester (2009), donde expone que las gráficas de las funciones ayudan a entender de forma rápida y sencilla diferentes relaciones entre magnitudes o fenómenos sociales. El estudio de Soto (2010) explica formas efectivas de explicar todos los conceptos de las matemáticas en el curso de 1º de Bachillerato con su relación en la vida real.

Para justificar la necesidad de una mejora en las funciones se revisó de nuevo el informe PISA 2012 donde se muestra que la sub-área de Espacio y Forma es la que mayor mejora necesita. Además se revisaron los errores que más cometen los alumnos en funciones de 1º de Bachillerato y sus necesidades en el trabajo de Arce y

---

Ortega (2013) *Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato*. Se analizó *Middle School Students' Interpretation of Graphing Tasks: Difficulties within a Graphical Language* de Lowre y Diezmann (2007) donde se concluyen dos aspectos importantes y uno muy importante para fundamentar este trabajo, ya que expone que un porcentaje alto de alumnos comete errores sistemáticos al interpretar las gráficas, sin importar la modalidad que sea y además parece que el conocimiento y las habilidades adquiridas son establecidos en contextos educativos aislados donde esos errores son perpetuados a través de enseñanzas que raramente atraen su atención.

Por otro lado se pone de manifiesto la utilidad de la PDI como un recurso válido para las aulas de matemáticas con los ejemplos y experiencias de utilización de esta TIC que se han llevado a cabo con el estudio de Noda Herrera (2009), así como en el trabajo *Decálogo de la PDI* de Díaz (2012) y en *Introducción a la PDI en 10 pasos* de Gómez (2012). En *The evolution of an effective pedagogy for teachers using the interactive whiteboard in mathematics and modern languages: an empirical analysis from the secondary sector* de Glover, Miller, Averis y Door (2007) se aporta un análisis empírico de una pedagogía interactiva efectiva para el uso de la pizarra en matemáticas y cómo los docentes todavía no saben cómo realizar un uso interactivo eficaz con este recurso.

Por último, los trabajos de Espina Brito (2006) y el trabajo de Cornacchione (2001) *Gráficos en el plano y el espacio*, muestran ejercicios realizables con los programas GeoGebra y Mathematica que, a través de la PDI, pueden mostrarse a los alumnos y con los que ellos puedan interactuar.

### 3. MARCO TEÓRICO

#### 3.1. INFORMES

##### 3.1.1. Informe PISA 2012

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico realiza un estudio llamado Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (Programme for International Student Assessment) donde se evalúa el rendimiento de los alumnos de 15 años en tres competencias diferentes: lectora, matemática y científica. En este estudio se evalúan los conocimientos y destrezas en cada una de estas competencias.

La principal novedad de esta edición de 2012 es que hace un especial énfasis en el apartado de felicidad, aduciendo que “la calidad académica es cuando menos compatible, e incluso paralela, a la felicidad de nuestros jóvenes” (Labrador, 2012, p. 6).

Los resultados españoles en competencia matemática (484 puntos) son similares a años anteriores, estando por debajo del promedio de OCDE (494 puntos). El resultado más elevado entre las Comunidades Autónomas (517, Navarra) se encuentra más cerca del resultado más elevado de los países participantes (554 puntos, Corea del Sur) que en el Informe PISA de 2009, pero esto no se debe a un aumento significativo en Navarra (de 513 a 517 puntos), sino a un decremento acusado del resultado máximo (de 600 a 554 puntos). En relación con los resultados de las sub-áreas se ve que en Espacio y Forma tenemos un gran margen de mejora:

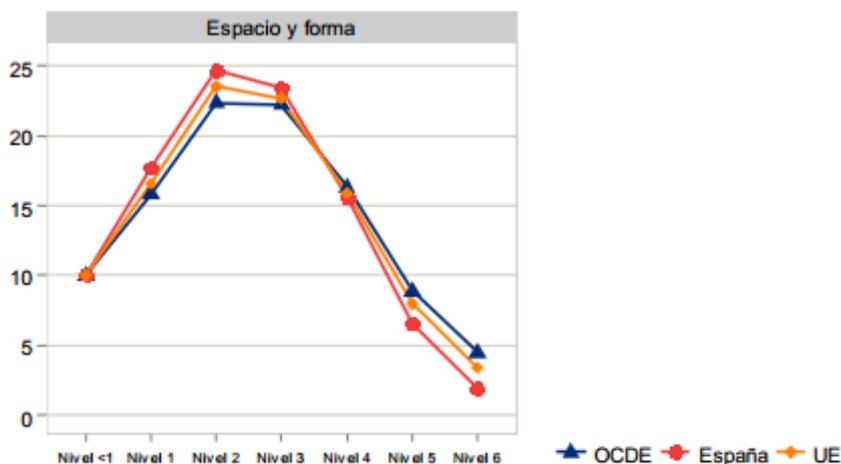


Gráfico N° 3. Distribución de alumnos en niveles de rendimiento por sub-áreas. Fuente: INEE (2013).

---

La proporción de alumnos con resultados excelentes en este sub-área es del 2%, frente al 4% de la OCDE. En general, la proporción de alumnos con resultados excelentes aumenta siendo del 8%, frente al 13% de la OCDE.

### **3.1.2. Informe PIAAC 2013**

En paralelo al Informe PISA se realiza una evaluación de la realidad educativa de los países esta vez para adultos de entre los 16 y los 65 años, ambos inclusive. Con este Informe PIAAC, cuya primera edición es la que nos ocupa, se pretende comprender mejor la efectividad de la educación y la formación en el desarrollo de las destrezas cognitivas y de las habilidades necesarias para el puesto de trabajo, especialmente en los estadios más cercanos a la finalización de la Educación Secundaria y, en el extremo opuesto, en el proceso de pérdida progresiva de habilidades a medida que la fuerza de trabajo se aproxima a la edad de jubilación.

La importancia en matemáticas de este estudio radica en que se tratan competencias tan relevantes como la habilidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información matemática e ideas con el fin de relacionar y gestionar los requerimientos matemáticos de gran diversidad de situaciones de la vida cotidiana, para comprobar su incidencia en la vida laboral y el deterioro de esta habilidad con el paso del tiempo.

España aparece en la cola de las puntuaciones medias en competencia matemática con 246 puntos, mientras que la media de la OCDE es de 269 puntos, con Japón a la cabeza con 288 puntos. Además, el porcentaje de personas en los niveles más altos es el más bajo de los países de la OCDE. Se demuestra que la competencia digital está estrechamente ligada a la competencia matemática; cuanto más alta es una más alta es la otra.

### **3.1.3. Education at a Glance**

Para poder analizar la evolución de los diferentes sistemas educativos, su financiación y el impacto de la formación en el mercado de trabajo y en la economía, la OCDE presenta todos los años una extensa recopilación de datos estadísticos e indicadores del sistema educativo de los 34 Estados miembros de esta Organización.

Este informe llamado *Education at a Glance* muestra la realidad educativa del sistema español en relación a otros sistemas. Uno de los indicadores más relevantes es el tiempo invertido en la enseñanza del primer ciclo de la Educación Secundaria. Se invierte más tiempo en matemáticas consiguiendo peores resultados,

---

por ejemplo, en Japón se invierte un 18% menos de tiempo y se sacan mejores resultados.

### **3.1.4. Informe ESKOLA 2.0**

Según el informe de Eskola 2.0 sobre los mapas competenciales para docentes y alumnos publicado en el BOPV, se llevan más de 25 años utilizando las tecnologías de información y comunicación. Son herramientas que permiten crear, expresar, pensar y modelar, no solamente información, sino también datos y conocimientos. La escuela es un lugar idóneo para la integración de estas tecnologías ya que debemos formar a alumnos que van a enfrentarse a desafíos tecnológicos en el futuro, con creatividad, responsabilidad y autonomía. Si concretamos, la PDI es una de las herramientas más implementada en colegios y centros educativos y por ello es la TIC a examinar. Dentro de los desafíos a los que se van a enfrentar los alumnos están la lectura comprensiva y el dibujo de las gráficas de funciones. Esto es algo que, tanto alumnos de la rama de Ciencias y Tecnología como los de Humanidades y Ciencias Sociales van a cursar, y ocupan, según datos del INE del curso 2011-2012 en la comunidad autónoma del País Vasco, el 96,8% de las matriculaciones totales en 1º de Bachillerato (7250 alumnos y alumnas y 6182, respectivamente de un total de 13.879). Esta cifra coloca al estudio en una tesitura generalizada. Si nos centramos en los resultados del Informe PISA de 2012 en la comunidad autónoma del País Vasco, encontramos que los alumnos presentan 505 puntos superando las medias anteriores. Los peores resultados (7 puntos por debajo) también se dan precisamente en el área de contenidos estudiada *espacio y forma*, donde entran en juego la trigonometría, las funciones y sus gráficas.

---

## **3.2. MARCO LEGAL**

### **3.2.1. La LOE**

La Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo, de Educación, surge ante los resultados negativos de diversos estudios internacionales y se conforma como una necesidad de reformar el sistema educativo existente.

Esta ley establece como objetivo adecuar la regulación legal de la educación no universitaria a la realidad actual en España (educación infantil, primaria, secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional, de idiomas, artísticas, deportivas, de adultos) bajo los principios de calidad de la educación para todo el alumnado, la equidad que garantice la igualdad de oportunidades, la transmisión y efectividad de valores que favorezcan la libertad, responsabilidad, tolerancia, igualdad, respeto, justicia, etc.

### **3.2.2. La LOMCE**

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa surge, como indica en su preámbulo, para:

[...] reducir la tasa de abandono temprano de la educación, mejorar los resultados educativos de acuerdo con criterios internacionales, tanto en la tasa comparativa de alumnos y alumnas excelentes, como en la de titulados en Educación Secundaria Obligatoria, mejorar la empleabilidad, y estimular el espíritu emprendedor de los estudiantes. Los principios sobre los cuales pivota la reforma son, fundamentalmente, el aumento de la autonomía de los centros, el refuerzo de la capacidad de gestión de la dirección de los centros, las evaluaciones externas de fin de etapa, la racionalización de la oferta educativa y la flexibilización de las trayectorias.[...] Junto a estos principios es necesario destacar tres ámbitos sobre los que la LOMCE hace especial incidencia con vistas a la transformación del sistema educativo: las Tecnologías de la Información y la Comunicación, el fomento del plurilingüismo, y la modernización de la Formación Profesional (BOE núm. 295, 2013, pp. 97862-97864).

Uno de los cambios más significativos es la introducción de una prueba final para obtener el título de Graduado en ESO y el título de Bachillerato. Se recoge también la nueva normativa sobre las Tecnologías de Información y Comunicación aplicadas a la educación. Además de este cambio, el 20 de noviembre de 2013 se aprobó una enmienda para que las matemáticas fueran obligatorias en la modalidad de Ciencias Sociales de Bachillerato ya que desde la unificación de las modalidades de Humanidades y Ciencias Sociales en la única de Ciencias Sociales las matemáticas no eran obligatorias.

### 3.2.3. El Real Decreto 1467/2007

El Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Se fija la finalidad de proporcionar a los estudiantes formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia así como capacitar a los alumnos para acceder a la educación superior.

**Tabla N°1. Contenidos Matemáticas I, 1º de Bachillerato, Análisis.**

|                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| <b>Funciones y tipos de funciones</b> | Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. |
|                                       | Dominio, recorrido y extremos de una función.  |
|                                       | Operaciones y composición de funciones.  |
|                                       | Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica.  |
| <b>Derivada de una función</b>        | Pautas de programas informáticos relacionados.   |
|                                       | Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.  |
|                                       | Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.  |

*Nota:* Contenidos Matemáticas I, 1º de Bachillerato, Análisis. Fuente: Elaboración propia a partir del Decreto 23/2009.

### 3.2.4. Decreto 23/2009

El Decreto 23/2009, de 3 de febrero, por el que se establece el currículo de Bachillerato y se implanta en la comunidad autónoma del País Vasco.

En el caso de las matemáticas, se recoge su contribución a cada una de las competencias básicas de la siguiente forma, aparte de la matemática:

**Tabla N°2. Competencias básicas y su contribución matemática en Bachillerato.**

|  |  |
|--|--|
| <b>Cultura científica, tecnológica y de la salud</b>       | Hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. Las matemáticas son el lenguaje que tiene la ciencia a su disposición                     |
| <b>Tratamiento de la información y competencia digital</b> | Valiéndose de modernos instrumentos y su software correspondiente, para potenciar su aprendizaje y su uso.   |
| <b>Aprender a aprender</b>                                 | Alfabetizando matemáticamente se evitan situaciones de rechazo o de bloqueo ante el aprendizaje que contribuye al convencimiento de la capacidad matemática de cada uno. |
| <b>Autonomía e iniciativa personal</b>                     | Los contenidos del currículo matemático están asociados con la iniciativa y la confianza en la propia capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones                 |

|  |  |
|--|--|
| <b>Comunicación lingüística</b>        | inciertas.<br>Las matemáticas son concebidas como una manera de expresión que utiliza continuamente la comunicación oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. |
| <b>Cultura humanística y artística</b> | El reconocimiento de las relaciones y formas geométricas ayuda en el análisis y comprensión de determinadas producciones y manifestaciones artísticas.                         |
| <b>Social y ciudadana</b>              | El trabajo en equipo, aceptando el punto de vista de otros, aportando actitudes de rigor, flexibilidad, coherencia y sentido crítico.  |

*Nota:* Competencias básicas y su contribución matemática en Bachillerato. Fuente: Elaboración propia a partir del Decreto 23/2009.

### 3.3. LAS COMPETENCIAS

Según Aguerrondo (2009) existe una clara conciencia de “revolución” educativa totalmente diferente a los cambios que tuvo anteriormente. El problema es que no vale con extender o mejorar la educación, ahora hay que repensar el modelo y para hacerlo se deben redefinir los tres pilares del triángulo didáctico:

1. Qué se entiende por sujeto de la enseñanza.
2. Qué se entiende por sujeto que enseña.
3. Qué se entiende por conocimiento válido a transmitir.

Uno de los cambios más significativos es la introducción de las competencias, surgida como una ola mundial en las reformas educativas de segunda generación en las políticas de calidad.

El informe de la UNESCO expone que, en la situación actual, debemos aprender a reflexionar, dudar, adaptarse con la mayor rapidez posible y saber cuestionar el legado cultural propio respetando los consensos. A raíz de esta premisa se concibieron diferentes competencias, según el profesor Tobón (comunicación personal, 18 de marzo de 2005), entendidas como actuaciones integrales para identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas del contexto con idoneidad y ética, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer.

La LOE establece ocho competencias básicas que debe adquirir el alumno para su desarrollo completo y satisfactorio una vez terminada su etapa en la escuela:

1. La competencia en comunicación lingüística.
2. La competencia matemática.
3. La competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. El tratamiento de la información y competencia digital.

- 
5. La competencia cultural y artística.
  6. La competencia social y ciudadana.
  7. La competencia para aprender a aprender.
  8. La competencia en autonomía e iniciativa personal.

Todas las asignaturas del currículo de Bachillerato colaboran en la adquisición de cada una de las competencias, teniendo más incidencia en la relacionada directamente con su naturaleza. Por ello, las matemáticas, en todos sus temas aportan a la competencia matemática, pero también a las demás.

La competencia matemática se define por el Decreto 1467/2007, como:

[...] la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral (BOE núm. 5, 2007, pp.686-687).

### **3.4. LAS FUNCIONES**

Las funciones forman parte del bloque 4 de 1º de Bachillerato tanto de Ciencias Sociales como de Ciencias y Tecnología. Las funciones aparecen en la vida real en forma de relación entre dos o más magnitudes, tanto en probabilidad, como en salud, como en economía, argumenta Ballester (2007). Ugalde (2013) argumenta que el concepto de función está presente en toda la matemática siendo la herramienta por excelencia en las áreas que buscan modelar o describir las actividades cotidianas y los fenómenos que se perciben (matemática aplicada). Su aparición fue a causa del entendimiento de fenómenos naturales y situaciones de la vida real. Las leyes de la física, el crecimiento poblacional, el interés compuesto o la trigonometría son claros ejemplos de la aplicación de las funciones. Es por esto que la enseñanza de las funciones debe hacerse con ejercicios asociados a situaciones reales que puedan motivar a los alumnos en el descubrimiento de las funciones y su aplicación. Concluye que el verdadero reto al enseñar el concepto de función radica en cómo diseñar actividades para que los estudiantes descubran el concepto de función por sí mismos. Enseñar funciones de manera interactiva a través de la PDI con ejercicios que ayuden a resolver situaciones susceptibles de ser vividas en el futuro (en economía y procesos industriales sobre todo) puede llevar a que los alumnos interioricen mejor la materia, se motiven y, por último, aumenten su autonomía matemática. Sin ir más lejos, se puede utilizar la actual situación de crisis

---

económica para comparar curvas de consumo o puntos mínimos, máximos y de inflexión o el crecimiento poblacional o migratorio.

Por todo lo anterior, entender cómo se forman las funciones, su tendencia, sus límites, su continuidad, y poder leer la gráfica de una función es parte fundamental en la formación matemática de los alumnos de hoy en día.

### **3.4.1. Errores en las gráficas de las funciones**

¿Cometen errores los alumnos como para que se necesite un estudio como el que estamos llevando a cabo? Según los estudios realizados por Arce y Ortega (2013), los alumnos de 1º de Bachillerato cometen errores basados en tres conceptos principalmente:

1. Los alumnos reproducen deficientemente el trazado de las gráficas aunque tienen correctamente interiorizados los mapas conceptuales del tema.
2. Desconocimiento de cómo se reproducen ciertas propiedades de la función en su representación gráfica.
3. Existencia de errores en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el límite de una función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones.

Argumentan que el docente, a través de ciertos errores didácticos, puede provocar una mayor aparición de estas deficiencias. Por ejemplo, los picos en funciones suaves pueden proceder de dibujar en la pizarra las ramas infinitas no asíntóticas partiendo de un mismo punto (como el vértice de una parábola).

Además de cometer errores al graficar las funciones, un estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) revelaba que los alumnos indicaban una ausencia de aprehensión conceptual con las funciones tanto lineales como cuadráticas. Esta ausencia se manifiesta en las funciones cuadráticas con mayor presencia a la hora de encontrar el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola. También fue claro que los alumnos no acertaron a establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica ni su signo + o -.

---

## 3.5. LA PDI

Para empezar, hacemos referencia a lo más básico en este trabajo: ¿es la PDI un recurso “bueno” en la enseñanza? Si no fuera así no tendría sentido seguir.

Gerver (2010) sostiene en su libro *Crear hoy la escuela de mañana* que los alumnos deben informatizarse ya que las necesidades que tendrán en el futuro pasan por estarlo, y que la escuela debe formarles en ello. Según Gómez (2012) la PDI presenta ventajas y desventajas. Para el docente supone un reto, fomenta la flexibilidad y la espontaneidad, permite el uso de colores, se pueden reutilizar clases anteriores y comunicarlás con padres y alumnos, posibilita nuevas metodologías para el trabajo en el aula y fomenta la colaboración con otros docentes para mejorar continuamente. Para el alumno conlleva un aumento de motivación, un estímulo de su autonomía y autoestima, un desarrollo de su competencia digital, el uso de Internet como herramienta de consulta y refuerzo, una mejora de comprensión y se vuelven protagonistas activos en su aprendizaje.

La PDI supone un esfuerzo mayor por parte del docente, que debe aprender el manejo de la TIC, su mantenimiento y sus posibilidades.

En un curso, Marquès sostiene que “cuando los profesores CONOZCAN eficaces modelos de uso didáctico de las TIC que PUEDAN reproducir sin dificultad en su contexto (tengan recursos y formación) y les ayuden realmente en su labor docente (mejores aprendizajes de los estudiantes, reducción del tiempo y esfuerzo necesario, satisfacción personal) seguro que TODOS van a QUERER utilizarlas. ¿Por qué no iban a hacerlo?” (Comunicación oral, 28 de abril de 2005).

### 3.5.1. PDI Utilidad para los alumnos

Según Dale (1935) en su libro *Children's attendance at motion pictures*, los niños están más atentos cuando observan figuras en movimiento, prestan una mayor atención y adquieren mejor los conocimientos. Además explica que en su cono de aprendizaje que, al cabo de dos semanas, lo observado se recuerda mejor al observar una película o ver una demostración que solo observando imágenes. A continuación se muestra un gráfico que muestra la tendencia de recuerdo que tenemos según el tipo de actividad que se realiza.

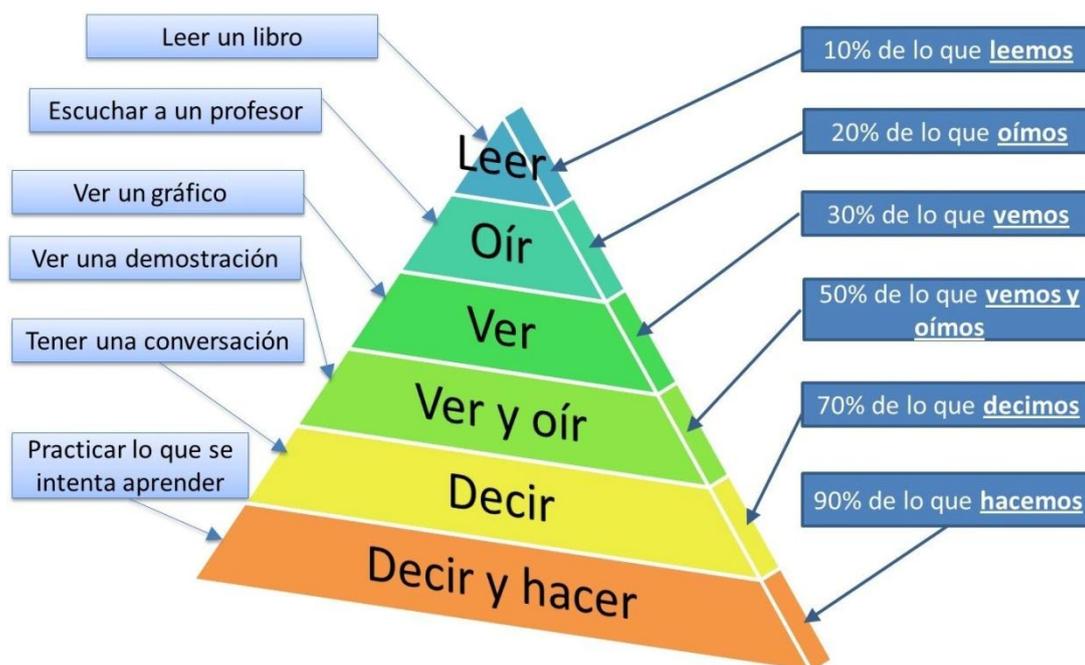


Ilustración N° 1. Cono del aprendizaje según Edgar Dale. Fuente: Rojo (2012, p.1).

Según la ilustración concluimos dos cosas:

1. Después de dos semanas recuerdan más cuando dicen y hacen cosas, es decir, cuando es una actividad participativa y receptiva.
2. La realización de lo que se desea aprender es tremendamente efectivo.

### 3.5.2. Programas matemáticos para representar funciones a través de la PDI

Un estudio realizado por Mañas (2013) destaca que la utilización de Wiris y GeoGebra en las aulas de matemáticas aumenta el interés de los alumnos, la complicidad a la hora de realizar ejercicios en grupo y un aumento significativo del número de ejercicios realizados en casa.

#### a) GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico de código abierto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ofrece un entorno donde el álgebra y la geometría se conectan de forma plena. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus

---

derivadas, integrales, etc. “Destaca por poseer algunas ventajas que se pueden resumir en dos palabras: facilidad y conexión” y además “consigue conectar distintos elementos que lo convierten en una aplicación diferente: asocia las expresiones gráficas a las simbólicas, la medida a la cantidad, la propiedad geométrica a la ecuación algebraica, combina la precisión con la estética, el álgebra y el cálculo con la geometría” (Arranz, Losada, Mora y Sada, 2009, pp. 7-8).

#### **b) Wiris**

La calculadora Wiris es una plataforma de cálculo matemático online de acceso libre. Su manejo es muy sencillo y permite hacer cálculos elementales, cálculos más complejos, representaciones de funciones y de elementos geométricos (en 2D y 3D), además de poder programarla, aumentando sus prestaciones.

#### **c) Mathematica (Wolfram)**

Por último destacar el software de Wolfram Research como el más completo de todos, con el inconveniente de no ser libre. Se define brevemente como un programa para la computación y visualización numérica, simbólica y gráfica y que ofrece una herramienta interactiva de cálculo y un lenguaje de programación potente.

#### **d) Moodle**

Aunque Moodle no es un programa matemático sí es una plataforma educativa donde permite colgar ejercicios de profesor a alumnos y viceversa. Además de poder utilizarse para la enseñanza a distancia, es una herramienta importante para complementar la educación presencial. Moodle es un software libre por lo que su utilización y redistribución es gratuita y su código es público.

---

## 4. ESTUDIO DE CAMPO

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Analizado el marco teórico se ha llevado a cabo un estudio de campo para poder realizar correctamente la propuesta didáctica y completar todos los aspectos necesarios.

Las funciones son parte fundamental de los cursos de Bachillerato ocupando un porcentaje considerable del bloque de análisis, tanto en la modalidad de Ciencias Sociales como en la de Ciencias y Tecnología, con un especial esfuerzo en su comprensión gráfica en la primera.

El estudio de campo pretende conocer dos puntos de vista diferentes; alumnos y profesores, basándose en la experiencia de ambos en el tema de funciones y en el uso de la PDI. Se quiere saber el éxito del uso de la PDI, la frecuencia con la que la utilizan y cómo creen que debería ser utilizada. Sabiendo que existen muy variados programas matemáticos, se pretende conocer el impacto de los mismos en los centros. Asimismo se recogen cuadernos para contrastar los errores más comunes que cometen en la representación gráfica de las funciones.

La propuesta didáctica pretende dar respuesta a los problemas que conlleva la utilización de la PDI en el tema de funciones y ofrecer un conjunto de ejercicios y sugerencias para el futuro uso de la misma.

### 4.2. MARCO CONTEXTUAL

El estudio de campo se realizó en los centros educativos Santa María Marianistas y Miguel de Unamuno ambos ubicados en Vitoria – Gasteiz.

#### 4.2.1. Centro Santa María Marianistas

El centro Santa María Marianistas es un colegio concertado con más de 125 años de historia formando parte del grupo Kristau Eskola que recoge aquellos centros cristianos adheridos en el País Vasco. Su oferta educativa discurre en todos los niveles, desde infantil hasta Bachillerato:

- a) *Infantil*: Posee un proyecto lingüístico único, consistente en la inmersión lingüística en el euskera.

- 
- b) *Primaria*: Posee un proyecto lingüístico abierto, con la inclusión del inglés para alcanzar el plurilingüismo y de un proyecto pastoral para su introducción el mundo espiritual.
  - c) *ESO*: Posee un proyecto lingüístico más amplio donde se ofrece la inclusión de un nuevo idioma: francés o chino. Tiene 4 modalidades disponibles, dependiendo del nivel de inmersión en el euskera: A (menor inmersión), C (inmersión media), B (inmersión alta), D (inmersión total).
  - d) *Bachillerato*: Ofrece dos modalidades de Ciencias y Tecnología y Ciencias Sociales en castellano (modelo A) y dos en euskera (modelo D).

Además de su oferta educativa formal, el centro posee extraescolares propias como Elkarbidea, un grupo pastoral con actividades para fomentar el compañerismo, la amistad, los valores cristianos y el amor por la naturaleza.

Las instalaciones del centro son muy completas, disponiendo de sala de música, de audiovisuales, de informática, biblioteca, gimnasio, aulas de tecnología, de química y de dibujo, una capilla, dos polideportivos y un anfiteatro. En cuanto al equipamiento en las aulas, adolece de una pobre instalación de las Pizarras Digitales Interactivas, ya que el grupo Kristau Eskolak no incluyó esta TIC en sus planes hasta bastante tarde y sólo las han montado en las aulas desde Primaria hasta 2º de ESO.

#### **4.2.2. Centro Miguel de Unamuno**

Por otro lado, Miguel de Unamuno es un colegio público donde se imparten la Enseñanza Secundaria Obligatoria y los Bachilleratos de Ciencias y Tecnología y de Humanidades y Ciencias Sociales:

- a) *ESO*: Imparte los modelos A, B y D clasificados de la misma forma que lo descrito anteriormente.
- b) *Bachillerato*: Ofrece dos modalidades de Ciencias y Tecnología y Ciencias Sociales en castellano (modelo A) y dos en euskera (modelo D).

Además lleva bastantes años desarrollando una experiencia plurilingüe en inglés, tanto en Secundaria Obligatoria como en Bachillerato.

Las instalaciones del centro son completas para la labor educativa, disponiendo de sala de informática, un polideportivo, un gimnasio y una biblioteca. En cuanto a la dotación de Pizarras Digitales Interactivas sí que resaltar que, como centro público, tienen instaladas estas TIC en todas las aulas, por lo que los docentes y los alumnos tienen experiencia de uso.

---

### 4.3. METODOLOGÍA

Las herramientas para realizar el estudio de campo han sido dos, los cuestionarios y la recogida de cuadernos. Los cuestionarios, que tenían tanto preguntas cerradas con múltiple respuesta como preguntas abiertas, se encuentran en el apartado Anexos.

La encuesta ha sido elegida como método de investigación por ser la estrategia de recogida de datos más efectiva para este trabajo. Según García y Quintanal (2010) la encuesta permite conocer una realidad y descubrir una realidad. Nuestro objetivo es conocer la realidad de la experiencia de uso con la PDI y sus valoraciones y, por otro lado, descubrir la realidad de formas de uso futuras en el tema de funciones de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Para cumplir con los pasos que plantea Pulido (1971) se sigue el siguiente esquema:

#### 4.3.1. Determinación de la población

Profesores y alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en dos centros de diferente carácter público. Se desestimaron directores de centros y personal de administración ya que no tenían contacto directo con la Pizarra Digital Interactiva.

#### 4.3.2. Selección y tamaño de la muestra

4 profesores de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y 26 alumnos repartidos de la siguiente forma: 21 a alumnos de Marianistas y 5 a alumnos de Miguel de Unamuno.

**Tabla Nº3. Reparto de cuestionarios.**

| Colegio                 | Cuestionario | Ciencias y Tecnología |
|-------------------------|--------------|-----------------------|
| Santa María Marianistas | Alumnos      | 21                    |
|                         | Profesores   | 2                     |
| Miguel de Unamuno       | Alumnos      | 5                     |
|                         | Profesores   | 2                     |

*Nota:* Reparto de cuestionarios. Fuente: Elaboración propia.

#### 4.3.3. Diseño del material para realizar la encuesta

Para la recogida de datos se ha tenido muy en cuenta dos aspectos: la temporalización del curso, ya que el tema de funciones se imparte al final, por lo que tanto alumnos como profesores tienen más reciente el contenido y el tipo de preguntas para ambos colectivos. Este último periodo no es el más indicado para

---

realizar las encuestas por la falta de tiempo y la carga de trabajo de los profesores, pero era el más indicado para que las respuestas fueran las más acertadas.

Las preguntas cerradas contestaban a los objetivos específicos para poder cuantificar aspectos como el conocimiento de la PDI, la frecuencia de uso de la PDI, las asignaturas en las que se utiliza y la valoración de los aspectos de la PDI. Las preguntas abiertas proporcionaban información sobre los programas utilizados por profesores en el tema de funciones, el impacto en los alumnos y su opinión sobre el futuro uso de la PDI en el tema de funciones y su representación gráfica.

Este tipo de cuestionarios es completo porque aporta un estudio cuantitativo y otro cualitativo tanto de profesores como de alumnos. Los alumnos son los protagonistas de su educación tal y como muestra Rommy (1996) y por ello deben ser consultados. Sus respuestas condicionarán la propuesta didáctica.

A continuación se muestran las tablas de los cuestionarios con opciones y justificación.

**Tabla N° 4. Resumen del cuestionario a alumnos con opciones y justificación.**

| Preguntas   | Opciones dadas de respuesta  | Comentario   | Justificación de lo que se busca conseguir con la pregunta  |
|---|--|--|---|
| <b>Pregunta N° 1. Nombre.</b>   |  |  | Para conocer el sexo.   |
| <b>Pregunta N° 2. ¿Conoce usted la Pizarra Digital Interactiva?</b>   | Sí.<br>No. Leer el texto “Descripción de PDI” y saltar a la pregunta 5.  |  | Conocer la penetración de la Pizarra Digital Interactiva en las aulas.  |
| <b>Pregunta N° 3. ¿Utiliza alguno de sus profesores la Pizarra Digital Interactiva?</b>   | Sí.<br>No. Saltar a la pregunta 5.   |  | Conocer el porcentaje de utilización de la Pizarra Digital Interactiva en las aulas.  |
| <b>Pregunta N° 4. ¿En qué asignaturas han utilizado la PDI?</b>   |  |  | Conocer las asignaturas donde más se utiliza la Pizarra Digital Interactiva.  |
| <b>Pregunta N° 5. Centrándonos en la asignatura de matemáticas. ¿Le ha parecido útil la PDI?<br/>¿Podría valorar su conformidad con los siguientes aspectos de la PDI en matemáticas?</b> | Sí. ¿Por qué?<br>No. ¿Por qué?<br>Permite una interactividad eficaz con el alumno.<br>La PDI hace más atractiva la asignatura.<br>La PDI hace más fácil el aprendizaje.<br>Recomendaría utilizarla.  |  | Conocer la opinión de los alumnos que han tenido experiencia con la PDI en cuanto a su utilidad y otros parámetros.<br>De esta forma se pueden realizar cambios o sugerencias de uso de la PDI. |
| <b>Pregunta N° 6. Centrándonos en el tema de funciones y gráficas, ¿podría señalar en qué puntos tuvo más dificultades?</b>   | Dominio, recorrido y extremos de una función.<br>Operaciones y composiciones de funciones.<br>El concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.<br>Dibujo de gráficas de funciones.<br>El concepto de derivada de una función.<br>Otro. |  | Conocer las dificultades más frecuentes que tienen los alumnos.<br>De esta forma se pueden programar ejercicios enfocados a solventar las dudas y reforzar el aprendizaje de esas dificultades. |
| <b>Pregunta N° 7. A continuación se le mostrará una propuesta educativa relacionada con la PDI para que dé su opinión al respecto. [...] ¿Qué opinión le merece la propuesta?</b>         |  | Se da libertad para contestar y se le animaba con una introducción objetiva.<br>No más de 5 minutos. | Comprobar la aceptación de la propuesta y conseguir sugerencias por parte de los alumnos a la hora de enseñar con la PDI.<br>Alumnos con y sin experiencia previa.                              |

*Nota:* Resumen del cuestionario a alumnos con opciones y justificación. Fuente: Elaboración propia.

**Tabla N° 5. Resumen del cuestionario a profesores con opciones y justificación.**

| Preguntas  | Opciones dadas de respuesta  | Comentario  | Justificación de lo que se busca conseguir con la pregunta   |
|--|--|---|--|
| <b>Pregunta N° 1. Nombre y años impartiendo la asignatura.</b>   |  |   | Para conocer el sexo y los años de experiencia docente. Influye en el peso de su opinión.  |
| <b>Pregunta N° 2. ¿Conoce usted la Pizarra Digital Interactiva?</b>  | Sí.<br>No. Leer el texto “Descripción de PDI”.   |   | Conocer la penetración de la Pizarra Digital Interactiva en las aulas.   |
| <b>Pregunta N° 3. ¿Podría dar su opinión valorada acerca de los siguientes aspectos de la PDI?</b>   | La PDI es una herramienta útil.<br>La PDI facilita la labor al profesor.<br>Es necesaria una formación específica para su uso.<br>Debe aplicarse en matemáticas.<br>La PDI hace que el alumno esté más atento.   |   | Conocer la opinión de los profesores respecto a la utilidad de la PDI y otros parámetros, hayan tenido una experiencia previa o no.<br>Esto permite saber cómo mejorar la metodología con la PDI de manera indirecta.      |
| <b>Pregunta N° 4. ¿Ha utilizado la PDI para impartir alguna unidad didáctica?</b>  | Sí.<br>No. Saltar a la pregunta 7.   |   | Conocer el porcentaje de utilización de la Pizarra Digital Interactiva en las aulas.   |
| <b>Pregunta N° 5. ¿Podría expresar su satisfacción con su experiencia en la enseñanza con la PDI?</b>  | Facilidad de uso.<br>Capacidad de interacción con el alumno.<br>Efectividad en la enseñanza.<br>Atracción para el alumno.  |   | Conocer la opinión de los profesores que sí han tenido experiencia previa con la PDI.<br>De esta forma se mejora la metodología con la PDI de manera directa.  |
| <b>Pregunta N° 6. ¿Podría indicar para enseñar qué contenidos la ha utilizado?</b>   |  |   | Conocer los contenidos matemáticos en los que más se utiliza la PDI.   |
| <b>Pregunta N° 7. . Centrándonos en el tema de funciones de 1° de Bachillerato. Indique cuál o cuáles son los principales errores que cometen los alumnos.</b> | No saben calcular el límite de una función en un punto.<br>No saben calcular intuitivamente el límite de una función en el infinito.<br>Calculan y dibujan erróneamente asíntotas verticales, horizontales y/o oblicuas.<br>Dibujan las gráficas de las funciones sin la debida precisión.<br>Otro (especifique) |   | Recoger los errores más comunes que cometen los alumnos según la experiencia de los profesores.<br>De esta forma se pueden programar ejercicios enfocados a solventar las dudas y reforzar el aprendizaje de esos errores. |
| <b>Pregunta N° 8. A continuación se le mostrará una propuesta educativa relacionada con la PDI para que dé su</b>  |  | Se da libertad para contestar y se le animaba con una | Comprobar la aceptación de la propuesta y conseguir sugerencias por parte de los alumnos a la hora de enseñar con la PDI.  |

---

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| <b>opinión al respecto. [...] ¿Qué opinión le merece la propuesta?</b>   |  | introducción objetiva.<br>No más de 5 minutos.   | Profesores con y sin experiencia previa.   |
| <b>Pregunta N° 9. Por último me gustaría saber su opinión acerca de cómo podríamos utilizar la PDI para mejorar la práctica docente.</b> |  | Se da libertad para contestar y se le animaba con una introducción objetiva.<br>No más de 5 minutos. | Recabar información y sugerencias de los docentes para utilizar mejor la PDI a la hora de enseñar.<br>Se puede incluir en la propuesta metodológica. |

*Nota:* Resumen del cuestionario a profesores con opciones y justificación. Fuente: Elaboración propia.

## 4.4. RESULTADOS

### 4.4.1. Alumnos

A partir de la Pregunta N° 1 “Indique su nombre” se obtiene que el 40% de los alumnos entrevistados fueron chicos frente al 60% de chicas. De entre los encuestados, el 80% cursaban la modalidad de Ciencias y Tecnología en Marianistas y el 20% en Miguel de Unamuno, con unos resultados muy equilibrados.

De la Pregunta N° 2. *¿Conoce usted la Pizarra Digital Interactiva?* el 100% de los alumnos conocían el recurso educativo de la Pizarra Digital Interactiva. Sin embargo menos de la mitad (47%) tenían un conocimiento real, con una experiencia de uso previo a la encuesta como reflejaba la Pregunta N° 3 *¿Utiliza alguno de sus profesores la Pizarra Digital Interactiva?*

En la Pregunta N° 4 “*¿En qué asignaturas utilizaron sus profesores la PDI?*” se dieron los siguientes resultados:

#### ASIGNATURAS DONDE SE UTILIZA LA PDI

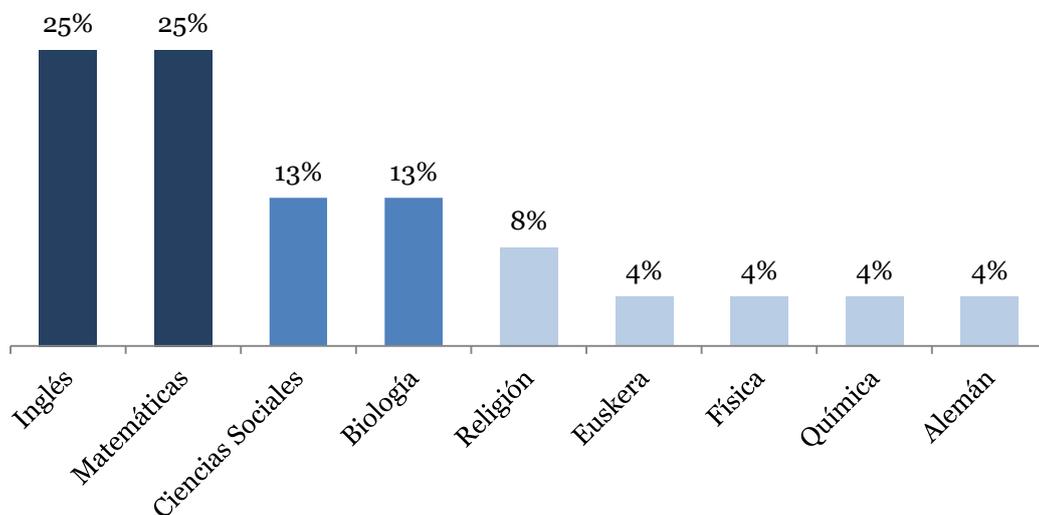


Gráfico N° 4. Porcentaje de asignaturas donde se utiliza la PDI. Fuente: Elaboración propia.

Se comprueba cómo las asignaturas que concentran el 50% del uso de la PDI son el inglés y las matemáticas.

Al referirnos a la utilidad de la PDI en la asignatura de matemáticas concretamente, el 100% de los alumnos contesta afirmativamente, dando los siguientes argumentos: “porque la función sale directamente”, “era una forma más divertida, todo el mundo quería salir”, “a la hora de usar gráficos es más cómodo”,

“la PDI permitía el auto-aprendizaje, porque podías comprobar en casa que lo estabas haciendo bien”, “tenías más métodos de resolución, porque el profesor lo hace de una manera y la pizarra de otra” o “la velocidad de explicación aumenta”.

A la Pregunta N° 5 “¿Podría valorar su conformidad con los siguientes aspectos de la PDI en matemáticas?” debemos hacer dos distinciones:

### A) CONFORMIDAD CON ATRIBUTOS DE LA PDI, alumnos sin experiencia previa

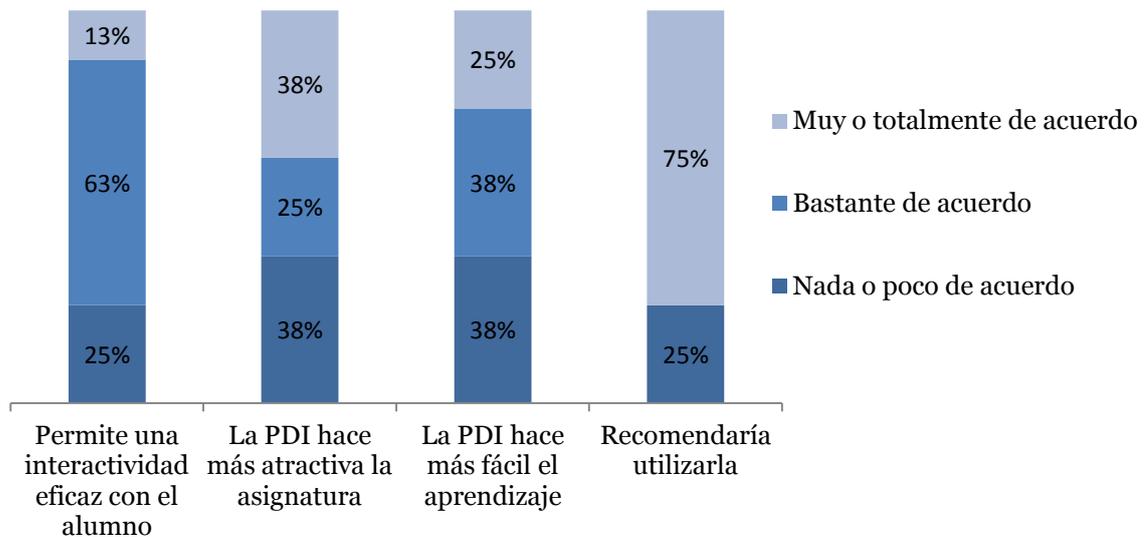


Gráfico N° 5. Porcentaje de conformidad, alumnos sin exp. Fuente: Elaboración propia.

### B) CONFORMIDAD CON ATRIBUTOS DE LA PDI, alumnos con experiencia previa

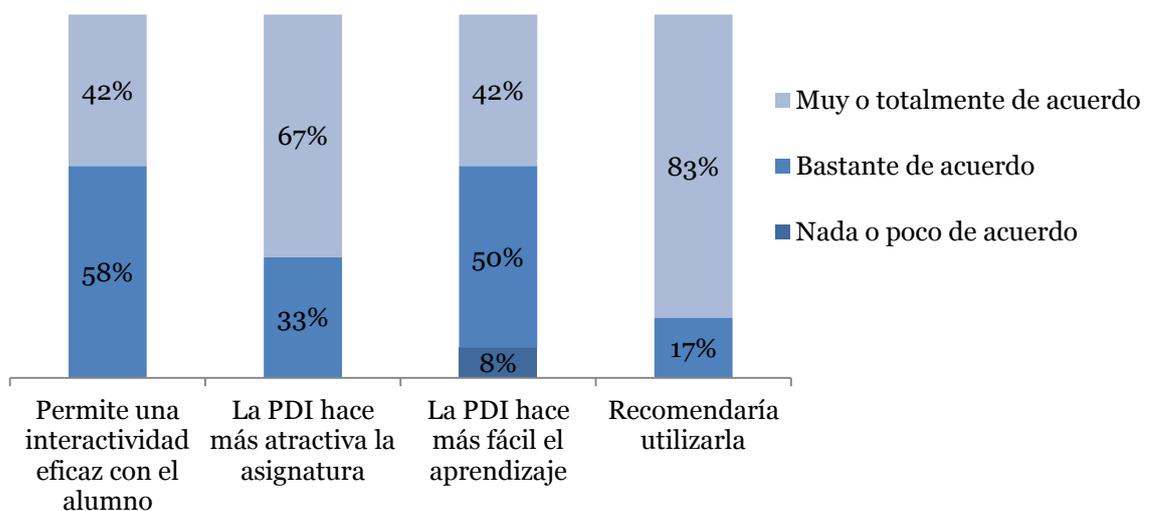


Gráfico N° 6. Porcentaje de conformidad, alumnos con exp. Fuente: Elaboración propia.

Se aprecia que los alumnos con experiencia en el uso de la PDI dan un porcentaje más alto en conformidad, ya que conocen las ventajas de la utilización de esta herramienta.

En este tipo de preguntas, la respuesta “Bastante de acuerdo” no proporciona información útil y por ello no se tiene en cuenta a la hora de hacer apreciaciones.

Centrándonos en la evaluación por atributos, el atributo de “recomendación” es el que más alto porcentaje presenta con un 75% y un 83%, respectivamente, mientras que el atributo “interactividad con el alumno” obtiene los porcentajes más bajos de conformidad (13% y 42%, respectivamente). Para los alumnos que no tienen experiencia previa la “facilidad de aprendizaje” y “el aumento de atractivo” son atributos que crean la mayor disconformidad (38% de disconformidad ambos) mientras que aquellos alumnos con experiencia no encuentran objeciones en ningún atributo excepto en el de la “facilidad de aprendizaje” (8%).

Para la Pregunta N° 5 “Centrándonos en el tema de funciones y gráficas, ¿podría señalar en qué puntos tuvo más dificultades?” los resultados fueron los siguientes:

### PORCENTAJE DE DIFICULTADES

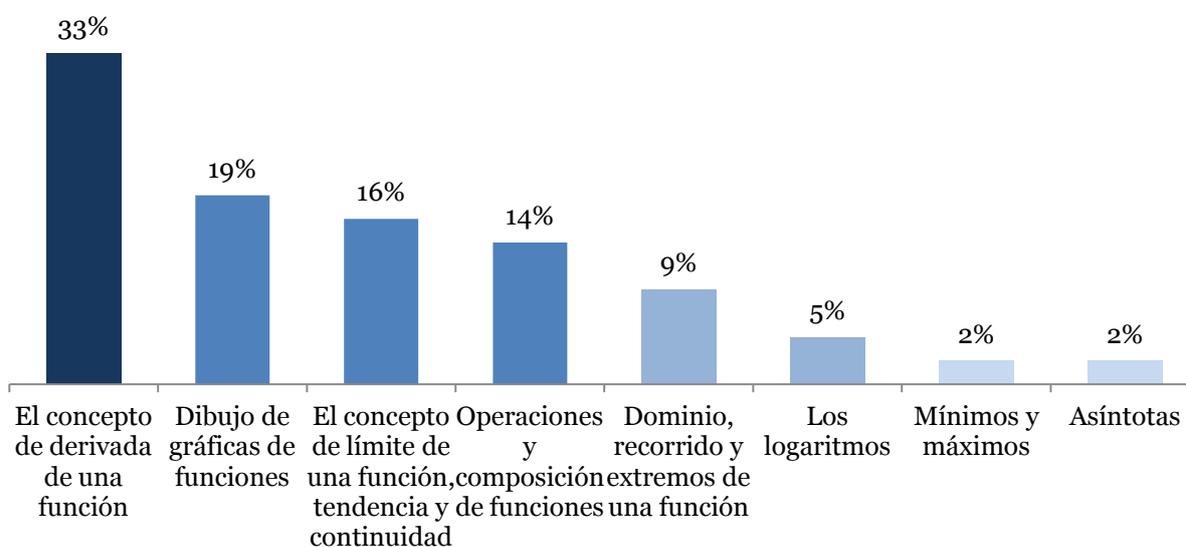


Gráfico N° 7. Porcentaje de dificultades con funciones. Fuente: Elaboración propia.

Se aprecian tres grupos de dificultades: Por encima de todas está el concepto de derivada de una función (33%), después se engloban tres y en este orden: dibujo de gráficas de funciones (19%), el concepto de límite de una función, tendencia y continuidad (16%) y operaciones y composición de funciones (12%) y, por último, otras 4 dificultades que son: el dominio, recorrido y extremos de una función (9%), los logaritmos (6%), los mínimos y máximos (3%) y las asíntotas (3%).

---

La última de las preguntas a los alumnos fue una pregunta abierta donde se mostraba la utilización de la Pizarra Digital Interactiva con software matemático para graficar funciones y que ello facilitara la enseñanza y minimizara los errores al dibujarlas. Todos los alumnos contestaron positivamente a la propuesta, aunque sus respuestas variaron mucho, sobre todo teniendo en cuenta si la habían utilizado para ello o no.

Los alumnos que la utilizaron en matemáticas anteriormente dan explicaciones sobre las ventajas e inconvenientes de la propuesta más completas con comentarios como: “Depende de si sólo te permite verlas o si se puede enseñar el proceso de cómo graficar (con el programa matemático). Se mejora la exactitud y porque hay funciones complicadas de graficar. Es más claro, no emborronado”; “pudimos calcular gráficas y datos en informes, pero se necesita conocimiento informático. Nos sirvió para aprender programas”; “es mucho más claro, en la pizarra tradicional no se entiende, no sabes si la función corta en el 1 o en el 2” y por último “el ordenador es más creíble, aunque si no se entiende el ordenador no aporta nada, debe ser complementario”.

Las ventajas e inconvenientes que predicen los alumnos sin experiencia previa con la PDI son sobre todo dos: como ventaja la exactitud y la posibilidad de comprobación inmediata y como inconveniente que se dejen de explicar las pautas para dibujar las gráficas a lápiz y papel, ya que en el examen no tendrán acceso al programa.

#### **4.4.2. Profesores**

Los profesores se dividieron en el 50% hombres y el 50% mujeres. Coincidió que en el centro Santa María Marianistas eran los dos hombres y las mujeres correspondieron al centro Miguel de Unamuno.

Tres de los profesores tenían más de 10 años de experiencia impartiendo la asignatura de Funciones en 1º de Bachillerato.

Los cuatro profesores conocían la Pizarra Digital Interactiva, sin embargo tres de ellos la habían utilizado alguna vez para impartir asignaturas no de Bachillerato sino de cursos anteriores (2º, 3º y 4º de ESO).

A la Pregunta Nº 3 “*Podría dar su opinión acerca de los siguientes aspectos de la PDI?*” las respuestas fueron las siguientes:

## CONFORMIDAD ATRIBUTOS DE LA PDI

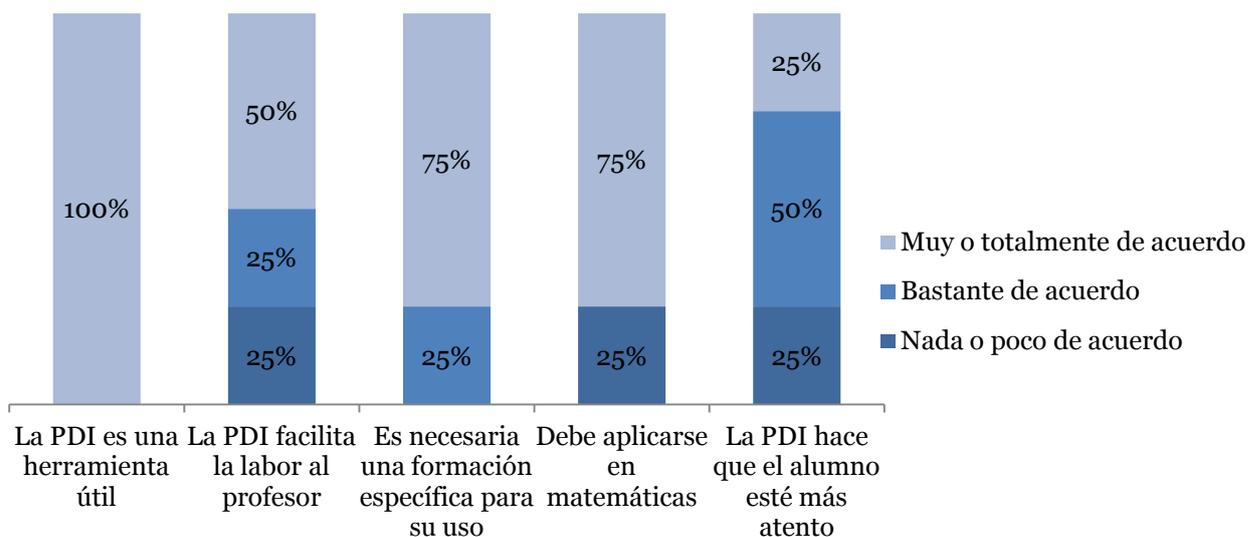


Gráfico N° 8. Conformidad profesores con atributos de la PDI. Fuente: Elaboración propia.

A la Pregunta N° 4 de si han utilizado la Pizarra Digital Interactiva para impartir alguna unidad didáctica de los tres profesores que lo hicieron fue en geometría y análisis. De nuevo en cursos anteriores a Bachillerato. El profesor que no la utilizó argumentó que “no tuvo tiempo”.

Al expresar su satisfacción con la experiencia de uso de la PDI en la Pregunta N° 5 contestaron de la siguiente manera:

## SATISFACCIÓN CON LA EXPERIENCIA DE USO

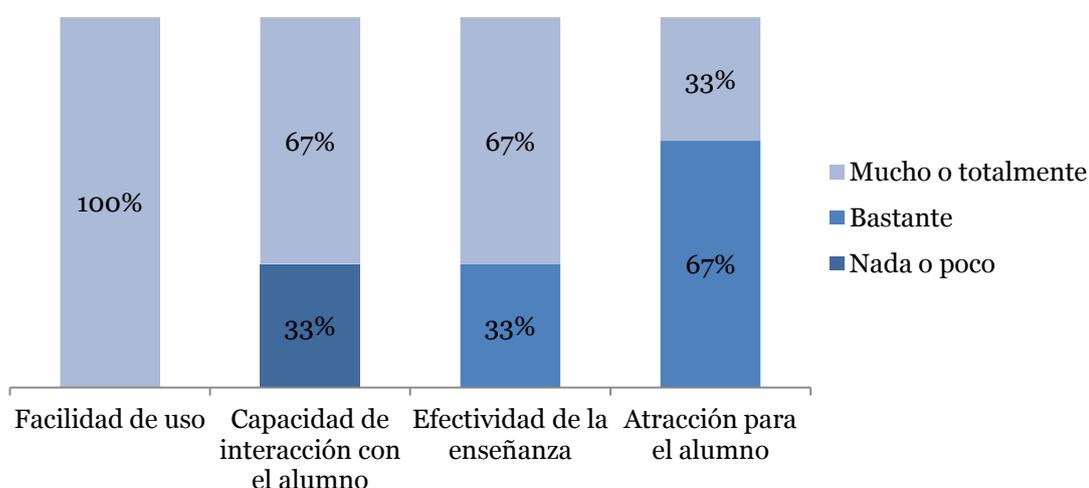


Gráfico N° 9. Satisfacción de uso de la PDI. Fuente: Elaboración propia.

A la Pregunta N° 7 “Centrándonos en el tema de funciones de 1º de Bachillerato. Indique cuál o cuáles son los principales errores que cometen los alumnos” respondieron:

### PRINCIPALES ERRORES EN FUNCIONES

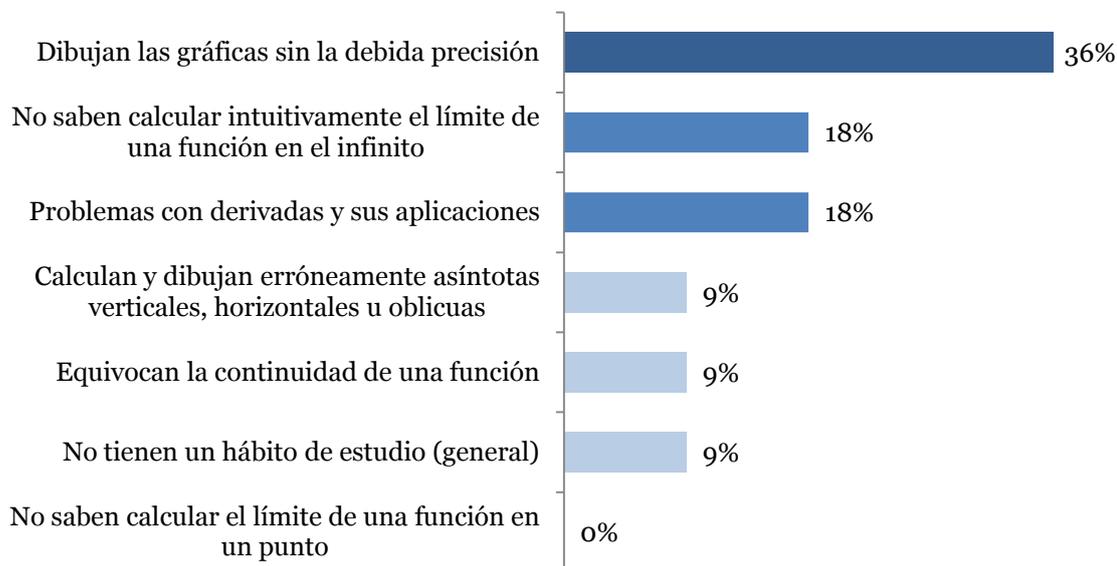


Gráfico N° 10. Errores en funciones en 1º de Bachillerato. Fuente: Elaboración propia.

Se observa cómo, aunque los alumnos tengan las derivadas como la parte más complicada de entender, el error más frecuente, a la vista de los profesores, aparece a la hora de dibujar correctamente y con un grado de precisión aceptable las funciones (36%). En un segundo término aparecen el límite de una función en el infinito y las derivadas con sus aplicaciones (18% ambas). Por último y de manera poco significativa están la equivocación de la continuidad de las funciones (9%), el cálculo erróneo de asíntotas (9%) y, como observación de una profesora del centro de Miguel de Unamuno, el mal hábito de estudio (9%).

Por último, se entregan los resultados de las dos últimas preguntas donde se pide un análisis subjetivo tanto de la propuesta como de sugerencias de utilización futura.

A la propuesta educativa de incluir software matemático para graficar funciones de manera que los alumnos puedan interactuar y cometer menos fallos los cuatro profesores encuestados coinciden en que es buena y comentan diferentes programas matemáticos que ya utilizan como el Wiris, el Flotpot, el Desmos o el GeoGebra. Como ventajas se ponen de acuerdo en que “la exactitud y la posibilidad de comprobar al momento si lo están haciendo bien” son las principales. Como

---

inconvenientes “el poco tiempo que disponen para preparar las clases”, “que si la utilizas pierdes tiempo en clase entre que la enciendes y la apagas”.

Como sugerencias principales aparecen la posibilidad de tener la PDI encendida todo el tiempo sin necesidad de apagarla entre clases para acelerar las clases; la necesidad de una formación en la PDI y sus programas tanto a profesores como a alumnos; que los alumnos dispongan de un soporte digital en sus pupitres; que la PDI sirva de complemento a la pizarra tradicional ya que el sistema suele caerse y se deben hacer pruebas con algún grupo pequeño primero.

Un último comentario interesante fue que el impacto positivo de la PDI sobre los alumnos pierde eficacia según pasan los años, ya que éstos se habitúan y pierden el interés inicial.

## **4.5. INTERPRETACIÓN GLOBAL DE LOS RESULTADOS**

Para empezar es pertinente observar que los centros donde se hicieron las encuestas no poseían PDI en cursos de Bachillerato. Es una herramienta educativa que solo tiene presencia en secundaria.

A la hora de analizar los resultados vamos a separarlos en alumnos y profesores.

### **4.5.1. Alumnos**

El análisis de los resultados de los alumnos refleja que las asignaturas donde más se utiliza la PDI son Inglés, Matemáticas, Ciencias sociales y Biología, concentrando el Inglés y las Matemáticas el 50% de las asignaturas.

Todos los alumnos que tuvieron una experiencia previa con la PDI se mostraron contentos con la misma ya que aumentaba su interés y todo el mundo quería participar.

Se encuentran diferencias significativas entre las expectativas de los alumnos respecto a la efectividad de la PDI y las valoraciones de aquellos que si tuvieron una experiencia previa. Los alumnos con experiencia previa la valoran más positivamente mientras que los que no dudan más de su efectividad. Donde más dudan es en la interactividad y la mejora de la enseñanza.

---

Las mayores dificultades que encuentran los alumnos cuando tienen que aprender el concepto de derivada (33%) y el dibujo de las gráficas por lo complicado de algunas de ellas y por la falta de precisión (19%).

La PDI es una herramienta atractiva para los alumnos y destacan las ventajas que conlleva su utilización. Los alumnos que no la han utilizado nunca desprenden una incertidumbre que no aparece en los alumnos que sí la han utilizado anteriormente tanto en matemáticas como en otras asignaturas. Aun así, todos recomendarían su uso en matemáticas.

Por último, la propuesta de los programas matemáticos para graficar las funciones les resulta buena siempre y cuando no nos olvidemos de dar las pautas para dibujarlas a mano.

#### **4.5.2. Profesores**

Lo primero que destaca cuando se pregunta a los profesores por la frecuencia con la que utilizan una TIC como la Pizarra Digital Interactiva es la carencia que tienen en todos los sentidos: o no tienen una instalada en las aulas donde imparten clase, o la tienen instalada pero nadie les ha dicho cómo utilizarla, o tienen un protocolo muy pesado para utilizarla o el sistema se cae con facilidad. Por ello parece que, o no le dan la importancia que tiene o no tienen demasiado interés por renovarse y utilizarla.

Los profesores son muy realistas a la hora de dar su opinión. Las valoraciones de los aspectos de la PDI son positivas (más del 50% de totalmente de acuerdo en cuatro de los cinco atributos medidos) pero uno de ellos, el que más utilizó la PDI en su carrera pedagógica, sabe que su eficacia se pierde a la vez que los alumnos se habitúan a ella por ello se necesitan nuevas metodologías para motivar al alumno con esta herramienta.

Reconocen que donde más dificultades tiene el alumno en este tema es a la hora de dibujar correctamente las gráficas de las funciones (36% de los errores totales). Por lo que el dibujo de gráficas mediante programas informáticos lo ven como una ventaja. Aun así, saben que el principal escollo para utilizarlos es su propio desconocimiento. Tres de los profesores encuestados creen que es necesaria una formación específica.

---

## 5. PROPUESTA DIDÁCTICA

### 5.1. INTRODUCCIÓN

A continuación se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología a través de la Pizarra Digital Interactiva como recurso didáctico.

En primer lugar, y para poder realizar una correcta propuesta educativa, se han tenido en cuenta las dificultades más importantes que tienen los alumnos y los errores más frecuentes según los profesores. El concepto de derivada y el dibujo preciso de las gráficas son, por tanto, el eje de la propuesta educativa a través de la TIC.

En segundo lugar nos centramos en la metodología que debemos llevar a cabo para que los alumnos interactúen realmente con los programas matemáticos y con la PDI. Por lo tanto, y probada la efectividad de la PDI en el tema de funciones según el estudio de campo, se incluirán los programas más conocidos entre los profesores como son GeoGebra y Wiris dentro de la propuesta. Se propondrá que los alumnos tengan estos programas en casa para que puedan trabajar las funciones utilizándolos.

En tercer lugar, un problema importante es que no se desmotiven y que su interés, y con ello su atención, aumenten. Por eso se incluirán actividades que mantengan activo su interés como proyectos en grupo que tendrán que realizar y enviar a la plataforma Moodle donde después presentarán en clase. La evaluación tendrá en cuenta la manera de resolver, presentar y comunicar dichos proyectos.

## 5.2. OBJETIVOS

Los objetivos de la propuesta didáctica serán aquellos en los que se basa el eje principal: entender la derivada y las gráficas de las funciones.

### 5.2.1. Objetivos curriculares

**Tabla N° 6. Objetivos curriculares de la propuesta didáctica.**

| CONTENIDOS                            | OBJETIVOS  |
|---------------------------------------|--|
| <b>Funciones y tipos de funciones</b> | Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.<br>Pautas para el uso de programas informáticos para analizar cualquier tipo de función. |
| <b>Derivada de una función</b>        | Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.<br>Aproximación al concepto de derivada.<br>Extremos relativos en un intervalo.  |

*Nota:* Objetivos curriculares de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia a partir del Real Decreto 1467/2007 y el Decreto 23/2009 de la CAPV.

### 5.2.2. Objetivos didácticos

**Tabla N° 7. Objetivos didácticos de la propuesta didáctica.**

| ÁREAS               | OBJETIVOS  |
|---------------------|--|
| <b>Competencias</b> | Entender la naturaleza y partes de las gráficas de las funciones.<br>Aprender a utilizar software matemático para graficar cualquier tipo de función que aparezca en la vida real.<br>Aprender a dibujar correctamente a mano las funciones.   |
| <b>Habilidades</b>  | Entender el concepto de derivada y su aplicación en funciones.<br>Desarrollar sus habilidades informáticas con software dedicado.<br>Desarrollar sus capacidades para interpretar, entender y comunicar funciones a través de sus gráficas.<br>Aplicar lo aprendido en otras ramas de las matemáticas. |

*Nota:* Objetivos didácticos de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia a partir del Real Decreto 1467/2007, el Decreto 23/2009 de la CAPV y el estudio de campo.

### 5.2.3. Competencias que adquieren los alumnos

Tabla Nº 8. Competencias desarrolladas con la propuesta didáctica.

| Competencia  | Cómo se desarrolla  |
|--|---|
| Competencia matemática   | Mediante la adquisición de las nociones de funciones, sus gráficas y las aplicaciones de las derivadas.   |
| Competencia en comunicación lingüística                          | A la hora de desarrollar y explicar en los proyectos la resolución de los problemas y ejercicios.   |
| Tratamiento de la información y competencia digital              | Utilizando el programa GeoGebra, WIRIS o Mathematica y mandando los proyectos por la plataforma Moodle.   |
| Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico | A través de funciones que aparecen en la vida real y resolviendo problemas relativos a las aplicaciones de las derivadas.   |
| Competencia en expresión cultural y artística                    | A través del dibujo de las gráficas y su interpretación.  |
| Competencia social y ciudadana                                   | A través de la interacción con los compañeros a la hora de resolver los proyectos. Aceptando y discutiendo los diferentes puntos de vista.                                |
| Autonomía e iniciativa personal                                  | Mediante las estrategias que elabora el alumno para poder resolver los problemas y a la hora de practicar con el software matemático.                                     |
| Competencia en aprender a aprender                               | Las funciones y la capacidad de entender las gráficas proporcionan al alumno las habilidades para poder reflexionar de manera crítica los contenidos matemáticos futuros. |

*Nota:* Competencias desarrolladas con la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia a partir del Real Decreto 1467/2007.

## 5.3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

### 5.3.1. Distribución de la propuesta didáctica

La propuesta se compone de trece sesiones presenciales de 55 minutos cada una donde se recogerán todos los contenidos de funciones y de derivadas. Seis sesiones se dedican al tema de funciones y cinco al de derivadas.

Para el tema de funciones se dedican seis sesiones. Para el tema de derivadas se dedican cinco sesiones. Una sesión se dedica a realizar un control de conocimientos de los temas de funciones y derivadas. Por último, dos sesiones se utilizan para la corrección y presentación de los trabajos grupales que deberán llevar a cabo paralelamente a las clases magistrales.

A continuación se muestra una tabla donde se resume la distribución de las sesiones:

**Tabla N° 9. Resumen distribución de las sesiones de la propuesta didáctica.**

| <b>Sesión</b>   | <b>Actividad a desarrollar</b>  | <b>TIC</b>  | <b>Justificación de lo que se busca conseguir con la TIC.</b>   |
|---|---|---|---|
| <b>Sesión 1. Introducción a las funciones. Noción de función. Elementos de una función.</b> | Una sesión introductoria donde se presenta el concepto de función. Se muestran ejemplos y aplicaciones en la vida real. Se muestran los elementos de la función y se mandan ejercicios para casa.                               | La PDI como proyector.                              | Que los alumnos conozcan las aplicaciones de las funciones en situaciones cotidianas. Despertar su curiosidad y aumentar su motivación. |
| <b>Sesión 2. Clasificación de funciones. Programas matemáticos.</b>                         | Corrección de ejercicios. Se muestran las diferentes funciones que se van a estudiar y su escritura matemática. Se enseña GeoGebra y Wiris y se les muestra los enlaces para descargarlos.                                      | La PDI con GeoGebra y Wiris.                        | Ofrecer los conocimientos suficientes para que los alumnos puedan desarrollarse con autonomía con los programas GeoGebra y Wiris.       |
| <b>Sesión 3. Límites y continuidad.</b>   | Se enseña cómo se alcanzan los límites, se explican las funciones definidas a trozos. Se mandan ejercicios para casa.   |   |   |
| <b>Sesión 4. Dibujo de funciones.</b>   | Corrección de ejercicios. Se aportan las herramientas para dibujar las funciones: extremos relativos, asíntotas, etc. Se utiliza GeoGebra para graficar una función y aplicar transformaciones. Se mandan ejercicios para casa. | La PDI.   | Que vean e interactúen en tiempo real con las transformaciones que puede sufrir una función.  |
| <b>Sesión 5. Trabajo grupal de funciones.</b>   | Corrección de ejercicios. Explicación del trabajo grupal. Formación de grupos. Tiempo para que se junten y se organicen.  | La PDI con GeoGebra y Wiris y la plataforma Moodle. | Fomentar el trabajo en equipo. Que practiquen con el software matemático. Que solucionen un problema real con funciones.                |
| <b>Sesión 6. Aproximación del concepto de límite de una función en un punto.</b>            | Introducción al tema de derivadas. Noción de límite de una función en un punto. Ejercicios para casa.   |   |   |
| <b>Sesión 7. Aproximación al concepto de derivada.</b>                                      | Corrección de ejercicios. Concepto de derivada de una función en un punto. Ejercicios para casa.  |   |   |
| <b>Sesión 8. Corrección y presentación del trabajo grupal de funciones.</b>                 | Entrega de los trabajos grupales de funciones. Presentación por grupos de los trabajos. 5 minutos por grupo con la PDI  | La PDI.   | Que aprendan y se acostumbren a presentar en grupo un trabajo y que utilicen la PDI en clase. Que utilicen Moodle.                      |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| <b>Sesión 9. Extremos relativos en un intervalo.</b>                            | Corrección de los ejercicios de la clase magistral anterior. Explicación de los extremos relativos. Ejercicios en clase y ejercicios para casa. |   |  |
| <b>Sesión 10. Resolución de problemas</b>                                       | Corrección de ejercicios. Explicación del trabajo grupal. Formación de grupos. Tiempo para que se junten y se organicen.                        | La PDI con GeoGebra y Wiris y la plataforma Moodle. | Fomentar el trabajo en equipo. Que practiquen con el software matemático. Que solucionen un problema real con derivadas. |
| <b>Sesión 11. Repaso de la materia</b>  | Repaso de toda la materia. Resumen de funciones y derivadas.  |   |  |
| <b>Sesión 12. Control del tema de funciones y derivadas.</b>                    | Control de funciones y derivadas  |   | Comprobar su conocimiento y evaluar sus competencias.  |
| <b>Sesión 13. Recogida del trabajo de Resolución de problemas de derivadas.</b> | Entrega de los trabajos grupales de funciones. Presentación por grupos de los trabajos. 5 minutos por grupo con la PDI                          | La PDI.   | Que aprendan y se acostumbren a presentar en grupo un trabajo y que utilicen la PDI en clase. Que utilicen Moodle.       |

*Nota:* Resumen distribución de las sesiones de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

### 5.3.2. Desarrollo de las Funciones

A continuación se muestra el contenido que se enseña en el tema de funciones, una tabla con la metodología que se propone con ejemplos de utilización del programa GeoGebra y la utilización de la PDI en algunos de los apartados.

**Tabla N° 10. Desarrollo de la parte de funciones.**

| CONTENIDO        | QUÉ APRENDER                    | CÓMO APRENDER  |   |
|------------------|---------------------------------|--|---|
| <b>Funciones</b> | Noción de función               | Mediante el dibujo de $f(x)$ y concepto informal.  | Ejemplo: dibujo en GeoGebra a través de la PDI.                   |
|                  | Elementos de una función        | Del dibujo anterior marcar elementos.  | Ejemplo: Diferentes funciones elementales.                        |
|                  | Clasificación                   | Enumeración de los tipos de funciones y mostrar sus gráficas en la PDI.  |   |
|                  | Límites y continuidad           | Mediante la manipulación de funciones en la PDI  | Ejemplo: Construcción de una función a trozos y acercar con zoom. |
|                  | Dibujo de funciones y asíntotas | Mediante el trabajo en grupos de 4 personas que tengan que solucionar un problema de la vida real utilizando el software matemático.   |   |
|                  | Manejo de software              | Ejemplo: Una empresa tiene unas ventas que cumple una función $f(x)$ , y sus gastos responden a otra $g(x)$ , encuentra el punto de máximo beneficio, punto de pérdidas, cómo es la tendencia, dibuja sus recorridos, etc. |   |

*Nota:* Desarrollo de la parte de funciones. Fuente: Elaboración propia.

Se incluye el concepto informal de función y sus elementos usando gráficas en la PDI con el software matemático GeoGebra: Aprender funciones simples dibujando con los programas en la PDI, se clasifican y se van mostrando las diferentes partes, dominio, recorrido, cortes con los ejes, crecimiento, decrecimiento.

Se debe explicar que una función es una máquina que transforma números: “Yo le doy un número y ella me devuelve un único valor”.

Se denota por:  $y=f(x)$ ;  $y=g(x)$ ;  $y=h(x)$

El dominio de la función está indicado en el eje horizontal  $x$ .

El recorrido de la función está indicado en el eje vertical  $y$ .

Supongamos que le damos a la función  $y=f(x)$  el número  $k$ . La función nos devuelve  $f(k)$ . Decimos que  $f(k)$  es la imagen de  $k$  por la función  $f$ .

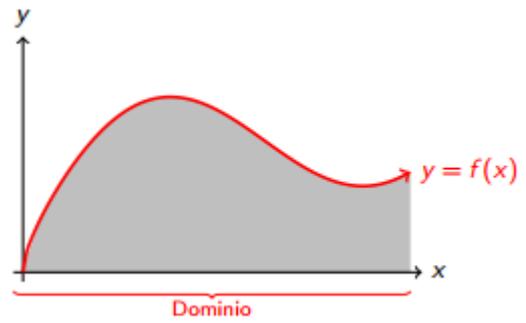
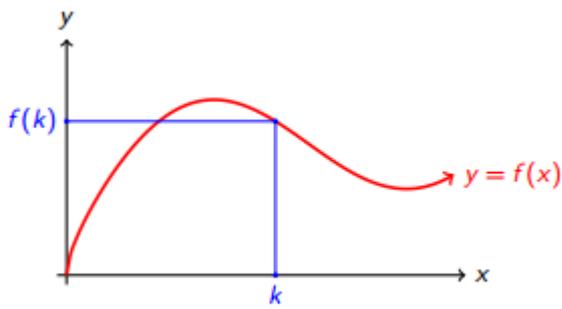


Gráfico N° 11. Dibujo de  $f(x)$ . Fuente: Soto (2010, p. 1). Gráfico N° 12. Dominio de  $f(x)$ . Fuente: Soto (2010, p. 2).

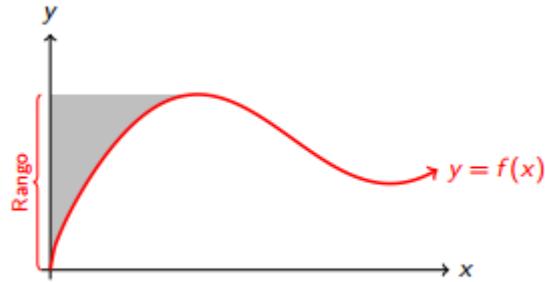


Gráfico N° 13. Rango o recorrido de  $f(x)$ . Fuente: Soto (2010, p.3).

Se deben aportar las pautas para dibujar las funciones correctamente a mano, pero el soporte de los programas informáticos debe ser una constante para la comprobación precisa de las mismas.

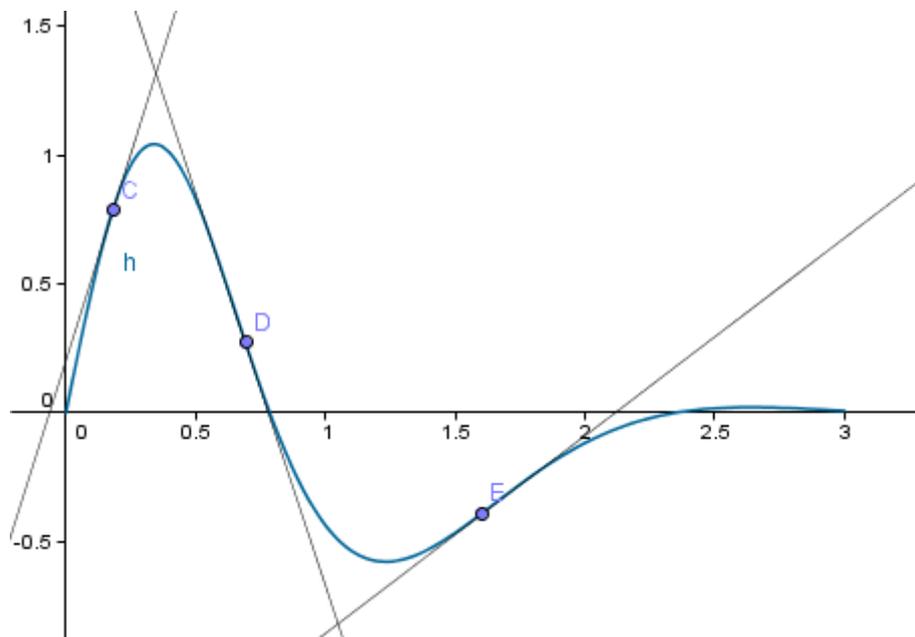


Gráfico N° 14. Ejemplo en GeoGebra para el estudio del crecimiento, decrecimiento, cortes con ejes y tendencia. Fuente: Elaboración propia.

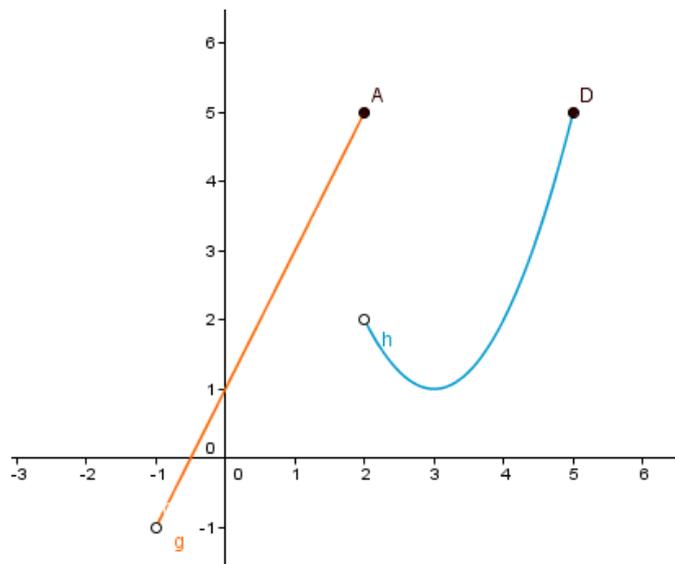


Gráfico N° 15. Ejemplo en GeoGebra para explicar límites en un punto y discontinuidades.  
Fuente: Elaboración propia.

### 5.3.3. Desarrollo de las Derivadas

En este apartado se presenta el contenido que se enseña en el tema de derivadas, una tabla con la metodología que se propone con ejemplos de utilización del programa GeoGebra y la utilización de la PDI en algunos apartados.

**Tabla N° 11. Desarrollo de la parte de la derivada.**

| CONTENIDO | QUÉ APRENDER   | CÓMO APRENDER  |   |
|-----------|--|--|---|
| Derivadas | Aproximación al concepto de límite de una función en un punto. | Tasa de variación media. Definición formal de límite. Regla de la cadena.  | Ejemplos de funciones a trozos en GeoGebra y aproximaciones por ambos lados de la discontinuidad. |
|           | Aproximación al concepto de derivada.                          | Concepto de pendiente y tangente en un punto.  | Dibujar la tangente de funciones en la PDI.   |
|           | Extremos relativos en un intervalo.                            | Calculando derivadas en los extremos: máx y mín  | Dibujo de las funciones derivada superpuestas a la función principal.                             |
|           | Resolución de problemas  | Se manda un proyecto como en el anterior tema para resolver entre cuatro y que lo manden por Moodle para que lo expliquen en clase a través de la PDI. |   |

*Nota:* Desarrollo de la parte de la derivada. Fuente: Elaboración propia.

La explicación de la derivada debe realizarse gráficamente por ser un concepto complicado de asimilar por el alumno. Se empieza por enseñar el límite de una función en un punto y se continúa con el concepto de pendiente y tangente en un punto.

Los problemas que se resuelven con derivadas y sus derivadas segundas deben hacerse también con gráficos dinámicos para que vean qué ocurre (se maximiza o minimiza el área, el volumen, etc.) cuando se encuentran los extremos relativos.

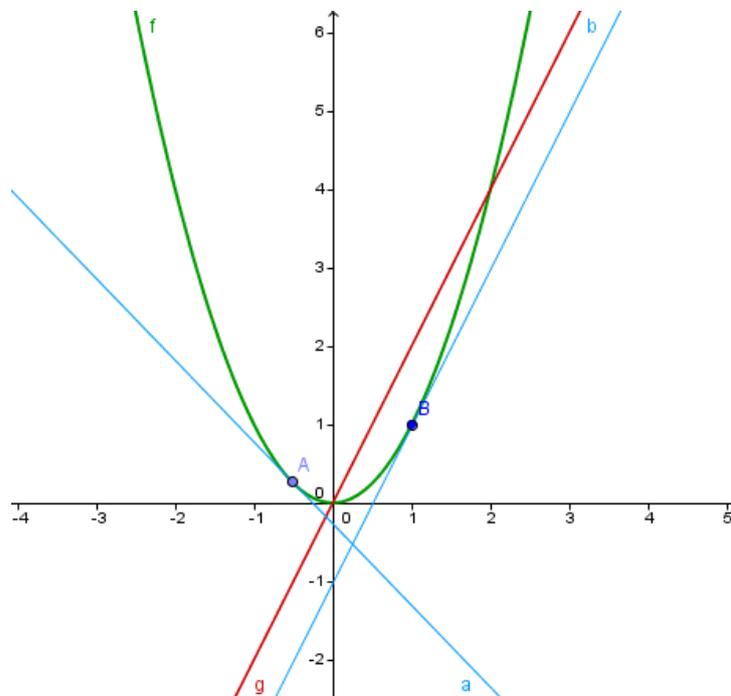


Gráfico N° 16. Ejemplo en GeoGebra de función  $f(x)$  con su función derivada  $g(x)=f'(x)$  y rectas pendiente en dos puntos A y B. Fuente: Elaboración propia.

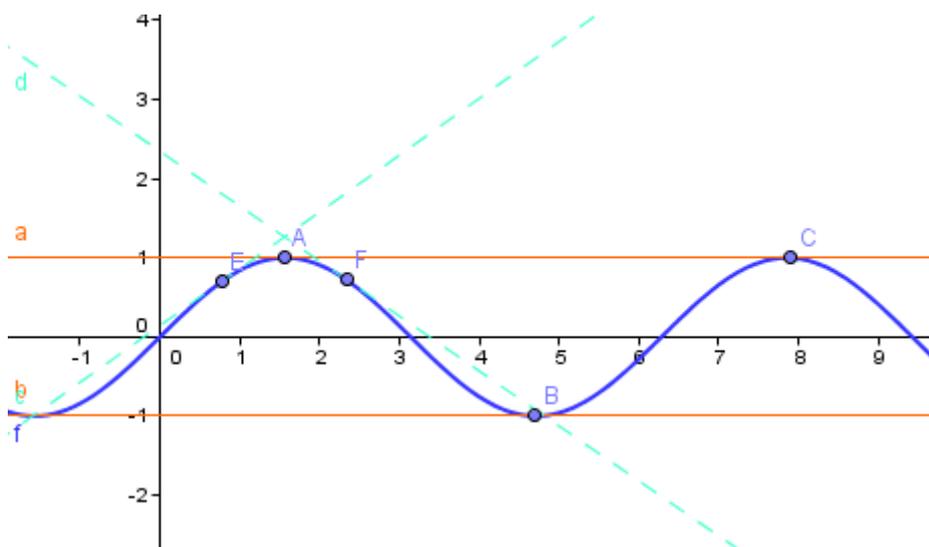


Gráfico N° 17. Ejemplo en GeoGebra de extremos relativos y lo que sucede en el punto, a su derecha y a su izquierda. Fuente: Elaboración propia.

### 5.3.4. Ejemplo de la sesión de trabajo en equipo en funciones

Se presenta una situación que deberá resolver el equipo de dirección de una clínica privada en Madrid.

“La empresa Bisalud S.L. de Madrid pretende abrir una clínica en el barrio de Chamartín. Antes de abrirla llevan a cabo un estudio en las clínicas cercanas para conocer la afluencia de enfermos y poder acertar mejor con la capacidad del centro y los gastos derivados. Se sabe que el número mínimo de camas necesarias para construirlo es de 120. El coste de fabricación de la clínica obedece al número de camas y, después de pedir presupuestos, una constructora les ha dado lo siguiente:

El coste responde a esta función:  $f(x) = \log(7x)$ .

El Beneficio responde a la función:  $h(x) = x/2$  y el gasto por:  $t(x) = 3x^2 / 70$

La demanda de camas responde a la siguiente:  $g(x) = 10e^{(-x/6)} + 7$ .

Se necesita que:

- Se dibujen las gráficas y se encuentren los puntos de intersección.
- Se decida el número de camas que se van a realizar y por qué.
- El precio final de la clínica y cuándo se empieza a tener beneficios.
- Cómo quedará la demanda de habitaciones y el número de pacientes que se quedarán sin poder ser atendidos.

Los ejes estarán en unidades de 10. El ejercicio se hará en grupos de 4 personas”.

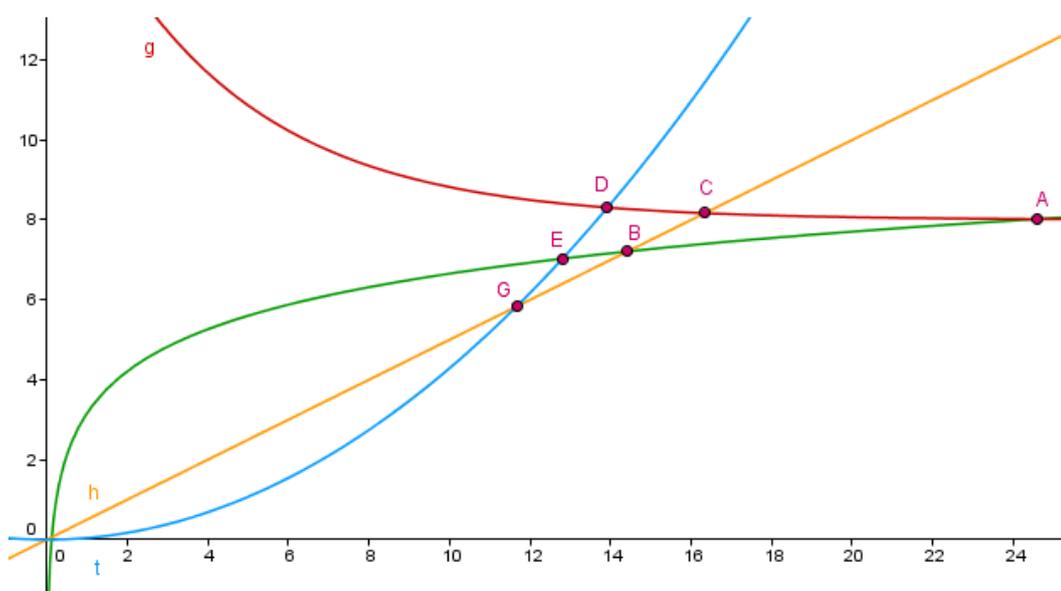


Gráfico N° 18. Funciones con GeoGebra del problema. Fuente: Elaboración propia.

El día de la presentación cada grupo deberá haber mandado la solución en formato Word las respuestas con el archivo de GeoGebra adjunto. Además se presentará en 5 minutos su decisión argumentado gastos y explicando la decisión que tomaron en grupo.

La evaluación será como se muestra a continuación:

**Tabla N° 12. Evaluación del trabajo grupal de funciones.**

| EVALUACIÓN                          | QUÉ EVALUAR  | CÓMO EVALUAR  |     |
|-------------------------------------|--|---|-----|
| <b>Funciones, trabajo en grupo.</b> | Dibujo de las gráficas y los puntos de intersección      | Han dibujado con exactitud las funciones y encontrado los puntos de intersección.<br>La presentación es correcta.       | 40% |
|                                     | Exactitud de los datos. Justificación de los resultados. | Justifican razonadamente el número de camas que han elegido. Los datos que dan del gasto y de la demanda son correctos. | 40% |
|                                     | Presentación grupal y trabajo en equipo.                 | Todos hablan en la presentación.<br>El trabajo ha sido grupal.  | 20% |

*Nota:* Evaluación del trabajo grupal de funciones. Fuente: Elaboración propia.

---

## 6. APORTACIONES DEL TRABAJO

La principal aportación del trabajo ha sido una metodología didáctica para enseñar el bloque de funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato, basada en el software matemático a través de la pizarra digital interactiva basándose en las principales dificultades reflejadas en el trabajo de campo. Además de ésta, se ha reflejado que la PDI puede ofrecer beneficios a los alumnos a la hora de aprender el tema de funciones de 1º de Bachillerato.

Además de éstas, han sido otras las aportaciones del trabajo como reflejar la realidad tanto de penetración como de uso en las aulas de una herramienta educativa aún por desarrollar para alumnos y profesores, enseñar los problemas a los que se enfrentan tanto alumnos como profesores en el tema de funciones y se han aportado ejercicios y ejemplos para enseñar los conceptos que más dificultades conllevan según el estudio de campo.

Por último, se recogen también las conclusiones y las sugerencias proporcionadas por profesores y alumnos que ayuden a los primeros con diversos problemas en el uso de esta TIC.

---

## 7. DISCUSIÓN

Después de realizar el estudio bibliográfico y el estudio de campo se observa cómo los profesores no solo están dispuestos a utilizar la PDI sino que algunos ya lo han hecho, siempre como iniciativa propia y quitándose tiempo formándose de forma autodidacta.

Existen diversos aspectos que deberían cambiarse para que la PDI no pase de ser una moda pasajera o una TIC que no termine de calar en los profesores. Tal y como mencionan Glover, Miller, Averis y Door (2007) los profesores no son conscientes del potencial del correcto uso de la PDI en matemáticas y además no son formados para que ello suceda. El principal problema encontrado tras el estudio de campo es que, para empezar, centros de prestigio como Santa María Marianistas o Miguel de Unamuno no tienen la TIC en todas las aulas y, además, no disponen de cursos de formación para su uso.

Las necesidades educativas actuales han cambiado así como cambia la sociedad y las futuras competencias que necesitarán los alumnos para desempeñar un trabajo. Por ello, como expone Gerver (2010): “los alumnos deben desarrollar destrezas informáticas que les equie para los desafíos del futuro” (p. 18).

Algunos de los profesores conocen programas como GeoGebra o Wiris y han entregado a sus alumnos los links para que puedan descargarlo en casa, pero la falta de tiempo por la cantidad de contenido que tienen que impartir en cada curso ha impedido que pudieran explicar bien cómo utilizarlo y las ventajas de hacerlo. Las declaraciones tanto de alumnos como de profesores lo corroboran. Si la competencia para el tratamiento de la información y competencia digital se quiere formar, debemos incluirla en el temario dejando de lado aquellos contenidos que no sean de rigurosa necesidad para una completa formación matemática.

La aplicación de la PDI en las aulas para enseñar funciones no solo permitirá a los alumnos entender mejor la asignatura, sino que les ofrecerá la posibilidad de conocer y utilizar el ordenador con programas útiles.

---

## 8. CONCLUSIONES

Las conclusiones que se obtienen en cada uno de los objetivos son las que se muestran a continuación:

- I) El principal objetivo *Presentar una metodología didáctica para enseñar el bloque de funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato, basada en el software matemático a través de la pizarra digital interactiva* se ha cumplido al realizar una propuesta que incluye soluciones a los apartados de gráficas de funciones y de derivadas. Se incluye la distribución de las sesiones con las actividades y la justificación de los que se propone con el uso de la PDI. Se aportan ejercicios y ejemplos de utilización de software a través de la PDI así como proyectos en ambos apartados para que los alumnos trabajen en equipo e interactúen con la PDI presentando sus soluciones. Por lo tanto, se considera que el objetivo se ha cumplido en el trabajo.
- II) En cuanto al objetivo *Averiguar y exponer las principales características y ventajas de la utilización de la pizarra digital como herramienta didáctica en el bloque de funciones de 1º de Bachillerato* se ha hecho un trabajo con dos vertientes: una búsqueda bibliográfica con textos donde se explican esas ventajas y la necesidad de iniciar a los alumnos en el uso de herramientas digitales; y un trabajo de campo en los centros educativos Santa María Marianistas y Miguel de Unamuno de Vitoria-Gasteiz donde docentes y alumnos exponen sus puntos de vista con respecto a la PDI. Los docentes destacan su uso y su efectividad. Los alumnos que haría más atractiva la asignatura y que recomendarían utilizarla. De todo ello se concluye que la PDI es una herramienta efectiva en la tarea educativa de nuestros docentes hoy en día. Por lo tanto se considera que el objetivo se ha logrado.
- III) En lo relativo al objetivo *Recopilar experiencias de profesores relativas al uso de la PDI* que se llevó a cabo con el estudio de campo se concluye que aquellos que han utilizado la PDI fueron aquellos que quisieron hacerlo por su cuenta, formándose ellos mismos. No todas las aulas disponen de esta TIC. El uso de la TIC ayuda en la precisión de las gráficas y en que los alumnos pueden comprobar si lo están haciendo bien directamente en casa. Es una forma más atractiva de explicar y tiene la ventaja de poder guardar las

---

clases impartidas. Argumentan que aunque al principio el impacto es positivo, con el tiempo los alumnos vuelven a relajarse, por lo que debe hacerse una reflexión más profunda sobre la metodología de la PDI y la forma de motivar a los alumnos en aprender. Es por esto que se considera que el objetivo se ha logrado.

IV) En cuanto al objetivo *Indagar y explicar las principales dificultades que enfrentan los alumnos relativas a la hora de graficar funciones estudiadas en 1º de Bachillerato* se ha llevado a cabo el mismo trabajo anteriormente citado. De los resultados se concluye que los alumnos sí tienen dificultades a la hora de graficar bien las funciones con sus asíntotas, extremos relativos, tendencias al límite y funciones definidas a trozos. Los alumnos argumentan que la dificultad al dibujar se debe a la imprecisión de la pizarra tradicional. Sin embargo, es un problema de segundo orden, ya que el problema principal es la noción de derivada. Los profesores sí concluyen que la precisión de las gráficas es el error más común. Por esto se considera que el objetivo se ha logrado.

V) En cuanto al objetivo *Estudiar y discutir la eficacia real de una metodología que incluya software matemático interactivo para ayudar, a través de la Pizarra Digital Interactiva, a superar las dificultades anteriormente mencionadas* se ha llevado a cabo un trabajo fundamentalmente de campo con las respuestas a los cuestionarios de alumnos y docentes y con entrevistas en profundidad a docentes. Se desprende que es una propuesta plausible y posiblemente efectiva para que los alumnos mejoren su comprensión a la hora de dibujar funciones. Pero para que la enseñanza con la PDI sea efectiva los docentes necesitan formación específica. Por eso se puede considerar el objetivo cumplido.

---

## 9. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Cualquier trabajo que se pretenda realizar está sujeto a limitaciones. Limitaciones que suponen decisiones por parte de quienes realizan el trabajo. Aparecen hipótesis a considerar que no pueden abordarse en el trabajo. Intentar hacerlo sería un error muy grande.

En el presente trabajo cabe dejar constancia de las siguientes limitaciones:

- a. Aunque la PDI se puede aplicar en todas las unidades didácticas tanto del temario de ESO como del temario de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, por falta de tiempo no se ha podido abarcar todo el currículo, por lo que se ha optado por el tema de funciones en esta última etapa educativa.
- b. La propuesta didáctica que se propone sólo contiene un elenco de ejemplos muy reducido y se muestra únicamente un ejemplo de sesión grupal con la PDI, donde los alumnos interactúan con ella y presentan sus trabajos. Podrían introducirse más, pero serían objeto de un estudio exhaustivo que estuviera centrado en esta propuesta. Pero el trabajo ha querido fundamentar la importancia de la PDI y su posibilidad de utilización positiva.
- c. No se ha realizado una prueba piloto de la propuesta que se presenta. Se trata de una propuesta teórica que, aunque respaldada por alumnos y profesores, proporcionaría una valoración añadida si se llevara a cabo.

---

## 10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Las líneas de investigación futuras deben pasar por un intento de ver cómo hacer que los profesores quieran y puedan impartir la asignatura de matemáticas utilizando las TIC actuales, por la búsqueda de cursos que formaran a profesores que tienen aversión a la tecnología y a atreverse a realizar el esfuerzo de una formación continua en estas herramientas.

Sin duda sería interesante investigar la utilización de la PDI para impartir otras asignaturas desde los primeros cursos de Secundaria. Algunos bloques como el de Geometría son muy adecuados para su uso por ser una asignatura totalmente visual y donde los ejemplos en la naturaleza y en la arquitectura aparecen continuamente y permiten establecer una conexión entre las matemáticas y la vida real, motivando la iniciativa de los alumnos.

Aplicando esta metodología propuesta en las aulas se puede comprobar su efectividad y, con el tiempo, podríamos encontrar nuevas alternativas o caminos para hacer de su uso algo positivo para los alumnos. Además esto permite aplicar los consejos de los alumnos para mejorar la experiencia de uso del software así como incluir la posibilidad de modificar la PDI incluyendo control remoto desde el sitio del alumno para agilizar la interactividad.

Otra de las líneas de investigación podría ser la de la adecuación de la PDI al área de diversidad curricular, donde pudieran desarrollar sus competencias digital y matemática, posibilitando que la interactividad sea real y no que se utilice como un proyector convencional, desarrollar programas dedicados a la diversidad y aplicar métodos de enseñanza originales.

---

## 11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### 11.1. REFERENCIAS

Aguerrondo, I. (2009). Conocimiento complejo y competencias educativas. *IBE Working Papers on Curriculum Issues N° 8*. Recuperado el 15 de mayo de 2014. Disponible en: [http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user\\_upload/Publications/Working\\_Papers/knowledge\\_compet\\_ibewpci\\_8.pdf](http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/Working_Papers/knowledge_compet_ibewpci_8.pdf)

Arce, M. y Ortega, T. (2013). *Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato*. Trabajo no publicado. Universidad de Valladolid, España. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: [http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/29576/1/2\\_Deficiencias.pdf](http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/29576/1/2_Deficiencias.pdf)

Arranz, J.M., Losada, R., Mora, J.A., Sada, M. (2009). Realidades de GeoGebra. *MSQ Connections*, 9, 2. Recuperado el 15 de mayo de 2014 de: <http://www.GeoGebra.es/pub/Realidades%20de%20GeoGebra.pdf>

Ballester Sampedro, S. (2009). Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. *Innovación y experiencias educativas 23*. Recuperado el 14 de mayo de 2014 de: [http://www.csic.es/andalucia/modules/mod\\_ense/revista/pdf/Numero\\_23/SERGIO\\_BALLESTER\\_SAMPEDRO01.pdf](http://www.csic.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_23/SERGIO_BALLESTER_SAMPEDRO01.pdf)

Ceballos, M., Núñez, J. y Rodríguez, M.L. (2012). ¿Se puede mejorar la Enseñanza Matemática en Cualquiera de sus Niveles? *Revista Pensamiento Matemático*, 2(2), 45-54. Recuperado el 14 de mayo de 2014 de: [http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/maticas/revistapm/revista\\_impresa/vol\\_II\\_num\\_2/exp\\_doc\\_4\\_mej\\_ense.pdf](http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/maticas/revistapm/revista_impresa/vol_II_num_2/exp_doc_4_mej_ense.pdf)

Cosano Rivas, F. (2006). *La plataforma de aprendizaje Moodle como instrumento para el Trabajo Social en el contexto del Espacio Europeo de Educación Superior*. Trabajo no publicado. Universidad de Málaga. Recuperado el 12 de mayo de 2014 de: <file:///C:/Users/Asus/Downloads/Dialnet-LaPlataformaDeAprendizajeMoodleComoInstrumentoPara-2002365.pdf>

Cornacchione, A.M. (2001). *Gráficos en el plano y el espacio*. Trabajo no publicado. Recuperado el 5 de mayo de 2014 de: <http://www.ceiucaweb.com.ar/documentos/1-ciclo-basico/1er-anio-2do-cuatri/calculo-avanzado/apunte/Calvo/Graficando%2520con%2520Mathematica.pdf>

Decreto 174/2012, de 11 de septiembre, por el que se aprueba el Modelo de Madurez Tecnológica de Centro Educativo (Madurez TIC) y se establecen las certificaciones y sellos acreditativos de los diferentes niveles de madurez de los centros educativos. Boletín Oficial del País Vasco (28 de septiembre de 2012), núm. 190, pp. 1-13.

---

Decreto 23/2009, de 3 de febrero, por el que se establece el currículo de Bachillerato y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Boletín Oficial del País Vasco (27 febrero 2009), núm. 41, pp. 1-606.

Díaz, E. (2012, Enero 25). Decálogo de la PDI. *Metodología en el uso de las TIC (PDI)*. Consultado el 20 de abril de 2014. Disponible en: <http://edugital.blogspot.com.es/2012/01/metodologia-en-el-uso-de-las-tics-pdi.html>

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013, noviembre 6). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *CEMACYC*. Recuperado el 1 de junio de 2014 de: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf>

Duval, R. (1993). Sémosis et Noésis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Espina Brito, P. (2006). GeoGebra. *Números*, 64, 1-6. Recuperado el 7 de mayo de 2014 de: [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas\\_o3.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas_o3.pdf)

García Domingo, B. y Quintanal Díaz, J. (2010). Métodos de Investigación y Diagnóstico en la Educación. *MIDE*. Disponible en: <http://brayeban.aprenderapensar.net/files/2010/10/TECNICAS-DE-INVEST.pdf>

Gerver, R. (2010). *Crear hoy la escuela del mañana*. Consultado el 15 de mayo de 2014. Disponible en: [http://innovacioneducativa-sm.aprenderapensar.net/files/2012/05/139934\\_Crear-hoy-la-escuela-del-ma%C3%B1ana2.pdf](http://innovacioneducativa-sm.aprenderapensar.net/files/2012/05/139934_Crear-hoy-la-escuela-del-ma%C3%B1ana2.pdf)

Gómez, S. (2012, Noviembre 5). *Introducción a la PDI en 10 pasos*. Observatorio tecnológico NIPO. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: <http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/es/equipamiento-tecnologico/aulas-digitales/1071-introduccion-a-la-pdi-en-10-pasos>

Glover, D., Miller, D., Averis, D. y Door, V. (2007). The evolution of an effective pedagogy for teachers using the interactive whiteboard in mathematics and modern languages: an empirical analysis from the secondary sector. *Taylor and Francis Online*, 32, 5-20. Recuperado el 5 de mayo de 2014 de: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17439880601141146#preview>

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial de las Cortes Generales (24 mayo 2013), núm. 48-1, pp. 1-53. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, 4, 167-179. Recuperado el 7 de mayo de 2014 de: <http://uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/viewFile/610/932>

---

Lowre, T. y Diezmann, C. M. (2007). *Middle School Students' Interpretation of Graphing Tasks: Difficulties within a Graphical Language*. Trabajo no publicado. Universidad de Australia. Recuperado el 5 de mayo de 2014 de: [http://www.csu.edu.au/research/glim/downloads/TL\\_CD\\_EARCOME4.pdf](http://www.csu.edu.au/research/glim/downloads/TL_CD_EARCOME4.pdf)

Monteiro, C. y Ainley, J. (2003). *Interpretation of graphs: Reading through the data*. Trabajo no publicado. Universidad de Warwick, Mathematics Education Research Centre. Recuperado el 21 de abril de 2014 de: <https://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip23-3/BSRLM-IP-23-3-6.pdf>

Noda Herrera, A. (2009). Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 72, 121-127. Disponible en: [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/72/Enlared\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/72/Enlared_01.pdf)

OCDE/PISA (2012). *PISA 2012. Programa para la evaluación Internacional de los Alumnos*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Disponible en: [http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumen\\_i.pdf?documentId=0901e72b81786310](http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumen_i.pdf?documentId=0901e72b81786310)

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Boletín Oficial del Estado (6 noviembre 2007), núm. 266, pp. 45381-45477.

Rojo, S. (2012, Octubre 29). Cono de aprendizaje de Edgar Dale. *Cuaderno del maestro*. [En línea]. Español. Disponible en: <http://cuadernodelmaestro.blogspot.com.es/2012/10/cono-de-aprendizaje-de-edgar-dale.html> [2014, Mayo 12].

Rommy Noboa, S. (1996). *La educación de la inteligencia y la voluntad un reto al sistema educativo (II)*. Plan amanecer. Disponible en: [http://www.planamanecer.com/recursos/docente/bachillerato/articulos\\_pedagogicos/mayo/formacion\\_virtudes\\_ii.pdf](http://www.planamanecer.com/recursos/docente/bachillerato/articulos_pedagogicos/mayo/formacion_virtudes_ii.pdf)

Soto Apolinar, E. (2010, Octubre). *Funciones*. Aprende Matemáticas. Recuperado el 20 de mayo de 2014 de: <http://www.aprendematematicas.org.mx/previo/tutoriales/graficacion.html>

Tall, D. (1992, Agosto). *Students' Difficulties in Calculus*. Trabajo no publicado. Universidad de Warwick. Recuperado el 5 de mayo de 2014 de: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf>

Tall, D. (1997). *Functions and Calculus*. Trabajo no publicado. Universidad de Warwick, Mathematics Education Research Centre. Disponible en: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.207&rep=rep1&type=pdf>

Ugalde, W.J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, 14, 1-47. Disponible en: <http://www.tec->

## **11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA**

Badillo, E. R. (2004). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física"*. Recuperado el 23 de abril de 2014 de: <http://www.tdx.cat/handle/10803/4702>

Goñi, J. M. (coord.) (2011). *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Editorial Graó.

Lacasta, E. y Pascual, J. R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Ortega, T. (1998). *Algunos apuntes sobre el uso de gráficas cartesianas*. Trabajo no publicado. Universidad de Valladolid. Recuperado el 5 de mayo de 2014 de: <file:///C:/Users/Asus/Downloads/Dialnet-AlgunosApuntesSobreElUsoDeGraficasCartesianas-2729339.pdf>

---

## 11. ANEXOS

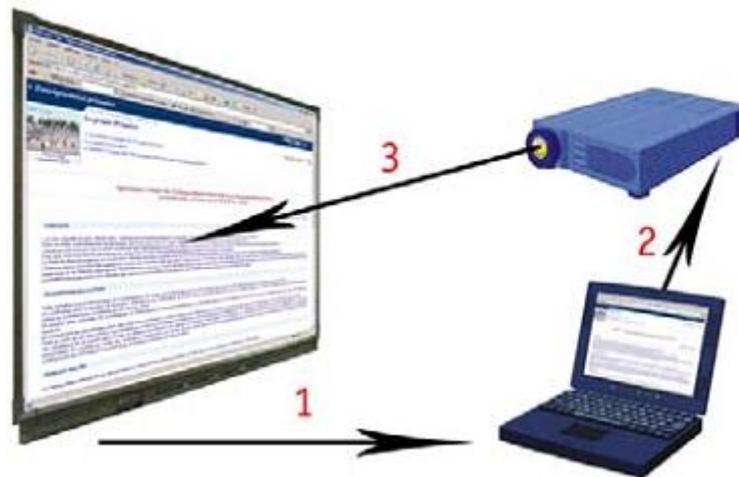
### ANEXO I

Se presenta el texto y el diagrama informativo sobre la Pizarra Digital Interactiva para aquellos encuestados que no la conocieran.

#### TEXTO INFORMATIVO SOBRE LA PDI

La Pizarra Digital Interactiva consiste en un ordenador conectado a un vídeo proyector, que muestra la señal de dicho ordenador sobre una superficie lisa y rígida, sensible al tacto o no que se puede controlar desde el ordenador o directamente hacer anotaciones manuscritas sobre cualquier imagen proyectada.

(Se muestra la imagen al entrevistado).



*Ilustración N° 2.* Diagrama de una Pizarra Digital Interactiva. Fuente: Pizarra digital interactiva en aulas matemáticas (Noda, 2009).

---

## ANEXO II

Encuesta a alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

### Encuesta Funciones alumnos

#### 1. Indique su nombre y modalidad de Bachillerato

#### 2. ¿Conoce usted la Pizarra Digital Interactiva?

Sí.

No. Leer el texto "Descripción de PDI" y saltar a la pregunta 5.

#### 3. ¿Utiliza alguno de sus profesores la Pizarra Digital Interactiva?

Sí.

No. Saltar a la pregunta 5.

#### 4. ¿En qué asignaturas han utilizado la PDI?

Ciencias para el mundo contemporáneo

Educación física

Lengua castellana y literatura

Euskera

Inglés

Matemáticas (Si no la marca, saltar a la pregunta 6)

Física

Dibujo técnico

Química

Biología

Otro (especifique)

#### 5. Centrándonos en la asignatura de matemáticas ¿Le ha parecido útil la PDI?

Sí ¿Por qué? \_\_\_\_\_

No ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

**¿Podría valorar su conformidad con los siguientes aspectos de la PDI en matemáticas?**

|   | Nada de acuerdo | Algo de acuerdo | Bastante de acuerdo | Muy de acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|-----------------|-----------------|---------------------|----------------|-----------------------|
| Permite una interactividad eficaz con el alumno |                 |                 |                     |                |                       |
| LA PDI hace más atractiva la asignatura         |                 |                 |                     |                |                       |
| La PDI hace más fácil el aprendizaje            |                 |                 |                     |                |                       |
| Recomendaría utilizarla                         |                 |                 |                     |                |                       |

**6. Centrándonos en el tema de funciones y gráficas, ¿Podría señalar en qué puntos tuvo más dificultades?**

- Dominio, recorrido y extremos de una función.
- Operaciones y composición de funciones.
- El concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.
- Dibujo de gráficas de funciones.
- El concepto de derivada de una función.

**7. A continuación se le mostrará una propuesta educativa relacionada con la PDI para que dé su opinión al respecto:**

**A través de la PDI se pretende construir gráficas de funciones mediante programas matemáticos para que los alumnos, interactuando con los programas, aprendan a dibujar mejor las gráficas.**

**¿Qué opinión le merece la propuesta?**

## ANEXO III

Encuesta a docentes de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

### Encuesta funciones docentes

1. Indique su nombre y especifique cuántos años lleva impartiendo la asignatura.

2. ¿Conoce usted la Pizarra Digital Interactiva?

Si.

No. Leer el texto "Descripción de PDI".

3. ¿Podría dar su opinión valorada acerca de los siguientes aspectos de la PDI?  
(Si en la pregunta anterior ha dicho no, después saltar a la pregunta 7.)

|   | Nada de acuerdo | Algo de acuerdo | Bastante de acuerdo | Muy de acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|-----------------|-----------------|---------------------|----------------|-----------------------|
| La PDI es una herramienta útil                    |                 |                 |                     |                |                       |
| La PDI facilita la labor al profesor              |                 |                 |                     |                |                       |
| Es necesaria una formación específica para su uso |                 |                 |                     |                |                       |
| Debe aplicarse en matemáticas                     |                 |                 |                     |                |                       |
| La PDI hace que el alumno esté más atento         |                 |                 |                     |                |                       |

4. ¿Ha utilizado la Pizarra Digital Interactiva para impartir alguna unidad didáctica?

Si. ¿En cuál/es?

No. ¿Por qué no?

Si contesta no, saltar a la pregunta 6.

5. ¿Podría expresar su satisfacción con su experiencia en la enseñanza con la PDI?

|  | NADA | POCO | BASTANTE | MUCHO | TOTALMENTE |
|--|------|------|----------|-------|------------|
| Facilidad de uso                       |      |      |          |       |            |
| Capacidad de interacción con el alumno |      |      |          |       |            |
| Efectividad en la enseñanza            |      |      |          |       |            |
| Atracción para el alumno               |      |      |          |       |            |

6. ¿Podría indicar para enseñar qué contenidos la ha utilizado?

\*

\*  
\*

¿Podría expresar su satisfacción con los siguientes aspectos?

|  | NADA | POCO | BASTANTE | MUCHO | TOTALMENTE |
|--|------|------|----------|-------|------------|
| Capacidad de Interacción con el alumno |      |      |          |       |            |
| Efectividad en la enseñanza            |      |      |          |       |            |
| Atracción para el alumno               |      |      |          |       |            |

**7. Centrándonos en el tema de las funciones de 1º de bachillerato. Indique cual o cuales son los principales errores que comenten los alumnos.**

No saben calcular el límite de una función en un punto

No saben calcular intuitivamente el límite de una función en el infinito

Calculan y dibujan erróneamente asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Dibujan las gráficas de las funciones sin la debida precisión

Equivocan la continuidad de una función

Otro (especifique)

**8. A continuación se le mostrará una propuesta educativa relacionada con la PDI para que dé su opinión al respecto:**

**A través de la PDI se pretende construir gráficas de funciones mediante programas matemáticos para que los alumnos, interactuando con los programas, aprendan a dibujar mejor las gráficas.**

¿Qué opinión le merece la propuesta?

**9. Por último nos gustaría saber su opinión acerca de cómo podríamos utilizar la PDI para mejorar la práctica docente.**