



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

---

# Resolución de problemas matemáticos en alumnos de 1º de Primaria.

---

Trabajo fin de grado presentado por:

José Manuel Villagrassa Berenguer

Titulación:

Grado de maestro en Educación Primaria

Línea de investigación:

Investigación

Director/a:

Sandra Garcet Rodríguez

Ciudad: Zaragoza, 15 de julio de 2014

Firmado por:

CATEGORÍA TESAURO: 1.1.8 Métodos pedagógicos.

## RESUMEN

El presente trabajo presenta un recorrido o investigación sobre algunos de los muchos estudios que existen en cuanto al tratamiento de la resolución de problemas en el primer ciclo, con el fin de que los aprendizajes que se les transmitan a los alumnos ya en esas edades, los puedan extraer más adelante para resolver problemas que se les presenten en la vida diaria.

Se inicia con una visión del papel de la resolución de problemas dentro del currículo, también se analiza el desarrollo psicológico de los alumnos en esas edades, y se define los tipos de problemas que se dan y las posibles dificultades que pueden presentar.

A la hora de estudiar metodologías y estrategias, se realiza un recorrido por las técnicas utilizadas en distintas épocas y corrientes, también se analizan varios de los más importantes matemáticos españoles que han trabajado en este asunto, y para finalizar se amplía estudiando algunos de los estudios llevados a cabo en otros países y en otras culturas.

**PALABRAS CLAVE:** Resolución de problemas, primaria, matemáticas, estrategias metodológicas, estudios/investigaciones.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	4
1.1. JUSTIFICACIÓN.....	4
1.2. OBJETIVOS.....	5
1.2.1. General .....	5
1.2.2. Específicos .....	5
1.3. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA .....	7
2. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1. RESOLUCIÓN PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO .....	9
2.2. EVOLUCIÓN PSICOPEDAGÓGICA DE LOS ALUMNOS .....	11
2.3. DEFINICIÓN DE PROBLEMA .....	12
2.4. TIPOS DE PROBLEMAS Y CLASIFICACIÓN .....	12
2.5. FASES DE RESOLUCIÓN .....	14
2.6. DIFICULTADES QUE PUEDEN ENCONTRAR .....	15
3. MARCO EMPÍRICO .....	17
3.1. ESTRATEGIAS Y METODOLOGÍAS DE RESOLUCIÓN .....	17
3.1.1. En distintas épocas y corrientes .....	17
3.1.2. En España .....	22
3.1.3. En otros países .....	27
4. CONCLUSIONES .....	34
5. LIMITACIONES Y PROSPECTIVA .....	37
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	39

## 1. INTRODUCCIÓN

“La formulación de un problema, es más importante que su solución”

Albert Einstein (1879-1955)

### 1.1 JUSTIFICACIÓN

He decidido realizar el TFG sobre la resolución de problemas de Matemáticas en el primer ciclo de Primaria, porque es uno de los aspectos que he observado durante este curso que son más complicados de trabajar cuando te enfrentas a una clase heterogénea en cuanto a desarrollo cognitivo.

Actualmente estoy impartiendo la asignatura de Matemáticas en el primer curso de la etapa de educación primaria en un colegio público de Zaragoza, y veo a diario, que alumnos que realizan operaciones de cálculo con facilidad, o realizan con éxito ejercicios de transformación de unidades a decenas y al contrario, cuando tienen delante problemas, aparentemente sencillos para ellos a pesar de su corta edad, les supone unas dificultades enormes su resolución.

También en el Centro, estamos desarrollando en estos momentos a nivel de Ciclo, un Plan de mejora para la resolución de problemas matemáticos dadas las dificultades observadas en años anteriores, por lo que un estudio de las diferentes metodologías en cuanto a la resolución de problemas, me permitirá en la medida de lo posible aplicarlo inmediatamente en nuestro Plan de mejora.

La importancia de aportarles en este primer ciclo unas estrategias adecuadas para resolver los problemas les va a ser muy importante para cursos posteriores cuando la dificultad de éstos aumente. He tenido la oportunidad de impartir la asignatura de Matemáticas en otros niveles, y los alumnos que contaban con una mala base de resolución de problemas, la iban arrastrando a lo largo de toda la etapa y eran incapaces de comprender y resolver los problemas que les exigía cada curso.

Desarrollar una buena capacidad para la resolución de problemas hace que el alumno adquiera una adecuada competencia matemática. Dentro de las competencias básicas, en el área de matemáticas la resolución de problemas aparece como eje fundamental de la asignatura, ya que servirá a los alumnos para enfrentarse con las herramientas adecuadas a las distintas situaciones que se le presenten en su vida diaria en un futuro.

Me ha parecido interesante también abordar la enseñanza de los problemas matemáticos a con motivo conjunto de habilidades y recursos que se necesitan para comprenderlos y resolverlos, no sólo se tiene que tener una buena capacidad para resolver operaciones matemáticas sino que también se debe tener una buena comprensión lectora, una buena atención, capacidad de procesar la información, capacidad de distinguir en el enunciado de un problema los datos que son importantes de los que son menos importante o como llamamos nosotros, datos tóxicos. Trabajando la resolución de problemas hará que trabajemos también indirectamente en los alumnos todas estas habilidades cognitivas más propias del área de Lengua. He de decir que este apartado es muy importante ya que los alumnos a esta edad todavía no tienen plenamente desarrollada la capacidad lectora y mucho menos la comprensión, así que es un aspecto con el que tenemos que contar a la hora de presentarles los problemas.

A lo largo del trabajo abordaré las diferentes corrientes pedagógicas que ha habido a lo largo de la historia, para estudiar cuáles eran los métodos y estrategias utilizados en cada una de ellas en cuanto a la resolución de problemas, así como también haremos un recorrido por varios países de distintas culturas donde la asignatura de matemáticas en general y la resolución de problemas en particular se trabaja dándole la gran importancia que ésta tiene.

## 1.2. OBJETIVOS

Con la elaboración y selección de los objetivos se va a exponer de manera lo más clara posible lo que se pretende lograr con la realización del trabajo de fin de grado. Se dividirá los objetivos en dos tipos, uno general, y posteriormente varios específicos que ayudarán a alcanzar el objetivo general.

### 1.2.1. Objetivo general

Analizar distintas metodologías y modelos (didácticas matemáticas) de resolución de problemas aplicados en el primer ciclo de Primaria.

### 1.2.2. Objetivos específicos

1. Estudiar el desarrollo psicopedagógico de los niños con edades comprendidas entre los 6 y los 8 años.
2. Analizar las dificultades que presentan los alumnos a la hora de resolver problemas matemáticos.
3. Estudiar distintos autores que han trabajado y elaborado teorías acerca de la resolución de problemas.
4. Comparar el enfoque que se le ha dado a la resolución de problemas desde distintas corrientes pedagógicas.
5. Investigar el tratamiento llevado a cabo de la resolución de problemas en países punteros en este campo y de culturas distintas.

Se intentará que con el logro de todos y cada uno de los objetivos previstos, se tenga una amplia visión a nivel mundial de las técnicas y estrategias utilizadas en un campo tan amplio y tan interesante de trabajar como es la enseñanza y el entrenamiento en resolución de problemas matemáticos.

### **1.3. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA.**

El presente Trabajo de Fin de Grado aborda el tema de la resolución de problemas en el currículo de Matemáticas durante la etapa de educación primaria, en particular el primer ciclo.

En términos generales el estudio comenzará con un análisis de las normas que rigen actualmente en la educación en España. Se analizará en primer lugar, la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo de Educación (LOE), y dentro de ésta, las competencias básicas. Se verá, y comprobará, la importancia que se le da dentro del currículo a la resolución de problemas, apareciendo dentro de los objetivos generales de la etapa y por supuesto también en un lugar destacado dentro de la competencia matemática.

Se hará una valoración del estudio psicopedagógico de los niños de primer ciclo de primaria a través de distintos expertos en este campo. Se tratará de justificar distintas metodologías que den respuesta al continuo desarrollo cognitivo que tienen los niños en esas edades.

Se compararán estrategias y métodos diferentes, empleados para la resolución de problemas, así como distintas metodologías utilizadas tanto en España como en otros países de referencia. Para ello serán tenidas en cuenta las publicaciones y artículos de autores relevantes. Principalmente este material será consultado vía Internet, con publicaciones previamente contrastadas para comprobar la veracidad de las mismas.

En el marco teórico se definirá que se entiende por problema, qué tipos de problemas nos podemos encontrar, la clasificación de estos, fases en la resolución, así como una introducción a las dificultades que se puedan encontrar los alumnos a la hora de enfrentarse a la resolución de un problema.

En definitiva el desarrollo fundamental del trabajo estará centrado en un análisis de diferentes métodos educativos para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en el área de Matemáticas, en correlación con los resultados que estos métodos están proporcionando actualmente.

Por tanto las conclusiones estarán basadas en la relación existente entre los sistemas de trabajo utilizados en los distintos países y el rendimiento y los resultados de sus alumnos.

## 2. MARCO TEÓRICO.

En este apartado del trabajo se va a intentar introducir una base teórica acerca de las características de los problemas que se van a estudiar y de los alumnos a los que van dirigidos.

### 2.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA.

En este apartado se analizará la importancia y la presencia que tiene la resolución de problemas dentro del currículo de matemáticas en la etapa de educación primaria, tanto a nivel nacional como a nivel regional, dentro del currículo aragonés.

Para indagar en las reseñas referidas a la resolución de problemas en el currículo, se va a consultar la Ley Orgánica 2/2006 de 3 Mayo de Educación (LOE), y dentro de ésta, el R.D. 1513/2006 del 7 de Diciembre de 2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la educación primaria.

Ambos, tanto la Ley como el Real Decreto van a ser aprobados en la siguiente Orden,

*Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.*

En esta orden, (BOE, 2007, p. 5) podemos leer dentro del artículo 4 “Contextualización a la realidad de la Comunidad Autónoma”, como una finalidad, concretamente la c), cita textualmente, “El desarrollo de habilidades y estrategias para la resolución de problemas que se presentan en la vida cotidiana”

Dicha orden en el artículo 7 “objetivos generales de la Educación Primaria” que se encuentra en la página 6, aparece en el apartado g) el siguiente texto, “Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana.”

Como principios metodológicos generales (BOE, 2007, p. 9) también aparece una reseña a la importancia de la resolución de problemas en el apartado e),

“Debe favorecerse el desarrollo de procesos cognitivos, la autorregulación y la valoración del propio aprendizaje. Por ello, será preciso incidir en actividades que

permitan la indagación, el planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana, así como la búsqueda, selección y procesamiento de la información.”

Dentro de la LOE aparecen las competencias básicas, que son una serie de aprendizajes imprescindibles que deben haber adquirido los alumnos al finalizar la educación obligatoria y que les permitirá entrar con garantías al mundo adulto. La resolución de problemas también tiene un papel destacado dentro de la competencia matemática, citamos la siguiente frase que aparece en las “Competencias básicas” (BOE, 2007, p. 4).

“...la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella...”

En (BOE, 2007, p. 148) dentro del área de primaria aparece como primer punto  
“La resolución de problemas como eje fundamental de la actividad matemática”

En la resolución de un problema se ponen en juego capacidades, instrumentos y modos de trabajo propios de la actividad matemática: comprender el enunciado, establecer un plan de trabajo, crear un lenguaje simbólico o gráfico, aplicar heurísticos, justificar las ideas y técnicas que se utilizan, formular y comprobar la solución, etc.” y como contenido para el primer ciclo aparece

“Formulación matemática de situaciones problemáticas, resolución de las mismas a partir de los conocimientos matemáticos y traducción del resultado al contexto inicial. Explicación verbal de la estrategia de resolución utilizada, del proceso seguido en la realización de cálculos y de la comprobación de los resultados.(BOE, 2007, Pág 154)

Por todo lo expuesto anteriormente se puede asegurar sin miedo a equivocarse que la resolución de problemas es un apartado fundamental dentro del área de las Matemáticas y de la competencia matemática. Las pautas que se dan para seguir, invitan a cambiar la manera de afrontar su enseñanza para adaptarla a los nuevos tiempos y hacerla más cercana a los alumnos, con unos métodos de enseñanza significativos, presentándoles

los problemas matemáticos cercanos a sus realidad para que se den cuenta de la utilidad de los mismos fuera del aula.

Es un apartado que los informes PISA, publicados por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte con fecha de 1 de Abril de 2014, han señalado como deficiente en España en los últimos años, y la educación española no puede quedarse de brazos cruzados, sino que debe actuar y poner remedios con la mayor brevedad posible.

## **2.2. EVOLUCIÓN PSICOPEDAGÓGICA DE LOS ALUMNOS DEL PRIMER CICLO.**

La edad en que se encuentran los alumnos a estudiar es una edad muy complicada, puesto que como Piaget (1958) indica en su teoría sobre el desarrollo cognitivo, están pasando de la etapa pre-operacional a la etapa de operaciones concretas. Como ya se sabe, los niños estos cambios no los realizan al unísono, sino que cada uno lo hace a su tiempo y de modo diferente, muchas veces influenciados por la cantidad y la calidad de los estímulos externos que reciban de su entorno.

Alrededor de los 6/7 años el niño adquiere la capacidad intelectual de conservar cantidades numéricas y también la de conservar los materiales, también llamada reversibilidad, esta capacidad adquirida les ayudará a la hora de la comprensión de problemas matemáticos sencillos. Pero una cosa que todavía no poseerán hasta que no pasen a la siguiente etapa clasificada por Piaget (1958), la de las operaciones formales, será la capacidad de tener pensamiento abstracto, es decir, que los problemas que se trabajen con los niños, deberán estar relacionados con las realidades que ellos conocen y los procesos que se les indique para resolverlos deberán ser apoyados con ejemplos tangibles para que ellos los comprendan con total seguridad.

Para Vigostky (1978) el desarrollo cognitivo de los niños no se da tanto por edades o etapas como señaló Piaget (1958), sino que es más por la proximidad que tenga el niño con adultos, con su entorno, y más posibilidades tenga de investigar por su cuenta los distintos enigmas que se le van planteando. Para ello es muy importante saber los conocimientos que ya poseen los alumnos y plantearles problemas que estén dentro de lo que va a ser llamado por el propio Vigostky (1978) como “zona de desarrollo próximo”, es decir una zona de conocimientos que todavía no posee el alumno, pero que sí que podrá llegar a alcanzar con los conocimientos previos que ya tenga y con la ayuda de un adulto, es decir, con la de su profesor. Por ello, para una buena elección de problemas matemáticos para los alumnos, se deberá tener en cuenta el nivel cognitivo y de

conocimientos que ya poseen y también las estrategias metodológicas que ya dominan, para a partir de ahí, dar un paso más en busca de un nuevo conocimiento.

### **2.3. DEFINICIÓN DE PROBLEMA.**

Antes de entrar a investigar la resolución de problemas, se considera oportuno consultar las definiciones consideradas algunos de los principales matemáticos, sobre qué es un problema. De esa forma se observará las distintas definiciones que puede tener el propio concepto según la perspectiva que le dé cada uno.

Por ejemplo, Echenique (2006) define como problema “una situación que un individuo quiere o necesita resolver y para la que no dispone, en principio de un camino rápido y directo que le lleve a la solución, por lo que se produce un bloqueo” evidentemente esta definición se puede aplicar a problemas a nivel general y no sólo a problemas matemáticos.

Una definición de problema referido claramente a problema matemático la da Vila y Callejo (2009) donde afirman que “para designar una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar afectos, etc. para afrontar una situación nueva.

Una definición más sencilla pero para nada menos acertada es la que se rescata de Polya (1965) donde lo define como “situación que necesita la búsqueda de una acción adecuada para lograr un objetivo claro no alcanzable de forma inmediata”

Sintetizando un poco estas y otras definiciones consultadas, se puede afirmar que todos coinciden en que un problema es una tarea o una situación que se presenta a un sujeto o grupo de sujetos, que no tiene una solución clara ni inmediata, que necesitamos un bagaje previo o unos conocimientos adquiridos para resolverlo, y que tiene un objetivo claro, pero las maneras de alcanzarlo, el trayecto para llegar a él, puede ser distinto.

### **2.4. TIPOS DE PROBLEMAS Y CLASIFICACIÓN DE LOS MISMOS.**

Existen una gran cantidad de tablas y de clasificaciones de problemas por parte de diversos autores. Cada matemático lo hace desde su perspectiva, unos clasifican según el

tipo de operaciones que se llevan a cabo, otros según el proceso de resolución que tiene lugar, otros lo pueden hacer según el número de soluciones que tenga el problema.

Este trabajo se va a centrar en estudiar la clasificación presentada por Echenique (2006) en su estudio sobre las matemáticas y la resolución de problemas. A pesar de hacer una clasificación de todos los tipos de problemas que se van a trabajar en la etapa de educación primaria, distingue claramente los que se ven en el primer ciclo de esta etapa. Estos son los problemas aritméticos de primer nivel, aquellos en los que, en su enunciado se presentan los datos y se establecen las relaciones de tipo cuantitativo necesarias para la realización de una única operación aritmética que conduzca a la resolución. Concretamente en este nivel se estudiarán los problemas aditivo-sustractivos, aquellos que se van a resolver por medio de la adición o la sustracción. Estos tipos de problemas los va a dividir a su vez Echenique (2006) en cuatro conjuntos: de cambio, de combinación, de comparación y de igualación.

- **De cambio:** en estos problemas se parte de una cantidad inicial, la cual se ve modificada para dar lugar a una cantidad final. De las tres cantidades que aparecen en el problema, dos serán datos y la tercera será la incógnita que se deberá averiguar mediante una suma o una resta.
- **De combinación:** en el enunciado se describe una relación entre dos conjuntos que unidos forman un todo. Se tendrá que calcular una de las partes mediante una resta, o bien sumar las dos partes para calcular el todo.
- **De comparación:** son problemas donde se establece una relación de comparación entre dos cantidades, bien sea de superioridad (más que...) o de inferioridad (menos que...). El enunciado nos aportará las dos cantidades y habrá que calcular la diferencia, o con una cantidad y la diferencia, habrá que averiguar la segunda cantidad.
- **De igualación:** en el enunciado aparece un comparativo de igualdad del tipo “tantos como...” o “igual que...”, en este tipo de problemas una de las cantidades se modificará creciendo o disminuyendo para igualarse con la otra cantidad.

Existen muchos autores que a su vez distinguen estos problemas aritméticos en verbales y no verbales, recomendando para el primer ciclo de primaria en el que se basa este trabajo los verbales, ya que se relacionan mucho más con el contexto más cercano del aula y con el entorno que los alumnos se relacionan diariamente.

## 2.5. FASES DE RESOLUCIÓN

En cuanto a este apartado se ha comprobado que existen multitud de autores que exponen sus fases para la resolución de problemas matemáticos, y que la gran mayoría coinciden en 4 principales fases y cada uno simplemente le da algún matiz personal o cambia algún término. Sí que hay uno que va más allá del resto y que tomaremos como referencia, y serán las fases que nos aporta José Antonio Fernández Bravo, en su libro “La resolución de problemas matemáticos Fernández (2000)”. Para todos los demás matemáticos consultados las 4 principales fases para la resolución de problemas son, la comprensión del problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y revisarlo. A modo de ejemplo, se expondrá a continuación tres autores con sus fases para comprobar que son muy similares. Para George Polya (1945), la resolución la divide en 4 fases, comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examen de la solución obtenida. Muchos años después Schoenfeld A. H. (1994) en su trabajo expone estos otros cuatro pasos, analizar y comprender el problema, diseñar y planificar una solución, explorar soluciones y verificar la solución. En un estudio mucho más reciente la española Isabel Echenique (2006) presenta otras 4 fases, Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Como se ha podido comprobar, la fases de estos tres matemáticos coinciden casi al cien por cien.

Muy distinta es la perspectiva que le da Fernández (2000), no solo comprende las fases para la realización del problema, sino también la actitud del alumno y los procesos internos que tienen que producirse en él para aprender a realizar los problemas de manera significativa, y también los procesos y actitudes que deberá tener el proceso para conseguirlo. Lo presenta en seis fases:

1. **Querer:** es la disposición del alumno ante la resolución de un problema, que marcará los pasos y los objetivos a lograr.
2. **Comprensión:** trabajar con modelos de problemas que el alumno necesite comprender para su resolución.
3. **Formulación de ideas:** el profesor deberán enfatizar en la observación e intuición del alumnado para que le permita dicha generalización de ideas que le posibiliten seleccionar las estrategias más idóneas para la resolución del problema.
4. **Investigar:** el estudiante desarrolla sus facultades memorísticas, de razonamiento, de flexibilidad, la iniciativa, así como la reversibilidad de pensamiento y la aplicación de sus conocimientos.

5. **Comunicación:** en esta fase se intenta recurrir al dialogo para compartir ideas, estrategias utilizadas para la obtención del resultado del problema, todo ello ayuda a promocionar la autonomía del alumnado.
6. **Conclusiones:** se llegará a ellas a través de las estrategias de resolución empleadas vistas en la fase anterior, las consideraciones de su acierto o su equivoco, otros métodos que hayan empleado sus compañeros, generalizaciones, etc. con el fin de recoger ideas que puedan ser empleadas en otras ocasiones de resolución de problemas.

Con este método de resolución de problemas compartido por Fernández (2000) el profesor ya no sólo es un mero transmisor de información al alumno para que resuelva un problema, sino que se convertirá en un guía para los alumnos planteándoles interrogantes, dudas, nuevas ideas, induciéndoles a la investigación, que con sus consejos podrán ir resolviendo por ellos mismos.

## **2.6. DIFICULTADES QUE PUEDEN ENCONTRAR LOS ALUMNOS.**

Es muy importante conocer en que puntos o en que procedimientos el alumno puede encontrarse con dificultades a la hora de resolver un problema, o también descubrir una vez que el alumno ha resuelto un problema de forma errónea, cuál ha sido y dónde, el momento en el que el alumno se ha desviado del procedimiento correcto. Para ello, se consultará a varios autores que indicarán dónde pueden aparecer esas complicaciones.

Por ejemplo, para Carpenter y Moser (1982), si se analiza el enunciado, está comprobado que según que término sea la incógnita es fundamental, si la incógnita que buscamos coincide con el resultado del problema, el porcentaje de alumnos que realizarán correctamente el problema aumenta considerablemente, si la incógnita que buscamos está en el segundo término ese porcentaje disminuye y si está en el primero todavía más. También para Puig y Cerdán (1988) la manera de presentar las cantidades, la posición de la pregunta en el enunciado, el tamaño de los números, o el orden de presentación de la información, favorecen o perjudican la comprensión del mismo.

Otro estudio, el de Juidías (2007) destaca los conocimientos lingüísticos y semánticos que tenga el alumno, así como su comprensión lectora, como factor fundamental para la correcta resolución de los problemas.

Villa y Callejo (2009) van un poco más allá, y afirman que no sólo las características de los problemas influyen, sino que también la actitud con la que se enfrentan los alumnos a la resolución de un problema influye para conseguir un resultado positivo, aseguran que

un alumno con una autoconfianza en sí mismo elevada, que considera un problema matemático como un reto a superar, y que lo hace con la emoción de obtener el resultado correcto, tendrá muchísimas más posibilidades de resolverlo con éxito, que un alumno que se enfrente a los problemas con una predisposición negativa.

A parte de todas estas razones, ayudarse de dibujos, o representar el problema con objetos que se tengan al alcance, que se puedan manipular y que los alumnos lo puedan ver, son algunos de los recursos que se pueden utilizar cuando la comprensión del enunciado por parte de los alumnos no sea el adecuado.

### 3. MARCO EMPÍRICO

La resolución de problemas se ve como una de las actividades más complicadas y más importantes que se trabajan dentro del área de Matemáticas, por todo ello, a lo largo de la historia, y de distintos lugares y culturas del mundo, se han elaborado distintas teorías acerca de su correcta aplicación.

#### 3.1. ESTRATEGÍAS Y METODOLOGÍAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Por todo lo indicado en el párrafo anterior, se va a realizar un estudio pormenorizado de aquellas técnicas que ha habido en algunas de las más importantes corrientes pedagógicas de la historia, y más adelante ya se verá como estas técnicas y métodos varían según el país que tomemos de referencia.

##### 3.1.1. En distintas épocas y corrientes pedagógicas.

###### *Estrategias heurísticas*

Todo lo relacionado con la heurística está relacionado con la invención y con el descubrimiento, por lo tanto la resolución de problemas basadas en estratégicas heurísticas llevará irremediablemente a una manera de resolución fundamentada en ir descubriendo y entendiendo paso a paso cada fase de la resolución de un problema. Para exponer esta visión se recurrirá al estudio del gran matemático húngaro George Polya (1887-1985) que en su libro “cómo solucionarlo” (1945) y en su publicación “descubrimiento matemático” (1962-65), enseña unas reglas generales que servirán de guía para resolver los problemas de una manera heurística. Polya (1965) como objetivo general se marca el entender el proceso llevado a cabo, dominar las operaciones mentales útiles para el proceso, y también la experiencia de resolver problemas y ver cómo otros lo hacen. Señala 4 pasos fundamentales:

1. **Entender el problema:** Para ello se deberá plantear si se sabe cuál es la incógnita, si sabe cuáles son los datos, si se sabe cuál es la relación entre ellos, y si con todo eso es suficiente para resolver el problema. A continuación se dibujará un esquema con todo ello.
2. **Trazar un plan:** En este punto se tirará de memoria y se intentará recordar algún problema del mismo tipo resuelto con anterioridad, si no igual, alguno que fuese

similar. Se buscará la conexión entre los datos y la incógnita, y visionando el esquema se analizará si conocemos mejor a los datos o a la incógnita. Si no se es capaz de resolver este problema planteado se intentará solucionar uno relacionado más accesible o más general.

3. **Ejecutar el plan:** Al ejecutar el plan se comprobará cada paso que se vaya realizando para estar seguro de ir dando los pasos correctos en la buena dirección.
4. **Mirar hacia atrás:** En este punto de la resolución se comprobará el resultado obtenido, se comprobará el razonamiento, se intentará demostrar que el resultado se puede demostrar de forma diferente, por ejemplo a la inversa, y si el método utilizado se puede utilizar en un futuro en otro problema.

Además, da como clave para la resolución de problemas tener un conocimiento y una experiencia en la materia, ya que la resolución de problemas se basa en experiencias pasadas y conocimientos ya adquiridos. No tener memorizados todos los problemas realizados sino elementos claves en cada uno de ellos.

### *Teorías antropológicas*

Estas teorías se basan en el estudio del conocimiento metacognitivo que los alumnos poseen y utilizan de una manera intencionada el término “tareas matemáticas” en lugar de “problemas de matemáticas”. Afirman que están implicados dos componentes en la resolución de tareas matemáticas: el conocimiento y las creencias. El primero de estos componentes, el conocimiento, puede ser de tres tipos: conceptual, procedimental y condicional.

Así, se puede definir el conocimiento metacognitivo como el conocimiento condicional, tanto de los conceptos como de los procedimientos, necesario para su selección y aplicación adaptada a las condiciones del problema o de la tarea.

El contexto en el caso del presente trabajo es la resolución de tareas matemáticas. Este abarca siempre conocimiento matemático (microcontexto) y en algunos casos conocimientos más generales (macrocontexto). Los procedimientos relativos al microcontexto, es decir, los propios del contenido matemático se denominarán *técnicas*, mientras que los procedimientos tomados del macrocontexto (aplicables a otras tareas no matemáticas) se etiquetarán como *estrategias*.

La clasificación que propone el trabajo de Quintana (2005) considera como variable de caracterización fundamental de una *tarea problemática* el que implique un *bloqueo*, es decir, que no pueda ser resuelta de manera inmediata, siguiendo la misma línea

propuesta por Pólya (1961). Sin embargo, la variable que se ha considerado tradicionalmente para caracterizar una tarea matemática como problema ha sido que implique la modelización de una situación (Charles y Léster, 1982; Borasi, 1986).

Para acabar con el estudio de la resolución de problemas desde un punto de vista antropológico y metacognitivo, se describen los tres grandes procesos que se tienen en cuenta para la resolución de problemas, que son la modelización, la ejecución y la interpretación:

1. **Modelización:** En el proceso de modelización el primer paso es comprender la situación, y saber qué es lo que pide la tarea. El alumno debe saber qué es lo que hay que solucionar, cuáles son los datos importantes y cuáles son las relaciones entre ellos.
2. **Ejecución:** Este proceso lleva implícito la elección y posterior aplicación de una técnica. Se valorarán distintas técnicas de resolución y se seleccionará la que se crea más apropiada para la resolución del problema.
3. **Interpretación:** Despues de aplicar la técnica seleccionada y obtener el resultado, en casos de tareas mixtas o contextualizadas, se llevará a cabo el proceso de *interpretación*. Se analizará el resultado en el contexto del problema. Es necesario así diferenciar el *resultado* –fruto de la ejecución–, de la *solución*.

### *Pedagogías constructivistas*

Bajo el fundamento epistemológico de este modelo de pedagogías se puede afirmar que el conocimiento es una construcción realizada por los propios alumnos y que no es algo que esté fuera de ellos. Como dijo Sánchez (2004) “el conocimiento no puede ser transferido desde la cabeza de un profesor a la cabeza de los estudiantes”.

Se puede inferir que bajo la visión del constructivismo, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, y dicha construcción está fundamentalmente basada en los esquemas que cada sujeto ya posee, que construyó anteriormente al relacionarse con el medio que le rodea. Esto es algo que todas las corrientes dentro del constructivismo coinciden y están de acuerdo.

Larios (2000) va un poco más allá y afirma que el mundo existe independientemente del cognoscente; sólo que para el interés de este ser, sólo existirá el mundo cuando lo conozca. De ahí la importancia de un sujeto activo que construye conocimientos y con ellos organiza el mundo.

Estas dos van a ser las características centrales del constructivismo, un sujeto activo y la existencia de conocimientos previos. Estos postulados evidentemente se van a aplicar a cualquier área del saber, por lo tanto, a continuación se estudiará como aplicarla al área de matemáticas que es la asignatura que ocupa este trabajo.

Se puede afirmar que si existe un proceso o experiencia dentro de las matemáticas que ayuda a la construcción de conocimientos a partir de la abstracción reflexiva, este proceso es la resolución de problemas.

Larios (2000) señala que las situaciones problemáticas que se les presenta a los alumnos son las que introducen en ellos un desequilibrio en sus estructuras mentales, que en su afán de equilibrarlas produzcan la construcción del conocimiento.

Según Alsina (2007) la resolución de problemas permite conocer la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, principalmente en dos direcciones: partiendo del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, hallar relaciones y regularidades, descubrir coincidencias con otros problemas, y trabajando entonces matemáticamente, hallar soluciones y propuestas que se deberán volver a proyectar en la realidad con el fin de analizar su validez y significado.

Para Guzmán (2007) la experiencia de resolver un problema debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitarse en creatividad y reflexionar sobre su propio aprendizaje, de manera que lo prepara para resolver otros problemas y hace que inconscientemente adquiera confianza en sí mismo.

Actualmente en las escuelas se recomienda plantear situaciones problemáticas desde el comienzo, con ello se consigue activar el interés y la mente del alumnado. Se buscará trabajar a partir de la realidad para dar significado a las situaciones, apoyados de los conceptos, esquemas y relaciones matemáticas.

### *Pedagogías conductistas*

La psicología conductista surge como reacción al estructuralismo y al funcionalismo, y es una corriente psicológica que se basa en la existencia de un estímulo para producir una respuesta, o, conociendo una respuesta, poder inferir el estímulo que la produjo.

Bajo este postulado, y relacionándolo con la resolución de problemas, Perales (1993) afirmó que las primeras investigaciones se basaron en la identificación de las estrategias de resolución de problemas utilizadas por distintas personas con el objetivo de buscar similitudes entre ellas. En González (1981) se presenta un método basado en 4 fases: preparación o acumulación de la información; incubación o apartarse temporalmente del

problema; iluminación o un darse cuenta repentino – el eureka arquimedeano; y el hallazgo de la solución.

Ya nombrado varias veces en este trabajo, se debe destacar el modelo Polya (1987) publicado dentro de su obra “How we solve it” en 1944. Se cree que es la investigación sobre resolución de problemas que más ha influenciado en el área de la matemática. Se basa en las siguientes 4 etapas:

1. **Comprender el problema.** ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es suficiente para determinar la incógnita?
2. **Concebir un plan.** ¿Se ha encontrado un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Ha empleado todos los datos y toda la condición?
3. **Ejecución del plan.** Al ejecutar comprobar todos los pasos ¿Puede verse claramente que son correctos? ¿Se puede demostrar?
4. **Visión retrospectiva.** ¿Puede verificar el resultado y el razonamiento? ¿puede obtener el resultado de forma diferente?

### *Cognitivismo*

Para el enfoque cognitivo, un problema es una realidad compleja. Lo podremos analizar de dos maneras, horizontalmente o verticalmente. De manera horizontal el problema quedará dividido en tres niveles, Rimoldi (1984): un sistema simbólico o lenguaje, un significado o contenido y una estructura lógica o conceptual.

Investigaciones han determinado que la habilidad de un sujeto para resolver un problema es una variable dependiente de su conocimiento sobre la estructura lógica del problema, Mayer (1992). Esta dependencia se debe a que tal estructura consiste en el principio o conjunto de principios que son necesarios para la solución del problema.

Respecto al contenido del problema, se ha encontrado que mientras más familiares le son al sujeto los objetos sobre los que se define el problema, mayor es su capacidad para resolverlo, en Míguez (1993)

Como se ha visto, de manera horizontal, el lenguaje, el contenido y la estructura lógica, son los tres componentes en que se divide un problema.

Si analizamos el problema de manera vertical los tres componentes serán los que presentan a continuación Newel y Simon (1972):

1. Un estado inicial, condiciones en las que se presenta la situación problemática.

2. Un estado final o meta, conjunto de condiciones a las que debe llegar el proceso de solución.
3. Los operadores, actividades que conducen del estado inicial a la meta, con sus respectivas restricciones, reglas de acuerdo con las cuales deben llevarse a cabo las actividades.

Una vez expuestos los postulados de la psicología cognitiva, se presenta a continuación la propuesta hecha por Ausubel (1976) para la resolución de problemas matemáticos y que cuenta con cinco etapas o fases:

- a. Reconocimiento de una dificultad
- b. Comprensión de la situación problemática.
- c. Establecimiento de relaciones entre el planteamiento y los conocimientos previos y la generación de hipótesis.
- d. Prueba de la hipótesis y replanteamiento de las mismas, de ser necesario
- e. Aprendizaje del procedimiento empleado en la solución.

### **3.1.2. En España**

Se acostumbra a llamar *modelo de resolución de problemas* a una doctrina que clasifica y analiza las fases del proceso de resolución de problemas, las sugerencias y estrategias heurísticas, y los diferentes aspectos de orden cognoscitivo, emocional, cultural, científico... que intervienen en el proceso.

Numerosos estudios confirman que con la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas se consiguen más y mejores resolutores que con la mera práctica espontánea en resolver problemas. Los investigadores coinciden en afirmar que la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas, sino tomando soltura y familiaridad con una gama de técnicas de resolución, conocidas por heurísticas.

A continuación se analizarán los métodos y estudios llevados a cabo por distintos matemáticos españoles. Entre ellos se encontrará Juan Emilio García Jiménez, Isabel Echenique, José Ramón Gregorio Guirles y Miguel de Guzman.

Es cierto que existen docentes que afirman que lo más conveniente es dejar a los estudiantes utilizar estrategias propias en la resolución de los problemas, no obstante también es muy positivo enseñarles la existencia de otras estrategias y técnicas que les pueden simplificar y facilitar el trabajo.

García (2002) en su libro “Resolución de problemas y desarrollo de capacidades” destacó la importancia del uso de estrategias para la enseñanza de la resolución de problemas por parte del profesor, de esta manera señaló una serie de líneas a seguir para afrontar con éxito la resolución de problemas:

- Proponer a los alumnos problemas con diferentes tipos de contextos, plantear al estudiante distintas y variadas situaciones relacionadas tanto con experiencias de la vida real, como con ideas ficticias.
- Proponer problemas variados con distinto número de soluciones, pueden ser de una solución, de varias soluciones o sin solución. No caer en la rutina de presentar los mismos tipos de problemas que lleven a un proceso de resolución mecánico y memorístico.
- Presentar problemas variados desde el punto de vista de la adecuación de los datos, es decir, usar datos completos, incompletos, superfluos, o presentar datos que sobran. Esta recomendación, obliga al estudiante a leer y entender el problema antes de comenzar a concebir el plan de resolución.
- Dar importancia a los procesos de resolución y no solamente a los cálculos y las soluciones, por ello García (2002), recomienda fijarse más en los procesos desarrollados por los alumnos más que en sus resultados.
- Animar a los estudiantes a comunicar oralmente o por escrito lo esencial del proceso de resolución de problemas. Para ello se recomienda pedir al estudiante que verbalice o escriba el proceso que siguió para resolver el problema.

En resumen, García (2002), realiza esta serie de recomendaciones a los docentes con el objetivo de ayudar a mejorar sus estrategias de enseñanza en la resolución de problemas.

Para Echenique (2006) las bases que los alumnos deben tener para ser competentes en la resolución de problemas debemos asentarlas desde las primeras etapas de la educación primaria, e ir mejorándolas poco a poco dentro de la misma. Hay tres que destacan sobre el resto y son; una, en alumno deberá contar un buen bagaje de conocimientos matemáticos claros y estructurados, dos, un método de resolución

acompañado de una serie de estrategias heurísticas, y tres, una actitud positiva al enfrentarse al reto de solucionar un problema.

En su estudio, Echenique (2006), como tantos otros, se remite a las cuatro fases que determinó Polya (1949) para la resolución de problemas, y que sirvió de referencia para muchos modelos expuestos posteriormente.

El modelo establecía 4 etapas:

1. **Comprensión del problema.** Implica entender el enunciado del problema y la situación que nos plantea, sabiendo qué hacer con la información presentada en el mismo.
2. **Concepción de un plan.** Es el momento de plantear las acciones que llevaremos a cabo, por lo tanto es una fase crucial ya que de ella dependerá resolver con éxito el problema. A partir de toda la información que tenemos se debe decidir qué operaciones utilizar y en qué orden.
3. **Ejecución del plan.** Poner en práctica todos los pasos planteados en la anterior fase, y justificando las acciones seguidas.
4. **Visión retrospectiva.** Es el momento de revisar exhaustivamente todo el proceso seguido, y comprobar uno a uno que todos los pasos han sido realizados correctamente y son lógicos. Se verá si el resultado obtenido es lógico, y se reflexionará si se podría haber llegado a esa solución por otro camino.

Todas estas fases, como afirma Echenique (2006) pueden ser aplicadas a otros problemas de la vida que no tienen por qué ser matemáticos, pero eso sí, cuando se apliquen en matemáticas en la etapa de educación primaria se deberá tener en cuenta el nivel y el desarrollo psicológico de los alumnos para aplicarlas de una manera adecuada. Sobre todo en las primeras edades se invitará a los alumnos a verbalizar los procesos que se den interiormente para conocer su manera de razonar y proceder.

Guirles (2005) plantea que el objetivo final es conseguir que el alumnado resuelva de manera satisfactoria problemas sencillos de la vida cotidiana, y otros no tan cotidianos, y para ello se deberá atender a cuatro cuestiones fundamentales: la comprensión lingüística, la comprensión matemática, la resolución y la interpretación.

1. **La comprensión lingüística.** Tanto si el enunciado es oral como escrito es fundamental como primer paso entender el mensaje y las palabras que aparecen en él. Como los niños de primer ciclo están todavía aprendiendo a leer y escribir, y por lo tanto aún no dominan la compresión lectora, se trabajará

en mayor medida y siempre que sea posible con enunciados orales, acompañados de dibujos y gráficos, y además en textos cortos y con redacción sencilla.

2. **Comprendión matemática.** Es la capacidad de relacionar de manera satisfactoria una acción lingüística con una operación matemática. Este proceso se verá condicionado con los verbos que aparezcan en el problema, las operaciones a realizar, y el nivel de exigencia del problema. Guirles (2005) señala una serie de pautas que se deben seguir a la hora de elaborar problemas para un alumnado de primer ciclo.

- Relacionar los problemas con la experiencia de los alumnos, que comprendan las situaciones y los conceptos utilizados.
- Trabajar al principio con problemas de una sola operación.
- Utilizar al principio muy pocos verbos asociados a cada operación; añadir, poner,..(+) o quitar, perder,... (-)
- Tres frases en cada enunciado, una para describir situación inicial, otra para decir la acción, y otra para la pregunta.
- Tener en cuenta el tamaño de los números utilizados, con números pequeños tienen menor dificultad de resolverlos, ya que se pueden representar con fichas o dibujos, y además resolver con los dedos o material manipulable.

Guirles (2005) afirma que el trabajo de codificación matemática se ve muy favorecido cuando se les insta a hacer el proceso contrario, los alumnos son los que cuentan las historias y los que crean los problemas. Se debe favorecer que entre los alumnos “con sus palabras” discutan e inventen problemas, bien libremente o bien a partir de situaciones problemáticas que el profesor les plantee.

3. **Resolución.** Se debe buscar la solución a través de un determinado cálculo, esto implica la toma de decisión por parte del profesor de cómo quiere que sus alumnos hagan el cálculo: cálculo mental, cálculo con lápiz, dedos...
4. **Interpretación.** El alumno una vez alcanzada una solución debe de interpretarla, puesto que no siempre el resultado numérico de aplicar una operación es la solución del problema. Se buscará trabajar este tipo de problemas de manera intencionada.

A modo de conclusión, Guirles (2005) señala que más que la cantidad de problemas resueltos, es preferible enfocar el mismo problema desde varios puntos de vista, priorizar

siempre en la comprensión de significados matemáticos, impulsar la creación y modificación de problemas por parte de los alumnos, alternar problemas de diferentes tipos y formatos, y finalmente, trabajar de inicio con problemas orales y de cálculo mental sencillos.

El Modelo de Guzman (1991) es uno de los modelos últimos que cuenta con un mayor número de aceptaciones por los matemáticos de la época. En él, recoge las aportaciones más importantes de los modelos anteriores.

Para Guzman (1991) uno de los aspectos importantes a la hora de encarar la resolución de un problema es la actitud inicial que se tenga o que se tome. Hay que ser consciente de las limitaciones personales y sociales que tiene cada alumno. Este deberá abordar el problema con confianza, seguridad, tranquilidad, curiosidad, disposición a aprender... Una actitud inicial negativa nos llevaría con casi total seguridad a una situación de bloqueo, apareciendo el desánimo e incluso el abandono. Estos bloqueos se pueden dar de varios tipos, aquí aparecen alguno de ellos.

- **De tipo inercial.** Acomodarse a situaciones y reglas fijas y no saber actuar cuando éstas varían.
- **De origen afectivo.** Ocurre cuando se tiene pereza ante el comienzo, miedo al fracaso o ansiedad entre otras. Una vez reconocidas y asumidas las causas, se trata de enmendarlas con formación.
- **De tipo cognoscitivo.** Dificultades al percibir el problema, identificarlo o definirlo. Puede ocurrir también cuando se tiene una actitud hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc.
- **De tipo cultura y ambiental.** Una serie de ideas y formas de pensar prevalentes y consagradas en nuestro ambiente influyen en nuestro modus operandi, dirigiendo los pasos del alumno en la resolución de problemas sin ni siquiera ellos percibirlo. Existen ideas históricas que son erróneas pero que se han mantenido a lo largo del tiempo.

Examinar a fondo los procesos mentales que los alumnos utilizan para resolver los problemas permitirá depurar su técnica de forma mucho más rápida y efectiva, posibilitará utilizar los propios recursos de los educandos de forma más eficaz.

Guzman (1991) después de muchas observaciones realizadas, del intercambio de experiencias con compañeros, y de la exploración de las formas de pensar de sus alumnos, elaboró cuatro fases necesarias en la resolución de problemas:

1. **Familiarización con el problema.** Encaminarse a comprender de la manera más precisa la naturaleza del problema al que se enfrentan. Ver de qué trata, cuáles son los datos, posible relación entre ellos...
2. **Búsqueda de estrategias.** Seleccionar dentro del bagaje de estrategias que cuentan los alumnos, aquellas que parece que se adecúan más a la naturaleza del problema. Algunas de éstas pueden ser, simplificación, ensayo-error, realización de un esquema, analogía, semejanza...
3. **Desarrollo de la estrategia.** Aplicar la estrategia seleccionada, teniendo en cuenta una serie de puntos. Uno, llevar adelante la mejor idea que se les haya ocurrido, dos, no desanimarse a la primera dificultad, tres, reflexionar sobre la validez de cada paso, y como último paso, preguntarse si lo que se ha obtenido es la solución o no.
4. **Revisión del proceso.** Llegado el final del proceso se deberá realizar los siguientes pasos.
  - a. Examinar a fondo el camino seguido. ¿Cómo se ha llegado a la solución?
  - b. Buscar se había un camino más simple para resolverlo.
  - c. Tratar de por qué se resuelve de esa manera.
  - d. Reflexionar sobre el proceso de pensamiento.
  - e. Estudiar qué otros resultados se podrían obtener con este método.

A pesar de que este modelo de Guzman (1991) fue en principio desarrollado para la resolución de problemas en el mundo universitario, se puede ver como con alguna corrección es perfectamente aplicable a los niveles de educación secundaria y primaria.

### 3.1.3. En otros países

En este parte del trabajo se realizará un estudio y análisis de los enfoques que se da a la resolución de problemas en países alejados culturalmente, y veremos si esas diferencias también influyen en el tratamiento que matemáticos de esos lugares dan a la resolución de problemas.

*Latinoamérica*

Se va a analizar algunas de las estrategias utilizadas por alumnos mexicanos y cubanos profesionales en la solución de problemas, se hará observando los resultados obtenidos a partir de un grupo de trabajo de maestría dirigido por Rizo y Campistrous (1995) en la facultad de Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero en México, teniendo en cuenta que algunas de esas estrategias serán adquiridas por ellos de manera espontánea, sin habérselas enseñado nadie. Se considera pues, si las estrategias utilizadas son más o menos reflexivas, y si éstas les permiten a los alumnos conseguir soluciones correctas a los problemas o no. Se entiende por estrategia reflexiva aquella que haya pasado por un análisis previo de la situación, e irreflexiva a aquella que lleva a una respuesta automatizada con algún algoritmo, sin pensar detenidamente el problema y planificar las posibles soluciones.

Es importante conocer y estudiar las estrategias intuitivas elaboradas por los propios alumnos espontáneamente, un mayor conocimiento de la manera de manifestarse éstas conductas irreflexivas, permitirá corregirlas e incorporar las estrategias reflexivas elementales para que las puedan asimilar más fácilmente, asegurando el éxito en la solución de problemas en la mayoría de las situaciones.

En los primeros cursos de la educación primaria las estrategias utilizadas por los alumnos están estrechamente asociadas a las operaciones de cálculo que los alumnos aprenden, y los problemas al ser todavía sencillos no permiten profundizar mucho en ellos. A continuación se muestra un resumen de las estrategias utilizadas por los alumnos mexicanos y cubanos en una prueba de resolución de problemas elaborada con ellos.

- **Conteo directo de un modelo dado o previa modelación.** El modelo puede ser construido por los propios alumnos. La estrategia consiste en que el alumno observa la representación que le dan, o la que construye y sobre ella opera mediante conteo.
- **Opera con los datos de manera irreflexiva.** Esta estrategia se manifiesta de varias maneras, la más común es la de formar nuevos números con los números dados y realizar una operación con ellos, también en algún caso se llega a descomponer algún número.
- **Escribe números sin análisis previo.** En este caso básicamente lo que hacen los alumnos es intentar adivinar la solución de una manera rápida.
- **Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto.** En estas ocasiones el resolutor identifica el significado del problema mediante el análisis del

texto, pero en la gran mayoría de las ocasiones no sabe explicar el por qué seleccionaron esa operación.

En dicho estudio a modo de conclusión se evidenció que ya muchos niños contaban con una postura bastante reflexiva, aunque en algunos de ellos esa reflexión se encontraba aún en un nivel concreto del desarrollo del pensamiento característico de estas edades. También se quiso dar un toque de atención para corregir en la mayor brevedad de tiempo posible, esas estrategias irreflexivas que pueden llevar a realizar actuaciones equivocadas, y que pueden influir en el desarrollo posterior del niño.

## EEUU

La importancia que se le da a las matemáticas en EEUU queda patente con dos datos demoledores en este último año; uno, la inversión realizada para las matemáticas es de 250 millones de dólares, muy por encima de la media de otros países en proporción a los habitantes, y dos, que en el último estudio del Ministerio de Trabajo de Estados Unidos sobre las mejores profesiones, la de matemático ha sido la que ha ocupado el primer lugar, ya sea en la industria, en aeropuertos, en bancos, etc. Por todo ello, es un país que ha tenido grandes matemáticos, y que sigue aportando magníficos investigadores matemáticos gracias a esa inversión y preocupación por la materia.

Uno de los matemáticos más importantes de los EEUU, Larry Sowder presentó una lista representativa de la variedad de caminos y estrategias que los estudiantes podían tomar a la hora de resolver un problema. Tras su estudio las resumió en estos siete puntos (Sowder, 1989):

1. **Encuentra los números y suma (o resta).** Normalmente el alumno se decanta por la operación que se ha hecho más recientemente en clase, o por la operación que él se siente más seguro y más competente para realizarla.
2. **Adivina qué operación debe ser utilizada.**
3. **Mira los números y ellos te dicen que operación debes usar.** Por ejemplo, 83 y 64 probablemente te dirán restar puesto que en primer curso de primaria no se dan números mayores que 99.
4. **Trata con todas las operaciones y selecciona la respuesta más razonable.**
5. **Busca las palabras clave y ellas te dicen qué operación usar.** Por ejemplo “todos juntos” significa sumar, “quitar o perder” significará restar.

**6. Decide si la operación debe ser grande o pequeña según los números dados.**

En este caso si se cree que el resultado va a ser grande se trabajará con la suma, o si se piensa que va a ser pequeño, aplicamos la resta.

**7. Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto.**

Sowder (1989) considera que las primeras cuatro estrategias no son enseñadas en la escuela, y piensa que es preocupante la utilización frecuente de éstas por parte de los alumnos. Las cuatro las considera estrategias irreflexivas aunque haya habido algún alumno como caso excepcional que ha tenido éxito utilizándolas.

Las estrategias 5 y 6 según él, implican al menos un mínimo de sentido numérico, un mínimo de procesamiento semántico y una mínima comprensión del significado de las operaciones.

Otros investigadores matemáticos como Kilpatrick y Webb (1985) coinciden en que las estrategias más utilizadas son :

- Ensayo y error
- Dibujar un esquema o diagrama
- Adivinar y probar
- Resaltar información relevante

A la vista insuficientes para una correcta metodología para la resolución de problemas.

Dewey (1909) por su parte también presentó un modelo para resolver problemas que contaba con las siguientes seis fases: 1. Identificación de la situación problemática. 2. Definición precisa del problema. 3. Análisis medios-fines. Plan de solución. 4. Ejecución del plan. 5. Asunción de las consecuencias. 6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

Es un modelo que enfocó hacia los problemas en general, no solo matemáticos, y que posteriormente sirvió de base para otros estudios e investigaciones.

*Francia*

Se ha llegado a considerar París como la primera plaza matemática, con diferencia, del mundo. Y queda confirmado con la gran cantidad de Medallas Fields recibidas por matemáticos franceses (11 de 52), son unas medallas que se otorgan cada 4 años a matemáticos menores de 40 años. Entre sus matemáticos más destacados podríamos destacar a Fermat, Descartes y Pascal.

Artigue & Houdement (2007) consideran que existe dos perspectivas diferentes en cuanto a la resolución de problemas: la investigación didáctica y la selección curricular. El

desarrollo de la investigación sobre la resolución de problemas la realizan a partir del marco teórico desarrollado por Brousseau (1986), que todavía sigue dominante, junto con la teoría antropológica de la didáctica, en la educación francesa. Uno de los principios de esta teoría es que el conocimiento emerge del proceso de resolver problemas matemáticos.

Para Artigue & Houdement (2007) la resolución de problemas es una tarea individual que sirve para aplicar los conocimientos matemáticos y para mostrar a los alumnos la utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana y profesional. Por ello, en un programa realizado en 1970 rompen con la visión utilitarista que imperaba la resolución de problemas hasta esa época y eliminan los problemas de palabras del plan de estudios. Ya en el plan de estudios de 1991 se declara específicamente:

*“...el alumno será capaz de reconocer, clasificar, organizar y manejar datos útiles para la solución de un problema; formular y comunicar sus procedimientos y sus resultados; discutir sobre la validez de una solución; elaborar un método original en un problema de investigación real, es decir, un problema para el cual no se tiene, por el momento, ninguna solución adquirida; elaborar un cuestionario de un conjunto de datos”*

Finalmente en el plan de estudios de 2002 se reafirma el vínculo existente entre los problemas y los conocimientos matemáticos, permite a los alumnos construir nuevos conocimientos, y los sitúa en una posición de investigación. A estos problemas de investigación se agregan los problemas de aplicación simple o compleja, destinado a la reutilización de los conocimientos aprendidos, Artigue & Houdement (2007).

Otro matemático francés, Yves Chevallard (1994) también expone diferentes formas de entender y utilizar la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática, que denomina “paradigmas”, alguno de ellos sería el paradigma teoricista, tecnicista, modernista, constructivista... en los que identificamos aprender matemáticas con el aprendizaje de teorías acabadas, o con técnicas especialmente algorítmicas, o con la exploración de problemas no triviales, o la construcción de nuevos conocimientos, respectivamente.

### *Italia*

La enseñanza de las matemáticas en la escuela elemental en Italia, ha estado condicionada durante mucho tiempo por la necesidad de suministrar precozmente a los niños instrumentos indispensables para las actividades prácticas. Con la ampliación de la

educación, ahora existe la posibilidad de afrontar más directamente objetivos de carácter formativo. En la gran mayoría de los países del mundo, se ha orientado hacia la adquisición directa de los conceptos y de las estructuras matemáticas y así ha promovido, también en Italia, una intensa actividad de experimentación.

Un matemático italiano, Passolunghi (2005) elaboró un estudio sobre la influencia que tenía en los problemas aritméticos dar la información redactada o de tipo verbal. Afirmó que los problemas aritméticos redactados podían contener información tanto de tipo literal como numérica, que era irrelevante para la solución del mismo, pero que lo enriquecían a nivel semántico. La información verbal relevante correspondía a datos y relaciones aritméticas (más que, menos que, igual a...) y la información verbal irrelevante correspondía a frases innecesarias para entender y solucionar el problema, pero que proporcionaban una rica información semántica. La información verbal irrelevante requiere de una elaboración del texto más prolongada y más semántica, pero inservible, mientras que la información aritmética reúne elementos que pueden ser utilizados durante la solución del problema.

Existe un consenso generalizado entre maestros y profesores de matemáticas que consideran que los problemas aritméticos expresados en palabras presentan mayor dificultad que los expresados numéricamente. Igualmente también coinciden en destacar la dificultad que acarrea la solución de un problema matemático verbal.

Andrich Silvia y Miato Lidio (2008) elaboran una tabla con ocho estrategias cognitivas y metacognitivas para la resolución de problemas en matemáticas.

1. **Lectura atenta.** Lectura silenciosa y comprensiva que favorecerá la comprensión del problema.
2. **Previsión.** Hacerse una idea de los resultados finales de nuestras acciones resolutivas.
3. **Paráfrasis.** Definir el problema con nuestras propias palabras.
4. **Visualización.** Transformar el problema en un dibujo o en un diagrama.
5. **Planificación.** Trazar un plan para resolver el problema.
6. **Estimación.** Hacer una previsión respecto al resultado probable.
7. **Producción.** Hacer bien los cálculos de las operaciones aritméticas.
8. **Evaluación.** Asegurarse de que todo sea correcto.

Con este método en cada fase se utilizan tanto estrategias cognitivas (aprenderse nombres asociados a descripciones simples, por ejemplo: lectura atenta = lee para entender; previsión = prevee los resultados de su trabajo), como metacognitivas (trata de

darse autoinstrucciones del tipo: “ahora leo el problema, si no lo entiendo lo leo otra vez, subrayo los datos, hago una previsión de mi trabajo final, subrayo la información más importante, traduzco el texto a mis propias palabras, decido cuáles son las operaciones necesarias para resolver el problema”).

Una vez expuesto en el trabajo el marco teórico necesario para el análisis de la resolución de problemas, donde se analizó tanto a los niños como a los problemas y sus fases, y también se ha visto el marco empírico en el cual hemos estudiado distintas técnicas y estrategias, ya sean de distintas épocas o de diferentes lugares en el mundo, a continuación se va a pasar a las conclusiones que se pueden sacar de dicho trabajo.

## 4. CONCLUSIONES

La conclusión de mi trabajo la realizaré en función del grado en que se hayan ido logrando los objetivos propuestos en el mismo, explicando la manera en que se ha obtenido la información para cada uno y la metodología empleada para ello.

En primer lugar quisimos estudiar el desarrollo psicopedagógico de los niños a la edad del estudio, y lo conseguimos recurriendo a dos de los más grandes psicólogos de la historia, como son Piaget (1985) y Vigotsky (1978), a través de sus teorías, la primera basada en el desarrollo cognitivo de los niños en la infancia (Piaget), y la segunda basada en las interrelaciones que tienen los niños con los adultos y con su entorno (Vigotsky). Gracias a ello, pudimos enfocar qué tipos de problemas podrían estar al alcance de los alumnos de esas edades, y cuales serían inalcanzables por no haber adquirido todavía las capacidades necesarias para su comprensión. Como aprendizaje del estudio de las dos teorías podríamos decir que a nuestros alumnos debemos plantearles problemas sencillos, con materiales tangibles y partiendo siempre de conocimientos que ellos ya posean para ir poco a poco ampliándoselos.

En cuanto a las dificultades que podían presentar los alumnos en la resolución de problemas, tras estudiar las teorías de varios matemáticos extrajimos algunos puntos donde podían aparecer esas dificultades, para Carpenter y Moser (1982) la clave estaba en el lugar donde aparecía la incógnita dentro del enunciado del problema, para Puig y Cerdán (1988) lo importante era la manera de presentar las cantidades o el tamaño de los números, entre otros. Juídias (2007) por el contrario, más que centrarse en el problema, destaca como clave los conocimientos lingüísticos y semánticos del alumno, y para Villa y Callejo (2009), también centrado en el alumno, lo importante era la predisposición que éste tuviese y el nivel de autoconfianza en sí mismo. A partir de estas posibles dificultades que pueden aparecer, nosotros como maestros, lo que intentaremos será que en los problemas planteados al principio del curso la incógnita coincida con el resultado final, ya que son más sencillos de resolver, más adelante lo variaremos, otra cosa que tendremos en cuenta será empezar con números pequeños para ir aumentándolos progresivamente, será importante que la lingüística empleada en los enunciados estemos seguros de que nuestros alumnos ya la tienen adquirida y entienden perfectamente el significado completo del enunciado, y para finalizar no nos cansaremos de dar refuerzos positivos a nuestros alumnos para que crean en ellos mismos y ganen en autoconfianza.

En lo que respecta a las corrientes pedagógicas o de pensamiento, analizamos cinco de las más importantes, las estrategias heurísticas las vimos a través del libro y de las publicaciones realizadas por Polya (1965), la visión antropológica la analizamos partiendo de los procesos de modelización, para las pedagogías constructivistas consultamos teorías de Larios (2000), Alsina (2007) y Guzman (2007), el conductismo lo encontramos en Perales (1993) y también en Gonzalez (1981), y finalmente, el cognitivismo fue estudiado partiendo del modelo de estados de Newel y Simon (1972) y de la propuesta realizada por Ausubel (1976). A pesar de ser propuestas que en algunos casos distan muchos años entre ellas o con visiones distintas de la manera de concebir el comportamiento humano en general, todas ellas tienen un eje común que podríamos resumir en 4 fases: entendimiento del problema, planteamiento de resolución, ejecución y revisión. Son las 4 fases en las que tendremos que trabajar con nuestros alumnos para que una vez dominadas cada una de ellas les permita resolver los problemas que se les planteen de manera satisfactoria.

Otro de nuestros objetivos era bucear en la matemática española y conocer algunos de los estudios que nuestros matemáticos habían realizado sobre la resolución de problemas. De esta manera hemos repasado los consejos que nos daba García (2002) en su libro, las etapas que publicó Echenique (2006) basadas en las fases de Polya (1949), las cuatro cuestiones fundamentales enunciadas por Guirles (2005), y para acabar el modelo de Guzman (1991) con sus cuatro fases necesarias para la resolución de un problema. De los cuatro estudios cabría destacar por tener un enfoque distinto a los demás el realizado por García (2002) donde nos invitaba con una serie de estrategias a plantearles los problemas de una manera novedosa y atractiva a nuestros alumnos, alejada del típico enunciado escrito u oral con una pregunta y búsqueda de la solución.

Como último de los objetivos específicos que pretendíamos conseguir en este trabajo, estaba el de conocer estrategias y metodologías de distintos países que no tuviesen muchas semejanzas entre ellos pero que sí que fuesen punteros en el campo de las matemáticas a nivel mundial. Para ello, los elegidos fueron Mexico y Cuba, como representación de países latinoamericanos, EEUU por su inversión en la investigación matemática y el reconocimiento por parte de sus habitantes de la materia, Francia por la gran cuna de destacados matemáticos franceses que salen de sus escuelas, concretamente de la de París, y finalmente Italia por los matemáticos que ha dado el país

a lo largo de la historia. Dichos estudios nos han dado la oportunidad de aprender varios ítems o cuestiones que tendríamos en cuenta a la hora de valorar una prueba o un estudio que hiciésemos con nuestros alumnos en la práctica.

El trabajo nos ha permitido recorrer, analizar, comparar y estudiar muchas de las teorías, modelos y estrategias utilizados por todo el mundo y a lo largo de todas las épocas, lo que ha hecho que tengamos una visión más amplia de la resolución de problemas, y tengamos muchos recursos para aplicar en nuestro aula cuando nos encontremos con dificultades por parte de los alumnos.

## 5. LIMITACIONES Y PROSPECTIVA

A la hora de realizar el trabajo nos han ido surgiendo una serie de dificultades o contratiempos con los que no contábamos al principio y que en algunos momentos ha hecho que replanteemos en algunos aspectos la idea del trabajo o que cambiásemos algunas perspectivas del mismo.

Por ejemplo, mi idea era buscar en cada currículo educativo de los distintos países seleccionados el plan o la metodología sugerida para abordar la resolución de problemas, y me he encontrado que dichas directrices no aparecen en ninguno de ellos, por lo que el trabajo se ha dirigido a estudiar las propuestas de matemáticos o investigadores de esos países, sin tener la certeza realmente de si sus técnicas son seguidas por los alumnos que cursan en las escuelas de su territorio.

Por supuesto, el problema del idioma ha sido otro impedimento, porque a la hora de buscar documentación de un país dónde no compartimos el mismo idioma, los artículos traducidos al español son muy pocos en comparación con la totalidad de los estudios realizados.

Otra de las cosas que se te ha tenido que prestar especial atención, es que muchas de las investigaciones y estudios que existen acercan de la resolución de problemas son muy a nivel general, y no hay tantos al nivel de los niños de primaria que comienzan a realizar sus primeros problemas, por lo que se han tenido que descartar muchos artículos, y buscar aquellos que eran más específicos de nuestra etapa y ciclo.

A raíz de realizar este trabajo y ver las distintas metodologías y posibilidades que hay de resolver problemas, lo que me gustaría, ya como prospectiva, es solicitar a las personas que programan las asignaturas de los grados de magisterio, que el tema de la resolución de problemas ocupara un lugar y un espacio amplio dentro de la asignatura de didáctica de las matemáticas, no estoy seguro cual es el tratamiento que se da ahora en los grados, pero cuando yo las cursé con el plan antiguo considero que la formación que se nos dio en cuanto a este apartado tan importante dentro de enseñanza de las matemáticas, fue insuficiente.

Por los años de experiencia que llevo como docente, he asistido y he sido informado de multitud de seminarios y cursos de formación de asignaturas como educación física, lengua extranjera..., temas como las nuevas tecnologías, la atención a la diversidad, y muy pocas veces, los ha habido de didáctica de las matemáticas, siendo una asignatura

fundamental para la formación integral de los alumnos, y que teniendo amplios conocimientos sobre ella, los profesores contaría mos con miles de recursos para hacerla más amena y más divertida a nuestros alumnos y sobre todo más efectiva. Este año dando clase por primera vez en el primer ciclo, cada vez que tocaba enseñar algo nuevo, buscaba en Internet la manera de presentarlo de una manera atractiva a mis alumnos, y en la red encontraba gran cantidad de juegos, materiales y recursos fáciles de utilizar en clase y que daban unos resultados asombrosos.

Este trabajo me ha dado la posibilidad de llevar a la práctica varios de los modelos estudiados, y he comprobado que han servido para que mis alumnos adquieran destrezas hasta ahora no observadas en la resolución de problemas matemáticos.

Es un campo tan abierto dentro de las matemáticas dónde esperemos que se siga investigando y se sigan practicando nuevos métodos con el fin de que los alumnos del mañana tengan incluso más aprovechamiento de la resolución de problemas para su vida diaria de lo que ya se puede tener hoy en día.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Alsina, C. y otros (1996): *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/38/023-029.pdf>

Artigue, M y Houdelement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectivas. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp. 365-382. Recuperado de [http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion\\_de\\_problemas.pdf](http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion_de_problemas.pdf)

Ausubel, D.P. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas. Recuperado de <http://www.slideshare.net/crisramirezrzaaprendizaje-significativo-de-ausubel-4829800>

Borasi, R. (1986): On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, Nº 17, pp. 125-141. Recuperado en <http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf>

Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Nº 7, pp. 33-115. Recuperado de <http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf>

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982): *The development of addition and subtraction problem-solving skills*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado de [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso)

Charles, R. y Lester, F. (1982): *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymor Pub.

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1, La Habana: Educación Cubana. Recuperado de [http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion\\_de\\_problemas.pdf](http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion_de_problemas.pdf)

Dewey, J. (1888): Modelo consultado en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf>

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas. Educación Primaria.* Pamplona: Gobierno de Navarra. Departamento de Educación.

Fernández, J. A. (2000). *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos.* Barcelona: Cisspraxis.

García, J. (2002): Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. UNO, *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, pp. 20-38. Recuperado de [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso)

Guirles J. R. (2005): La resolución de problemas en Primaria. Artículo *Revista SIGMA*, Nº 27. Recuperado de [http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_27/2\\_resolucion\\_primaria.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_27/2_resolucion_primaria.pdf)

Guzman, M. de (1989): Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, en *Revista de Ciencias de la Educación*, nº 21, pp. 19-26

Guzman, M. de (1991): *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor. Recuperado de [http://www.rmm.cl/index\\_sub3.php?id\\_contenido=11964&id\\_seccion=4241&id\\_portal=635](http://www.rmm.cl/index_sub3.php?id_contenido=11964&id_seccion=4241&id_portal=635)

Juídias, J. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, pp. 257-286.

Larios, V. (2000). Constructivismo en tres patadas. *Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas.* Año 1, Nº 1.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006.

Mayer, R. E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona, Paidós. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/082-090.pdf>

Newel, A. y Simon, H. (1972): *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.  
Recuperado de [http://books.google.es/books?id=vTDhdJ-0IDAC&pg=PA29&lpg=PA29&dq=cognitivismo+resolucion+de+problemas&source=bl&ots=POjyFmn-5D&sig=lKUhWLGjSa4rfILnKyU9hOJGI7k&hl=es-419&sa=X&ei=0Sp7U\\_PzAsGa0AX1u4GwDw&ved=0CDQQ6AEwAQ#v=onepage&q=cognitivismo%20resolucion%20de%20problemas&f=false](http://books.google.es/books?id=vTDhdJ-0IDAC&pg=PA29&lpg=PA29&dq=cognitivismo+resolucion+de+problemas&source=bl&ots=POjyFmn-5D&sig=lKUhWLGjSa4rfILnKyU9hOJGI7k&hl=es-419&sa=X&ei=0Sp7U_PzAsGa0AX1u4GwDw&ved=0CDQQ6AEwAQ#v=onepage&q=cognitivismo%20resolucion%20de%20problemas&f=false)

Perales, F. J. (1993): La resolución de problemas en ciencias y matemáticas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, pp. 170-179.

Piaget, J. (1958): *The Language and thought of the Chile*. New York: Meridian Books.  
Recuperado de <http://www.psicopedagogia.com/articulos/?articulo=379>

Poggioli, L. (1999): *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Caracas: Fundación Polar. Recuperado de [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso)

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf>

Polya, G. (1962): *Mathematical Discovery*. Nueva York: Wiley. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/082-090.pdf>

Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. Recuperado de [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso)

Puig, L. y Cerdán, F. (1988): *Problemas matemáticos escolares*, Madrid, Síntesis. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf>

Real Decreto del Ministerio de Educación y Ciencia 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 293 de 8 de diciembre de 2006.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1995): Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 2, núm. 2-3, noviembre, 1999, pp. 31-45. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa%3Fid%3D33520304>

Schoenfeld A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: LEA.  
Recuperado de  
[http://www.rmm.cl/index\\_sub3.php?id\\_contenido=11964&id\\_seccion=4241&id\\_portal=635](http://www.rmm.cl/index_sub3.php?id_contenido=11964&id_seccion=4241&id_portal=635)

Sowder, J. (1989). *Setting the agenda for mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vigotsky, L. (1978): *Interaction between learning and development*. Cambridge: Harvard University Press. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf>

Vila, A. y Callejo, M. L. (2009): *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

#### **Otras páginas web consultadas:**

<http://www.madrimasd.org/cienciaysociedad/entrevistas/quien-es-quien/pdf/178.pdf>

<http://revistasuma.es/IMG/pdf/23/069-084.pdf>

<http://biblioteca2.ucab.edu.ve/anexos/biblioteca/marc/texto/AAQ9071.pdf>

[http://e-spacio.uned.es/fez/eserv.php?pid=bibliuned:20451&dsID=conocimiento\\_practico.pdf](http://e-spacio.uned.es/fez/eserv.php?pid=bibliuned:20451&dsID=conocimiento_practico.pdf)