



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

# Enseñanza de funciones y gráficas en 1º Bachillerato basado en el uso de *GeoGebra*

**Presentado por:** Lucía Garijo Alonso

**Línea de investigación:** Métodos pedagógicos (Matemáticas)/  
Recursos educativos (TIC)

**Director/a:** Dr. Pedro Viñuela Villa

**Ciudad:** Barcelona

**Fecha:** 5 de junio de 2014

## RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología basada en el uso de *GeoGebra* como recurso didáctico. El trabajo se estructura en tres partes bien diferenciadas. En primer lugar, se presenta un marco teórico que documenta la situación actual del problema y las directrices que la normativa plantea para la docencia de las matemáticas. Posteriormente, se plantea un estudio de campo consistente en una encuesta dirigida a profesores de matemáticas de 1º de Bachillerato que posibilita acercarse a la problemática actual de la docencia de las matemáticas y contrastar los datos recogidos con los supuestos de partida. Finalmente, se ha diseñado una propuesta didáctica para dotar a las clases de matemáticas de un carácter mucho más práctico y visual con ayuda del software *GeoGebra*, en concreto las clases de funciones de Matemáticas I por su conexión con la vida real y base para la comprensión de los posteriores temas de análisis. Se llega a la conclusión de que una enseñanza del tema de funciones apoyada en la utilización de *GeoGebra* para explicar situaciones reales puede contribuir a despertar el interés por la materia y a mejorar el rendimiento de los alumnos. Finalmente, se plantean algunas líneas de investigación futuras, como ampliar la propuesta metodológica a otras áreas de las matemáticas y a otros niveles educativos.

*Palabras Clave:* *GeoGebra*, TIC, Matemáticas, Funciones, 1º Bachillerato.

## ABSTRACT

The main objective of this work is to present a teaching method for graphs and functions to students of 1<sup>st</sup> level of Bachelor of the modality of Science and Technology. It is based on the application of software *GeoGebra*. The work is structured in three different parts. Firstly, a literature to document the actual drawbacks of the teaching of mathematics and know the guidelines that legislation poses is presented. After this, a field study consisted on a survey for Mathematics teachers of first level of bachelor is shown. The objective is to reach a better approach to the actual situation of the math teaching and compare the collected data with the assumptions. Finally, a proposal is designed to equip teaching math classes with a much more practical and visual character by using software *GeoGebra*. It is specially thought for a class about functions and graphs in Mathematics in relationship with real life basis. It concludes that the teaching of graphs and functions, based on the application of *GeoGebra* as a complementary tool can help to arouse interest in the subject and improve student performance. Finally, some lines of future research are presented, such as extending the application of the aforementioned teaching method to the two courses of Bachelor, or even the Secondary and Primary levels.

*Key words:* *GeoGebra*, ICT, Mathematics, Functions, 1<sup>st</sup> Bachelor.

# TABLA DE CONTENIDOS

1.	INTRODUCCIÓN .....	6
2.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	8
2.1	Definición del problema .....	8
2.2	Objetivos .....	8
2.3	Metodología .....	9
2.4	Justificación de la bibliografía.....	11
3.	MARCO TEÓRICO .....	12
3.1	Marco Legal .....	12
3.1.1	Las Matemáticas en la legislación.....	12
3.1.1.1	La LOE.....	12
3.1.1.2	La LOMCE .....	13
3.1.1.3	El Real Decreto 1467/2007 y el Decret 142/2008 .....	13
3.1.2	Las TIC en la legislación.....	16
3.1.2.1	La LOE.....	16
3.1.2.2	La LOMCE .....	16
3.1.2.3	El Real Decreto 1467/2007 .....	16
3.2	Dificultades de los alumnos en la competencia matemática.....	16
3.2.1	Las cifras de la competencia matemática en España .....	17
3.3	El aprendizaje de funciones y gráficas.....	18
3.3.1	Importancia del concepto de función.....	18
3.3.2	Dificultades de aprendizaje de funciones y gráficas.....	19
3.4	Las TIC en la educación .....	22
3.4.1	Uso de las TIC en matemáticas: los softwares de geometría dinámica....	22
3.4.2	<i>GeoGebra</i> como herramienta de aprendizaje .....	23
3.4.2.1	Los fundamentos de <i>GeoGebra</i> .....	23
3.4.2.2	Ventajas y desventajas del uso de <i>GeoGebra</i> en educación .....	25
3.4.2.3	Prestaciones de <i>GeoGebra</i> .....	25
3.4.2.4	Percepciones de <i>GeoGebra</i> por parte de los profesores de matemáticas 26	
4.	ESTUDIO DE CAMPO .....	28
4.1	Introducción .....	28
4.2	Justificación.....	28
4.3	Objetivos .....	28
4.4	Marco contextual del estudio de campo .....	29
4.5	Metodología .....	31
4.6	Análisis de los resultados.....	34
4.7	Conclusiones del estudio de campo .....	39
5.	PROPUESTA DIDÁCTICA .....	41

5.1	Contenidos .....	41
5.2	Objetivos de la propuesta didáctica .....	42
5.3	Criterios de evaluación de la propuesta didáctica .....	42
5.4	Metodología .....	42
5.4.1	Recursos .....	42
5.4.2	Objetivos .....	43
5.4.3	Actividades .....	43
5.4.4	Desarrollo de la propuesta .....	43
5.4.5	Primera sesión: el concepto de función .....	46
5.4.6	Cuarta sesión: Tipologías de funciones.....	49
6.	APORTACIONES DEL TRABAJO .....	53
7.	DISCUSIÓN .....	54
8.	CONCLUSIONES .....	55
9.	LIMITACIONES DEL TRABAJO .....	57
10.	LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS.....	58
11.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59
11.1	Bibliografía utilizada .....	59
11.2	Bibliografía complementaria.....	64
12.	ANEXO I: CUESTIONARIO.....	65
13.	ANEXO II: RESULTADO DEL CUESTIONARIO .....	68

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro N° 1. Bloques de contenidos de Matemáticas de 1º de Bachillerato. ....	14
Cuadro N° 2. Contenidos de Análisis de 1º de Bachillerato. ....	14
Cuadro N° 3. Criterios de evaluación contemplados por el Real Decreto 1467/2007 y por el Decret 142/2008. ....	15
Cuadro N° 4. Criterios de evaluación contemplados únicamente por el Decret 142/2008. ....	15
Cuadro N° 5. Tendencias de los resultados del informe PISA. ....	17
Cuadro N° 6. Comparativa de los programas de geometría dinámica. ....	23
Cuadro N° 7. Ventajas y desventajas del uso de GeoGebra en el aula. ....	25
Cuadro N° 8. Aplicaciones más destacadas del software GeoGebra. ....	26
Cuadro N° 9. Marco contextual del estudio de campo. ....	30
Cuadro N° 10. Resumen del cuestionario con opciones y justificación. ....	32
Cuadro N° 11. Contenidos de la propuesta didáctica. ....	41
Cuadro N° 12. Objetivos de la propuesta Didáctica. ....	42
Cuadro N° 13. Criterios de evaluación de la propuesta didáctica. ....	42
Cuadro N° 14. Metodología, recursos y temporalización de las sesiones. ....	44
Cuadro N° 15. Explicación y representación de las tipologías de funciones. ....	50
Cuadro N° 16. Relación de respuestas del cuestionario de la encuesta. ....	68

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura N° 1.</i> Ejemplo de confusión entre las características físicas de un contexto real con la gráfica de una función. ....	21
<i>Figura N° 2.</i> Ejemplo de confusión de la gráfica de “velocidad” por la de “posición”. ...	21
<i>Figura N° 3.</i> Vista de la interface de GeoGebra con sus tres representaciones posibles. ....	24
<i>Figura N° 4.</i> Conceptualización de GeoGebra como software y como Comunidad de investigadores. ....	25

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico N° 1. Pregunta 1 del cuestionario. ....	34
Gráfico N° 2. Pregunta 2 del cuestionario. ....	34
Gráfico N° 3. Pregunta 3 del cuestionario. ....	35
Gráfico N° 4. Pregunta 4 del cuestionario. ....	35
Gráfico N° 5. Pregunta 5 del cuestionario. ....	35
Gráfico N° 6. Pregunta 7 del cuestionario. ....	36
Gráfico N° 7. Pregunta 8 del cuestionario. ....	36
Gráfico N° 8. Pregunta 9 del cuestionario. ....	37
Gráfico N° 9. Pregunta 10 del cuestionario. ....	37
Gráfico N° 10. Pregunta 11 del cuestionario. ....	37
Gráfico N° 11. Pregunta 12 del cuestionario. ....	38
Gráfico N° 12. Pregunta 13 del cuestionario. ....	38
Gráfico N° 13. Pregunta 14 del cuestionario. ....	38
Gráfico N° 14. Pregunta 15 del cuestionario. ....	39
Gráfico N° 15. Representación de una función junto con su dominio, recorrido, variable dependiente e independiente. ....	47
Gráfico N° 16. Conceptos de imagen y anti-imagen de una función. ....	47
Gráfico N° 17. Ejercicio sobre el concepto de función. ....	48

# INTRODUCCIÓN

La realización de las prácticas que el currículum del presente Máster universitario en Formación del Profesorado de Secundaria contempla, han sido desarrolladas con alumnos de 1º de Bachillerato de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Durante la realización de las mismas, se pudo comprobar las dificultades de los alumnos para el aprendizaje de funciones y gráficas. Al mismo tiempo y según aseguran Carlson y Oethrtman (2005), el concepto de función es esencial en cualquier área de ámbito científico. Una adecuada comprensión de este concepto resulta esencial para todo estudiante que quiera introducirse en el mundo del cálculo así como para cualquier futuro científico, ingeniero o matemático.

Al mismo tiempo, según el informe PISA (OCDE, 2003, p.5), “los alumnos españoles de 15 años muestran un rendimiento en matemáticas 15 puntos por debajo del promedio de la OCDE, fijado en 500 puntos”. Esta diferencia es estadísticamente significativa. En cuanto a la solución de problemas, España ocupa el puesto 27. En la misma línea, el informe TIMSS 2011 (Mullis, Martin, Foy y Alka, 2012) indica que España ocupa el puesto número 32 en resultados de matemáticas, siendo los tres primeros Singapur, Corea del Sur y Hong Kong. Los bajos resultados en matemáticas de los alumnos españoles en dichos informes internacionales ponen en evidencia la existencia de una serie de dificultades y problemas de aprendizaje que merecen ser estudiados y analizados.

Por otra parte, el impacto actual de las tecnologías de la información y de la comunicación es de tal envergadura que parece necesario incluir estos recursos en la educación y la formación para lograr el desarrollo cohesionado de la sociedad de la información; es decir, para evitar que nadie se quede al margen de la nueva era de la información.

Teniendo en cuenta todo lo dicho, se puede concluir que, por un lado, parece necesario un cambio metodológico en la asignatura de matemáticas con el fin de mejorar la motivación y resultados del alumnado. Por otro lado, parece urgente la necesidad de incluir las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje de nuestro sistema educativo actual.

El presente trabajo trata de dar respuesta a estas dos necesidades: se plantea una propuesta metodológica que trata de motivar y despertar el interés del alumnado por medio de la incorporación de un recurso TIC como herramienta didáctica en el aula: el software de geometría dinámica *GeoGebra* (GeoGebra, 2013). El tema en el que nos centramos será *la resolución y representación de funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología* con el fin de dar

respuesta a las dificultades de aprendizaje halladas en este tema durante la realización de las prácticas. El objetivo final es aprovechar las potencialidades de este software citadas por Miranda (2006) para crear un aula más dinámica e interactiva al tiempo que se realiza una representación de funciones más precisa y con mejor aprovechamiento de tiempo.

La propuesta metodológica presentada en el presente trabajo puede ampliarse a la docencia completa de las matemáticas en Bachillerato y en otros ciclos educativos como ESO y Primaria.

# **1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

## **1.1 Definición del problema**

El presente trabajo trata de dar respuesta a los *problemas de aprendizaje de la resolución y representación de funciones* observados durante la realización de las prácticas con alumnos de Matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología.

En efecto, según Carlson y Oethrtman (2005), la asimilación del concepto de función entraña enormes dificultades. Incluso comprender una función en términos de variable dependiente e independiente puede ser un reto para muchos estudiantes.

Desde 1883, instituciones y personalidades de renombre en el mundo de la docencia (College Entrance Examination Board, 1959; Hamley, 1934; Hedrick, 1922; citados en Carlson y Oethrtman, 2005), han declarado la necesidad de enfatizar la importancia del concepto de función en el aula. La mayor parte de los estudiantes finalizan los ciclos de enseñanzas medias con una comprensión muy vaga de este concepto (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Cooney y Wilson, 1996; Thompson, 1994a; citados en Carlson y Oethrtman, 2005). Es ahora cuando se está empezando a entender que los procesos de enseñanza-aprendizaje necesarios para una comprensión sólida del concepto de función son más complejos que lo que muchos docentes han considerado (Breidenbach et al., 1992; Carlson, 1998; Thompson, 1994a).

Parece necesario, por tanto, analizar estas dificultades en el aprendizaje del concepto de función y plantear una propuesta metodológica que, centrándose en la resolución y representación gráfica de funciones, motiven y despierten el interés del alumnado. En el presente trabajo se plantea el uso del software de geometría dinámica *GeoGebra* como herramienta didáctica para apoyar esta propuesta metodológica. Con ello, se busca alcanzar los siguientes objetivos:

1. Plantear una propuesta para la superación de las dificultades de aprendizaje del concepto de función
2. Despertar la motivación interés del alumno por la materia
3. Fomentar el dinamismo e interactividad del aula

La propuesta metodológica planteada en el presente trabajo podría implementarse en diversos centros y a lo largo de repetidas ocasiones para analizar y corroborar su adecuación o, incluso, para pensar propuestas de mejora.

## **1.2 Objetivos**

El objetivo principal del presente trabajo es:

*Presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias y Tecnología basada en el uso de GeoGebra como recurso didáctico.*

Los objetivos específicos que se buscan conseguir con el presente trabajo son los siguientes:

- a. Explicar las principales dificultades que enfrentan los alumnos de 1º de Bachillerato en el aprendizaje de funciones y gráficas.
- b. Realizar un análisis teórico de las principales causas de dichas dificultades en materia de análisis matemático.
- c. Averiguar y exponer las principales aplicaciones y prestaciones de *GeoGebra* como herramienta para trabajar la resolución de funciones en el aula, con alumnos de 1º de Bachillerato.
- d. Realizar un estudio de campo consistente en una encuesta a profesores de matemáticas de Bachillerato para contrastar los resultados con lo analizado en el estudio teórico.

### **1.3 Metodología**

La metodología específica del trabajo es el resultado de combinar y complementar una investigación bibliográfica y un estudio de campo.

La bibliografía utilizada (online y libros) ha sido seleccionada para cumplir las necesidades específicas de cada una de las fases que a continuación se describen. Se ha utilizado bibliografía de verificada calidad, basada principalmente en libros de editoriales e informes internacionales relacionados con el mundo de la educación (la mayoría de ellos obtenidos de la facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Barcelona). Los principales criterios de búsqueda y selección bibliográfica utilizados se han basado en la difusión e importancia que cada referencia tiene en el mundo de la educación. Se han empleado, especialmente, libros altamente conocidos en el mundo de la educación y la pedagogía, redactados por autores de reconocido renombre y prestigio.

También se ha realizado un minucioso estudio de campo basado en el desarrollo de encuestas a profesores de matemáticas de bachillerato para averiguar, entre otras cosas, el nivel de los alumnos en competencia matemática o el grado de uso de determinados softwares de geometría dinámica.

Las fases de realización del trabajo se pueden estructurar en las siguientes:

- 1) *Primera fase: inicio del marco teórico, estudio de informes internacionales y del marco legal.* Entre los informes que se han estudiado destacan el informe PISA (2012) y el TIMSS (2013). De igual manera, se ha dado gran relevancia al marco

legal, explorando las competencias matemáticas según la LOE (Ley Orgánica de Educación), la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa), y la legislación propia de Bachillerato, el *Real Decreto 1467/2007* a nivel nacional y el *Decret 142/2008* en Cataluña.

- 2) *Segunda fase: terminación del marco teórico.* Una vez conocido el marco legal, se ha realizado un análisis teórico sobre dos realidades principales: las dificultades de los alumnos para la competencia matemática y el uso de determinados softwares de geometría dinámica como *GeoGebra* en clase. Con este propósito, se han empleado libros de la biblioteca de la Facultad de Formación del Profesorado (Campus de Mundet de Barcelona), así como artículos o informes internacionales obtenidos de la web.
- 3) *Tercera fase: Estudio en profundidad del fundamento de GeoGebra.* Se han analizado los fundamentos de este programa informático, especialmente su filosofía de creación y su aplicación a la práctica docente. Tras investigar sus ventajas e inconvenientes, se concluye que la aplicación de este software en los procesos de enseñanza-aprendizaje permite un mayor dinamismo, interactividad, precisión y ahorro de tiempo. En definitiva, fomenta el interés y motivación del alumnado al tiempo que se aprovecha mejor el tiempo en la representación y resolución de funciones y gráficas. Todo ello, unido a su manejo sencillo y a su facilidad de adquisición hacen que su aplicación en el aula como recurso didáctico sea altamente recomendable.
- 4) *Cuarta fase: Estudio de campo.* Se han realizado una serie de encuestas para complementar el estudio teórico previo. Las preguntas de los cuestionarios, dirigidas a profesores de 1º de Bachillerato, tratan de las dificultades de los estudiantes a la hora de resolver problemas de funciones y del empleo de las TIC, concretamente de *GeoGebra*, en el aula. El cuestionario es de pregunta cerrada y se ha realizado con 24 profesores de distintos centros mediante visita previa a los mismos o a través de llamadas telefónicas. Se han realizado encuestas en centros públicos, privados, concertados y con distintos tipos de realidades sociales (en el centro urbano, en la periferia, en barrios altos, medios y bajos) con el fin de lograr una muestra lo más representativa posible dentro de la provincia de Barcelona.
- 5) *Quinta fase: Realización de la propuesta didáctica.* Esta fase recoge toda la información previa recopilada así como los conocimientos nuevos adquiridos. Se ha realizado sobre la resolución y representación gráfica de funciones por parte de alumnos de 1º de Bachillerato empleando *GeoGebra* como herramienta didáctica.

## 1.4 Justificación de la bibliografía

La investigación bibliográfica ha consistido en un análisis de libros y artículos sobre didáctica de las matemáticas y de cómo enfrentarse a las dificultades de aprendizaje de las funciones en 1º de Bachillerato. Se han empleado informes realizados en fechas recientes por diferentes organismos nacionales e internacionales como el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte y la OCDE (concretamente el Informe PISA 2012) con el fin de contextualizar la situación actual de la educación. Igualmente, se ha analizado el informe TIMSS 2011 (Mullis, Martin, Foy y Alka, 2012), también de carácter internacional. Según ambos informes, España se sitúa por debajo de la media en cuanto a competencia matemática se refiere.

Para el estudio del marco legal, tanto en la educación de matemáticas como en el uso de las TIC, las referencias principales han sido la LOE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2006), el Real Decreto 1631/2006 (Ministerio de Educación, 2007), el Decret 142/2008 (DOGC, 2008) y la LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). De todas estas leyes, se han tomado algunos principios generales, objetivos y principios metodológicos. También referencias a materias de modalidad, los contenidos y criterios de evaluación del currículum de matemáticas en Bachillerato de ciencias así como el uso legal de las TIC en el marco educativo.

Con el fin de analizar las dificultades de los alumnos para el aprendizaje de funciones y gráficas, se ha empleado el artículo de Carlson y Oehrtman (2005), *Key aspects of knowing and Learning the concept of function*. En él se analiza la importancia del concepto de “función” para el estudiante de hoy día, así como los errores más frecuentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución y representación de funciones y gráficas.

Los aspectos del uso de las TIC en educación han sido analizados empleando como referencia el libro realizado por Coll y Monereo (2008), *Psicología de la Educación virtual*. Con ello, se han intentado presentar los usos más comunes de las TIC en educación así como las ventajas principales que se pueden desprender de su aplicación. Del mismo modo, se han presentado los programas de matemáticas y geometría dinámica más frecuentes y se ha realizado una comparativa de sus principales ventajas.

Finalmente, el estudio sobre *GeoGebra* como herramienta didáctica para la representación de funciones se basa en la obra de Hohenwarter & Hohenwarter (2009) que redactaron, entre otras cosas, el manual oficial de la Versión 3.2. Además, se han analizado las características principales del programa y se ha descargado el software gratuito y el manual oficial de la Versión 3.2 para la elaboración de ejercicios de la propuesta didáctica.

## **2. MARCO TEÓRICO**

Este capítulo presenta tres objetivos bien diferenciados: en primer lugar, estudiar el marco legal que regula la enseñanza de las matemáticas en la actualidad así como el uso de las TIC en la educación. En segundo lugar, se hará una investigación teórica sobre los principales problemas que presentan los alumnos a la hora de resolver cuestiones con funciones. Finalmente, se analizarán las necesidades de incorporar las TIC, concretamente el software de geometría dinámica *GeoGebra*, en el proceso de enseñanza-aprendizaje y se estudiarán los fundamentos del mismo como recurso didáctico para la representación de funciones en el aula.

### **2.1 Marco Legal**

El estudio del marco legal es preciso para conocer cuál es la situación actual de la educación. Se estudiará la legislación referente al uso de las TIC en el aula y a la docencia de Matemáticas en Bachillerato. Se analizará la legislación que regula la competencia matemática, la LOE y la LOMCE así como los decretos que lo hacen para el nivel de Bachillerato: el Real Decreto 1467/2007 a nivel nacional y el Decret 142/2008 a nivel de Cataluña, región donde se ha realizado el trabajo.

#### **2.1.1 Las Matemáticas en la legislación**

En este apartado se estudia la legislación que regula la competencia matemática en Bachillerato; se trata de la LOE, la LOMCE, el Real Decreto 1467/2007 y el Decret 142/2008.

##### **2.1.1.1 La LOE**

La LOE (Ley Orgánica de Educación) trata en su artículo 32 sobre los principios generales en Bachillerato. A modo de resumen, éstos tratan sobre la formación y madurez que han de recibir los alumnos, la obligatoriedad de disponer del graduado de ESO para poder acceder a los estudios de Bachillerato, los cursos y modalidades en los que se organiza, los años que pueden permanecer los alumnos cursando Bachillerato en régimen ordinario, y el hecho de que las administraciones públicas promoverán un incremento progresivo de la oferta de plazas (BOE, núm. 106, 2006, p. 17172).

En el artículo 33 trata los objetivos de ciudadanía democrática, madurez personal, igualdad efectiva, hábito de la lectura, etc. (BOE, núm. 106, 2006, p. 17172).

En el artículo 34, la LOE trata temas concernientes a la Organización del Bachillerato, en cuanto a las modalidades que lo componen, las materias comunes, las

de modalidad y las optativas (BOE, núm. 106, 2006, pp. 17172 y 17173). El artículo 35 versa sobre los principios pedagógicos, concretamente sobre las actividades que favorecen la capacidad del alumno para aprender y las que estimulan su interés (BOE, núm. 106, 2006, p. 17173). Los artículos 36, 37 y 38 versan sobre la evaluación y promoción en Bachillerato, el título de Bachiller y la prueba de acceso a la universidad respectivamente.

#### **2.1.1.2 La LOMCE**

Tal y como se ha demostrado en determinados informes Internacionales sobre educación (PISA y TIMSS, por ejemplo), el sistema educativo español presenta ciertas deficiencias. La LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013) es una norma que pretende hacer frente a los problemas más destacados del sistema educativo español.

Los principales objetivos de la LOMCE son: mejorar los resultados educativos, mejorar la empleabilidad y aumentar el espíritu emprendedor del alumnado. Los principios sobre los que se basa la LOMCE son: aumento de la autonomía de centros reforzando la capacidad de gestión de la directiva del centro, aumento de las evaluaciones externas de fin de etapa y la flexibilización de las trayectorias (Ministerio de Educación, 2013).

En cuanto a la asignatura de matemáticas en 1º de Bachillerato, la LOMCE establece en su artículo 34, que “los alumnos deberán cursar Matemáticas I dentro del bloque de asignaturas troncales en la modalidad de Ciencias” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p. 29). Dentro del bloque de asignaturas troncales en la modalidad de Ciencias Sociales, deberán cursar Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ministerio de Educación, 2013, p. 30).

En referencias a la organización de 2º de Bachillerato, la LOMCE establece en su artículo 34 que los alumnos deberán cursar Matemáticas II como materia del bloque de asignaturas troncales en la modalidad de Ciencias (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p.32). De la misma forma, deberán estudiar Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II como materia del bloque de asignaturas troncales en la modalidad de Ciencias Sociales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p.33).

#### **2.1.1.3 El Real Decreto 1467/2007 y el Decret 142/2008**

El Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, establece la estructura del bachillerato y establece sus enseñanzas mínimas a nivel estatal. El Decret 142/2008 lo hace a nivel de Cataluña. En este apartado se establece una comparativa entre el Real

Decreto 1467/2007 y el Decret 142/2008 en cuanto a temas concernientes al currículum de matemáticas en Bachillerato.

Según el Real Decreto 1467/2007 (Ministerio de Educación, 2007) Matemáticas II requiere el conocimiento de Matemáticas I. Además, define el conocimiento matemático como un proceso de trabajo basado en “saber hacer matemáticas”, es decir, consistente en formular ideas anteriores, intuiciones, conceptos, etc.

En cuanto al bloque de contenidos de Matemáticas de 1º de Bachillerato, éste quedaría definido como el que se presenta a continuación:

**Cuadro N° 1. Bloques de contenidos de Matemáticas de 1º de Bachillerato.**

<i>Nivel</i>	<i>Contenido</i>	<i>Contemplado por el Real Decreto 1467/2007</i>	<i>Contemplado por el Decret 142/2008</i>
1. Matemáticas I	1. Aritmética y algebra 2. Geometría 3. Análisis 4. Estadística y Probabilidad	Sí	Sí

*Nota:* Contenidos de Matemáticas de 1º de Bachillerato. Fuente: Decreto 1467/2007 (BOE, núm. 266, 2007, p. 45449-45450) y Decret 142/2008 (DOGC, núm. 5183, 2008, pp.12-13).

Centrándonos en los contenidos de Análisis, el cuadro de contenidos para 1º de Bachillerato quedaría definido como se presenta a continuación:

**Cuadro N° 2. Contenidos de Análisis de 1º de Bachillerato.**

<i>Nivel</i>	<i>Contemplado por el Real Decreto 1467/2007</i>	<i>Contemplado por el Decret 142/2008</i>
1. Matemáticas I	Análisis: 1. Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. 2. Dominio, recorrido y extremos de una función. 3. Operaciones y composición de funciones. 4. Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia, continuidad. 5. Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo. 6. Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	1. Estudio de las características de ciertos tipos de funciones que pueden ser modelos de fenómenos científicos, tecnológicos y sociales. a) Funciones a partir de tablas y gráficas. b) Funciones a trozos. c) Situaciones que mantienen el tanto por uno de variación constante. 2. Interpretación física y geométrica de las tasas de cambio en contextos científicos diversos. a) Tasas medias de cambio b) Cálculo de funciones derivables. c) Uso de calculadoras y programas informáticos que facilitan tanto el cálculo simbólico como la representación gráfica.

*Nota:* Contenidos de análisis de 1º de Bachillerato. Fuente: Decreto 1467/2007 (BOE, núm. 266, 2007, pp. 45449) y Decret 142/2008 (DOGC, núm. 5183, 2008, pp.12-13).

Del mismo modo, tanto el Real Decreto 1467/2007 como el Decret 142/2008, definen los criterios de evaluación para la competencia matemática en Bachillerato. Éstos se presentarían tal y como se plasma en los siguientes cuadros-resumen.

**Cuadro Nº 3. Criterios de evaluación contemplados por el Real Decreto 1467/2007 y por el Decret 142/2008.**

<i>Nivel</i>	<i>Criterios de evaluación contemplados por el Real Decreto 1467/2007</i>	<i>Criterios de evaluación contemplados por el Decret 142/2008</i>
1.	Utilizar correctamente los números reales.	Comprender las ampliaciones sucesivas del conjunto de números.
2.	Saber transferir una situación real a una esquematización geométrica.	Aplicar y saber identificar en problemas prácticos las relaciones entre la descomposición de polinomios y la resolución de ecuaciones polinómicas.
3.	Saber transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones.	Operar con soltura con exponenciales y logaritmos
4.	Identificar las funciones habituales dadas a través de un enunciado.	Saber plantear y resolver problemas prácticos de trigonometría.
5.	Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.	Transcribir situaciones geométricas al lenguaje vectorial bidimensional y hacer servir las técnicas para resolver problemas.
6.	Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.	Transcribir al lenguaje algebraico el concepto de lugar geométrico y saber interpretar las expresiones algebraicas correspondientes.
7.	Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.	Interpretar y utilizar el concepto de función, su expresión algebraica y las operaciones con funciones. Tener la capacidad de traducir al lenguaje de las funciones las situaciones del entorno y, al revés, tener capacidad de construir funciones a partir de datos reales.

*Nota:* Criterios de evaluación Matemáticas de 1º de Bachillerato. Fuente: Decreto 1467/2007 (BOE, núm. 266, 2007, pp. 45452-45453) y Decret 142/2008 (DOGC, núm. 5183, 2008, pp.16-17).

Además de los anteriores, existen unos criterios de evaluación contemplados únicamente por el Decret 142/2008. Los presentamos a continuación.

**Cuadro Nº 4. Criterios de evaluación contemplados únicamente por el Decret 142/2008.**

<i>Nivel</i>	<i>Criterios de evaluación contemplados por el Decret 142/2008</i>
1.	Conocer e identificar los tipos básicos de funciones, así como sus propiedades y distinguir entre las propiedades de los distintos tipos de funciones.
2.	Comprender y saber usar los conceptos ligados a la variación de una función. Saber utilizar en problemas prácticos el concepto de tasa de variación de una función en un punto y ser diestro en el cálculo de funciones derivables sencillas.
3.	Aplicar técnicas sencillas de recuento a situaciones de la vida real. Resolver problemas en los que intervienen los conceptos de probabilidad y dependencia o independencia de acontecimientos, en casos ligados a conceptos elementales de combinatoria.
4.	Interpretar la posible relación entre variables haciendo servir el coeficiente de correlación y la recta de regresión y aplicar los conceptos básicos de la estadística descriptiva a situaciones sencillas.
5.	Utilizar con soltura la calculadora y el ordenador para facilitar los cálculos, representar gráficas y explorar y simular situaciones. Emplear las TIC e interpretar los resultados de una operación automática en el contexto del problema que se está resolviendo.

*Nota:* Criterios de evaluación de Matemáticas de 1º de Bachillerato. Fuente: Decret 142/2008 (DOGC, núm. 5183, 2008, pp.16-17).

### **2.1.2 Las TIC en la legislación**

Del mismo modo que se ha realizado el estudio de la legislación referente al currículo de matemáticas, en este apartado se estudia la legislación educativa en relación al uso de las TIC y a la competencia digital.

#### **2.1.2.1 La LOE**

La LOE hace referencia al empleo de las TIC en el aula en su artículo 33 “Objetivos”, perteneciente al capítulo IV referido a la docencia de Bachillerato. Concretamente, establece el empleo de las TIC como un objetivo: “utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación” (BOE, 2006, núm.106, p. 17172).

#### **2.1.2.2 La LOMCE**

Según la LOMCE, se propone la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza-aprendizaje para fomentar, entre otras cosas, una educación más personalizada a alumnos de bajo rendimiento, expandir los conocimientos transmitidos en el aula y propiciar un cambio metodológico que mejore la calidad educativa. También se propone un uso responsable y ordenado de las mismas.

#### **2.1.2.3 El Real Decreto 1467/2007**

El Real Decreto 1467/2007 hace referencia al empleo de ciertas herramientas tecnológicas como los softwares matemáticos:

Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados, sin dejar de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducir a confusión en sus conclusiones. (BOE núm. 266, 2007, p. 45448).

## **2.2 Dificultades de los alumnos en la competencia matemática**

Este apartado presenta tres objetivos fundamentales. En primer lugar, se analizarán las principales dificultades que presentan los alumnos respecto a la competencia matemática. Se estudiarán los resultados de los últimos informes internacionales al respecto (Informe PISA y TIMSS). Posteriormente, se analizará más en profundidad las principales dificultades que presentan los alumnos para la resolución y representación de funciones, tema del presente trabajo. Finalmente, se analizan las TIC, recurso

educativo que se planteará como mecanismo para superar dichas dificultades de aprendizaje del alumnado.

### 2.2.1 Las cifras de la competencia matemática en España

En este apartado se analizan en profundidad los resultados del informe PISA y TIMSS. El objetivo es conocer la situación del nivel educativo español en matemáticas en comparación con otros países.

#### 2.2.1.1 Informe PISA

El informe PISA es el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (Ministerio de Educación, 2003). Según el último informe PISA (OCDE, 2003, pp. 1-3) los resultados muestran las siguientes tendencias:

**Cuadro N° 5. Tendencias de los resultados del informe PISA.**

1.	El rendimiento en Matemáticas permanece por debajo de la media
2.	La equidad de los resultados educativos ha empeorado desde el 2003. Los alumnos con nivel socio-económico más favorecido superan a los menos favorecidos en 34 puntos, los chicos a las chicas en 16 puntos y los alumnos repetidores presentan 102 puntos menos que los no repetidores.
3.	Los centros en España tienen menos autonomía que la media de la OCDE.
4.	En España el 26% de los alumnos asisten a centros educativos que utilizan programas de tutoría para el profesorado (en la OCDE esta cifra es del 72%).
5.	Existen alrededor de 55 puntos de diferencia entre las comunidades españolas con un mayor y menor rendimiento educativo y esta diferencia se debe, especialmente, a diferencias socio-económicas.
6.	En matemáticas, el rendimiento educativo en España está por debajo de la media de la OCDE, situándose entre los puestos 31 y 36 de los 65 países participantes, con una puntuación de 484 puntos.
7.	Se ha observado una tendencia negativa en el rendimiento de los alumnos en matemáticas.
8.	El rendimiento de excelente en matemáticas está por alrededor del 8%, proporción menor a la media de la OCDE (13%).
9.	Alrededor del 24% de los alumnos españoles están rezagados en matemáticas, proporción similar a la de la OCDE (23%).

*Nota:* Tendencias de los resultados del informe PISA. Fuente: PISA 2003 (OCDE, 2003, pp.1-3).

El Informe PISA también analiza las competencias de los alumnos en las distintas ramas de matemáticas, cuatro bloques. Según los resultados, los alumnos presentan mejores aptitudes en Aritmética (7 puntos por encima de la media), similares en Estadística (2 puntos por encima de la media) y peores resultados en Álgebra (3 puntos por debajo de la media) y Geometría (7 puntos por debajo de la media).

#### 2.2.1.2 Informe TIMSS

TIMSS es un informe internacional sobre el nivel académico de matemáticas y ciencias que se realiza cada cuatro años desde 1995. 63 países participan en él. Se

evalúan dos marcos principalmente; el nivel de conocimientos de los contenidos matemáticos y la dimensión y la capacidad de razonamiento de los alumnos. Ambas dimensiones se analizan en cuarto y octavo nivel académico.

Según este informe, los países que mejores resultados obtienen en competencia matemática son Corea, Singapur y China Taipéi, seguidos de Hong Kong SAR y Japón. España ocupa en 2011 el puesto número 33, cinco puestos por debajo de la media; por debajo de Nueva Zelanda y por encima de Rumanía.

## **2.3 El aprendizaje de funciones y gráficas**

Una vez analizado el marco legal en España en cuanto a competencia matemática se refiere así como los resultados de los informes internacionales PISA y TIMSS en docencia de matemáticas, se presenta, en este apartado, un análisis de la importancia que tiene para los alumnos el estudio del concepto de función así como las principales dificultades para el aprendizaje de funciones y gráficas.

### **2.3.1 Importancia del concepto de función**

El concepto de función es un elemento fundamental de los currículos de matemáticas de la escuela secundaria; su importancia es también notable desde el punto de vista histórico: Newton y Leibniz ya trabajaban con ellas aunque no las nombraban como tales, sino con el nombre de “*curvas y variables*” (Bagni, 2004). Actualmente apelamos al concepto de función cuando expresamos una relación entre dos variables, ya sea en situaciones de la vida cotidiana a través de tablas de valores y textos, como en contextos más académicos por medio de expresiones algebraicas y gráficos de sistemas de coordenadas (González y Martín, 2003). La comprensión de estas funciones matemáticas, de su representación gráfica y del modo en que estas funciones cambian y se relacionan con otras es esencial para poder entender gran parte de los modelos analíticos que constituyen el núcleo sobre el que se basa la docencia de un gran número de asignaturas de facultades españolas e internacionales. A modo de ejemplo, citamos el modelo IS-LM desarrollado por Hicks (1937, citado en del Pópulo et al., 2011) y en el que se basa hoy en día la docencia de las relaciones macroeconómicas de las facultades de Económicas y Empresariales de España (del Pópulo et al., 2011). Gracias a una reciente investigación (del Pópulo et al., 2011), se ha mostrado que los alumnos de segundo curso de Macroeconomía de las Licenciaturas de Economía, de Dirección y Administración de Empresas y de la Doble Titulación de la última con Derecho presentan dificultades de aprendizaje relacionadas con el concepto de función lineal y su representación gráfica. Se demuestra así que es de vital

importancia fomentar una sólida comprensión y aprendizaje del concepto de “función” ya desde el currículum de Secundaria y Bachillerato.

### **2.3.2 Dificultades de aprendizaje de funciones y gráficas**

El tema de funciones y gráficas ha sido tratado durante la realización de las prácticas del presente Máster con alumnos de 1º de Bachillerato de matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Durante la impartición de dichas clases, se ha podido comprobar que los alumnos presentan numerosas dificultades a la hora de comprender el concepto de función así como en la interpretación y representación de sus gráficas.

En efecto, según Carlson y Oethrtman (2005), la asimilación del concepto de función entraña enormes dificultades. Incluso comprender una función en términos de variable dependiente e independiente puede ser un reto para muchos estudiantes. Según diversos autores (Carlson, 1998; Monk y Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994a; citados en Carlson y Oethrtman, 2005), los estudiantes suelen pensar en “funciones” sólo en sentido simbólico o procedimental (como unos valores que se obtienen a partir de otros datos) y son incapaces de abarcar un análisis más global y realista del concepto de función. Además también carecen de una comprensión bien estructurada, capaz de establecer relaciones entre funciones o de visualizar cómo la variable dependiente varía constantemente en función de los valores de la variable independiente (Carlson, 1998; Monk y Nemirovsky, 1994 y Thompson, 1994a). Se ha demostrado que estas aptitudes de razonamiento serían esenciales para una mejor interpretación de las situaciones y contextos reales representados por medio de funciones (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, and Hsu, 2002; Thompson, 1994a, citados en Carlson y Oethrtman, 2005), así como para una comprensión más global de términos fundamentales de matemáticas más avanzadas.

Muchos autores han realizado análisis experimentales sobre las principales dificultades que entraña el aprendizaje del tema de funciones y gráficas en alumnos de matemáticas. Son numerosos los estudios que examinan a los estudiantes acerca de la comprensión que tienen sobre el término de función o de sus representaciones gráficas. Se ha observado que los errores de comprensión e interpretación son numerosos. En rasgos generales, podríamos decir que dichos errores pueden estar asociados al concepto de función, a su representación gráfica o al propio lenguaje analítico.

*Los errores de concepto* son muy habituales en el tema de funciones y gráficas. Como se ha señalado anteriormente, la asimilación del concepto de función entraña enormes dificultades (Carlson y Oethrtman, 2005). De este modo, por ejemplo, Carlson (1998, citado en Carlson y Oethrtman, 2005) ha analizado que cuando se les

pregunta a los alumnos por una función del tipo  $f(x + a)$ , en lugar de sustituir por  $(x + a)$ , lo que hacen es añadir el término  $a$  final de la expresión, es decir, después de haber sustituido. Además, cuando se les pregunta por el razonamiento que han seguido en su respuesta, la mayoría emplea simples reglas memorizadas para apoyar sus argumentaciones y no piensan en  $(x + a)$  como una variable independiente de la función. De una forma similar, o incluso más grave, muchos estudiantes consideran que una función consiste simplemente en dos expresiones separadas por el signo igual (Thompson, 1994b). También es frecuente entre los alumnos confundir una función algebraica con una ecuación (Carlson, 1998, citado en Carlson y Oethrtman, 2005). Esto no es de extrañar si uno considera todos los usos que puede adoptar el signo “igual” y el hecho de que muchos docentes se refieren al término “fórmula” como “ecuación”. Otros muchos estudiantes creen que todas las funciones deberían definirse con una única expresión algebraica, es decir, no contemplarían como tales las funciones definidas a trozos (Breidenbach et al., 1992). Estos errores de concepto podrían asociarse a los *obstáculos* definidos por Socas, Palarea y Ruano (2003) para el lenguaje algebraico, ya que podrían plantearse como un conocimiento erróneamente adquirido, más que como una falta de conocimiento.

Lo que está claro es que todos estos errores de concepto dificultan enormemente el aprendizaje de nuevos términos más avanzados del análisis matemático. Difícilmente un alumno podrá traducir una situación real a lenguaje analítico (en forma de función) si antes no ha comprendido de manera adecuada el concepto de la misma.

Además de las dificultades que entraña el concepto de función, también son muy habituales los *errores asociados a la representación gráfica de las funciones*. Un error muy frecuente que suelen cometer los alumnos es el de considerar que cualquier función con forma de “U” es una parábola (Schwarz and Hershkowitz, 1999). Esta confusión podría corregirse si, al explicar los tipos de funciones, se asocia cada una de ellas con su correspondiente expresión algebraica. Otro problema habitual de entendimiento es el de pensar que las funciones constantes (por ejemplo  $y = 5$ ) no son funciones simplemente porque no varían. Sin embargo, de todos los errores en la representación de funciones, probablemente el más grave sea el de confundir los atributos físicos de un contexto concreto de la realidad con las características propias de la gráfica de la función que lo representa. Es decir, el alumno concibe la gráfica de la función como un “dibujo” de la situación física concreta a la que se refiere, más que como una relación de variables dependientes e independientes (o a la inversa, dado un gráfico de la situación real, lo confunden con la gráfica de la función que se les pide representar) (Carlson, 1998; Monk y Nemirovsky, 1994, citados en Carlson y Oethrtman, 2005). Exponemos a continuación un ejemplo de este tipo de errores. Dado el siguiente gráfico que representa el corte transversal de la montaña que un ciclista ha

de escalar, se pide dibujar una gráfica que represente la velocidad frente a la posición a lo largo de todo el recorrido.

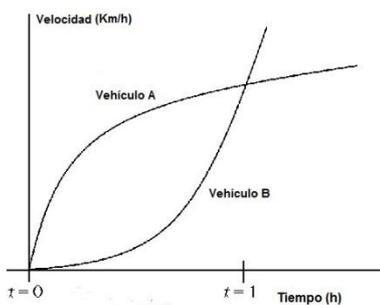


*Figura N° 1.* Ejemplo de confusión entre las características físicas de un contexto real con la gráfica de una función. Fuente: Carlson y Oethrtman (2005).

En respuesta a este problema, muchos estudiantes tienden a copiar directamente el gráfico del recorrido como gráfica de la función (Monk, 1992, citado en Carlson y Oethrtman, 2005). La superación de este error no es un tema trivial, el estudiante debe obviar el hecho de que la figura parezca la gráfica de una función, piense, por ejemplo, cómo la escalada cuesta arriba o cuesta abajo puede afectar a la velocidad del ciclista y represente adecuadamente la gráfica de la función resultante.

En sentido similar, los alumnos también suelen confundir en una gráfica “velocidad” por “posición” (Monk, 1992, citado en Carlson y Oethrtman, 2005). En el siguiente caso, por ejemplo, las curvas representan la velocidad de movimiento de dos vehículos, A y B, pero como se han representado de manera espacial y la “posición” hace referencia a una propiedad espacial, es muy habitual que los alumnos consideren que las gráficas representan la posición de los vehículos y no sus velocidades. Ello hace, por ejemplo, que lleguen a pensar que el coche B alcanza al A entre  $t=0,75$   $t=1h$ .

Este tipo de errores podrían asociarse a los errores que según Socas, Palarea y Ruano (2003) se originan *por actitudes afectivas y emocionales*, es decir, por descuidos, falta de concentración, bloqueos, etc.



*Figura N° 2.* Ejemplo de confusión de la gráfica de “velocidad” por la de “posición”. Fuente: Carlson y Oethrtman (2005).

En cualquier caso, los errores de comprensión asociados a la representación de funciones pueden dificultar enormemente la interpretación de situaciones reales representadas por funciones o la transcripción a lenguaje analítico de determinados contextos de la vida real.

Por último, entre los errores del tema de funciones y gráficas, también son muy habituales los *asociados al lenguaje analítico*. Así, por ejemplo, cuando se les pide a los estudiantes expresar la variable  $s$  en función de  $t$ , muchos no comprenden que se trata

de escribir una fórmula de la forma “ $s = (\text{una expresión algebraica conteniendo } t)$ ”. Además, algunos estudiantes también muestran dificultades en identificar lo que cada símbolo algebraico representa en la función, aunque se trate de funciones sencillas. En el caso de  $f(x) = 3x$ , por ejemplo, muchos estudiantes no saben que el paréntesis sirve para marcar la variable independiente, que  $f(x)$  representa la variable dependiente, que  $f$  es el nombre de la función y que  $3x$  establece la relación existente entre las variables. Estos errores podrían asociarse a los que, según Socas, Palarea y Ruano (2003), se producen en lenguaje algebraico por una *ausencia de sentido*; es decir, para el alumno las variables dependiente e independiente carecen de sentido matemático.

Aunque sean los últimos que hemos analizado, los errores asociados al lenguaje analítico son de vital importancia. Están íntimamente ligados a la definición de “función” y son muy habituales entre los alumnos. Profundizar en estos y otros términos para evitar cometerlos o para superarlos será siempre de suma importancia para poder avanzar en los procesos de enseñanza-aprendizaje en materia de análisis matemático.

## **2.4 Las TIC en la educación**

Una vez presentado el estudio de la situación actual de las matemáticas en España, se presentan los usos que pueden tener las TIC en el aula, en concreto los softwares de matemáticas y de geometría dinámica. Finalmente, nos centraremos en *GeoGebra* como recurso didáctico propuesto en nuestra unidad didáctica para la resolución y representación de funciones y gráficas.

### **2.4.1 Uso de las TIC en matemáticas: los programas de geometría dinámica**

En didáctica de las matemáticas existen numerosos programas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Resultan de gran interés los de geometría dinámica (Bru, 2013). Según Peña (2010), estos programas permiten la experimentación práctica por parte de los alumnos de nuevos conceptos, facilitando así su comprensión y aprendizaje.

Los programas de geometría dinámica facilitan la comprensión gráfica de ciertos conceptos matemáticos al tiempo que permiten un mejor aprovechamiento del tiempo.

A continuación se muestra una comparativa de las prestaciones de los distintos programas según un estudio de Miranda (2005).

### **Cuadro N° 6. Comparativa de los programas de geometría dinámica.**

<i>GeoGebra</i>	Interfaz simple e intuitiva Potentes funcionalidades Versión $\beta$ en 3D Permite crear páginas web Software libre
<i>Geonext</i>	Interfaz simple pero no amigable Cantidad razonable de funcionalidades Permite crear páginas web Software libre
<i>Cabri II Plus</i>	Interfaz simple y amigable Potentes funcionalidades Permite crear páginas web Licencias comercial/demo
<i>Cinderella</i>	Interfaz simple e intuitiva Potentes funcionalidades Permite crear páginas web Permite manejar a la vez varias vistas Software libre
<i>Regla y compás</i>	Interfaz no tan amigable y simple Potentes funcionalidades Permite crear páginas web Software Libre

*Nota:* Características de los distintos programas de geometría dinámica. Fuente: Elaboración propia a partir de Miranda et al. (2005).

#### **2.4.2 GeoGebra como herramienta de aprendizaje**

En este apartado se analiza *GeoGebra*, programa matemático especialmente útil para la representación gráfica de funciones. Se plantea, en este trabajo, como principal herramienta didáctica en la resolución de ejercicios del Análisis matemático.

##### **2.4.2.1 Los fundamentos de GeoGebra**

*GeoGebra* es un software especialmente adecuado para la enseñanza dinámica de matemáticas en el aula. Ha sido programado por el equipo internacional dirigido por Marcus Hohenwarter, de la Universidad de Salzburgo en 2002. Se trata de un software gratuito que se puede ejecutar bajo cualquier sistema operativo al haber sido programado en Java.

Uno de los fundamentos de *GeoGebra* es la posibilidad de tener vistas múltiples de los objetos matemáticos, concretamente, una vista gráfica, una numérica o algebraica, y además, una vista de Hoja de Cálculo. Esta triple representación permite observar los objetos matemáticos desde tres perspectivas diferentes: gráfica (como puntos, gráficos de funciones, etc.), algebraica (como coordenadas de puntos, gráficos, etc.), y en celdas de una hoja de cálculo. Las tres representaciones están vinculadas entre sí, de manera que un cambio en una de ellas, implicará la transformación correspondiente de manera automática en la otra.

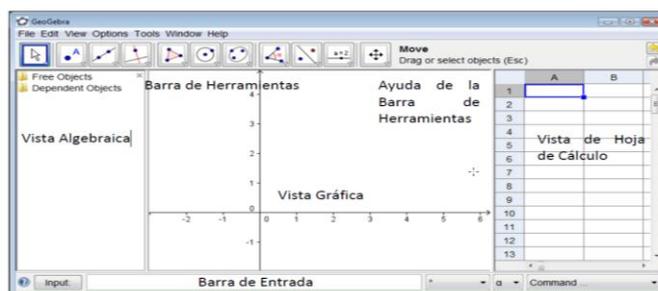


Figura N° 3. Vista de la interface de GeoGebra con sus tres representaciones posibles.  
Fuente: Hohenwarter y Hohenwarter (2009, p.13).

Este software presenta importantes utilidades desde el punto de vista didáctico, como la interactividad, la visualización de figuras complicadas, además de ser una buena herramienta de cálculo.

Actualmente GeoGebra está disponible en 50 lenguas, ha recibido varios premios a software educativos en Europa y Estados Unidos (como por ejemplo, EASA 2002, Comenius 2004, eTwinning 2006, AECT 2008, BETT 2009, TechAwards 2009, etc.). Además, desde 2004 el número de visitantes a la página web de *GeoGebra* ([www.geogebra.org/wiki](http://www.geogebra.org/wiki)) se ha incrementado de 7000 al mes a medio millón al mes, procedentes de 190 países. En este sentido, con el fin de asistir mejor a la comunidad de *GeoGebra*, se han creado, al final del año 2007, una red de Institutos Internacionales de *GeoGebra* (IGI\_International *GeoGebra* Institute). Los cuatro objetivos principales de IGI son: 1) Ofrecer apoyo didáctico, 2) desarrollar material didáctico así como aplicaciones didácticas del propio software, 3) dirigir investigaciones sobre mejora del software en sí mismo, 4) divulgación a comunidades que aún no conocen *GeoGebra*. Actualmente, existen 27 IGI locales distribuidos en 20 países, todos ellos ofreciendo diversos trabajos a la comunidad de *GeoGebra*. (Hohenwarter y Lavicza, 2010, p. 3). Por todo ello, se puede decir que *GeoGebra* no es sólo un Software sino también una gran Comunidad de docentes matemáticos, informáticos e investigadores que tratan de proponer importantes mejoras en la didáctica de las matemáticas. Probablemente, esto es lo que diferencia a *GeoGebra* de otros programas comerciales. En esencia, la comunidad de *GeoGebra* trabaja continuamente mejorando el software y produciendo material didáctico (Martinovic, Karadag y Freiman, 2010, p. 38). Esta característica adicional de *GeoGebra* queda plasmada en la figura siguiente:

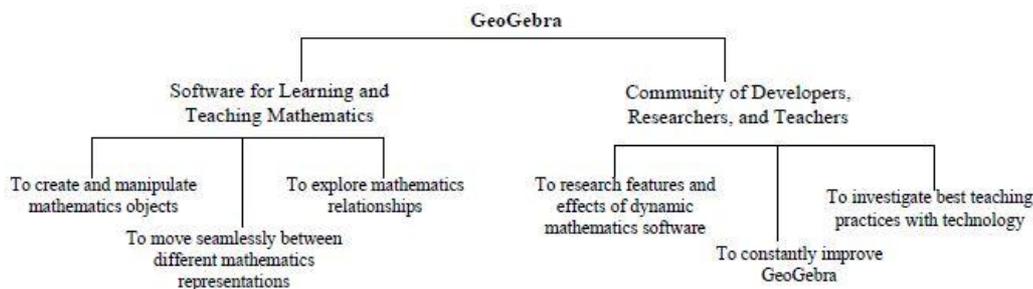


Figura N° 4. Conceptualización de GeoGebra como software y como Comunidad de investigadores. Fuente: Martinovic, Karadag y Freiman (2010, p. 38).

### 2.4.2.2 Ventajas y desventajas del uso de *GeoGebra* en educación

El papel de *GeoGebra* como software educativo tiene un gran interés para el alumnado y el profesorado en el proceso enseñanza-aprendizaje. Varios autores han estudiado las prestaciones de este software de geometría dinámica (Zerpa, 2010 y Ferro et al., 2009, entre otros). Resumimos a continuación algunas de estas ventajas:

#### Cuadro N° 7. Ventajas y desventajas del uso de *GeoGebra* en el aula.

<i>Ventajas del uso de GeoGebra</i>	<i>Desventajas del uso de GeoGebra</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Mejora la interactividad y dinamismo de la clase, fomentando la participación y motivación del alumnado.</li> <li>-Permite un mejor aprovechamiento de tiempo y crea representaciones de manera más precisa y rápidas.</li> <li>-Es buen instrumento para realizar operaciones matemáticas, representar funciones y figuras geométricas o crear una tabla de cálculo; permitiendo así la realización de múltiples operaciones.</li> <li>-Empleado durante las explicaciones o en clases magistrales, permite avanzar y retroceder, crear modificaciones y variaciones de una misma operación.</li> <li>-Permite el empleo de diferentes colores y grosores facilitando así la comprensión de lo representado.</li> <li>-Es de licencia gratuita y fácil manejo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Es posible caer en una resolución automática de la mayoría de operaciones, degenerando, por tanto, en la pérdida de habilidades operatorias por parte del alumnado. Como alternativa, se puede proponer la resolución de ejercicios a mano y con ordenador.</li> <li>-El ordenador ha de ser siempre manejado por una persona. Lo mismo ocurre en la resolución de problemas matemáticos.</li> <li>-Otro inconveniente que podríamos encontrar es la dificultad que determinados sectores de la sociedad, no acostumbrados al uso de las nuevas tecnologías, encontrarían en su manejo.</li> </ul>

Nota: Ventajas y desventajas del uso de *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia a partir de Zerpa (2010), Ferro et al. (2009) y Sordo (2005).

### 2.4.2.3 Prestaciones de *GeoGebra*

A continuación se exponen las distintas prestaciones del software *GeoGebra* basándose en un estudio de Rafael Miranda Molina, profesor de matemáticas e informática educativa.

**Cuadro N° 8. Aplicaciones más destacadas del software *GeoGebra*.**

Características del software	Versión Tamaño Plataformas Sistemas operativos Requerimientos extra Licencia Fecha	2.6a 2.5 Mb. PC/MAC Win/Linux/Mac OS JAVA Gratuito Gratuito 2005
Geometría	Manipulación de objetos	Giro a mano alzada
	Tipos de objetos	Rectas, semirrectas, vectores, segmentos, polígono, circunferencia, arco, sector circular, cónica.
	Comprobación de propiedades	Comprobación genérica de propiedades, paralelismo, equidistancia, pertenencia, igualdad de puntos.
	Construcciones incorporadas	Recta perpendicular y paralela, simétrica (mediatriz), punto medio y bisectriz, compás (circunferencia por centro, con radio dado), rotación/traslación, simetría axial y central, homotecia, tangentes a una cónica (y circunferencia), centro de una cónica, eje(s) de una cónica, circunferencia a partir de tres puntos, arco a partir de tres puntos, arco dados dos puntos y centro.
	Medición	Longitudes y distancias, medición de ángulos, áreas, pendientes, cambio de unidades de medidas, cálculos con medidas (con fórmulas y en modo gráfico).
	Lugares geométricos (LG)	Trazado de LG, actualización dinámica de LG, punto sobre LG, marcado de trazas (camino de un punto).
	Macros y revisión de la construcción	Creación de macros, revisión de pasos de la construcción, descripción de los pasos de la construcción.
Álgebra	Ecuaciones y coordenadas	Coordenadas, cartesianas de puntos, ecuaciones cartesianas, coordenadas polares, ecuaciones polares, ecuaciones paramétricas de rectas, ecuaciones de LG, ecuaciones de cónicas y circunferencias, gráficas de funciones.
Otras	Formato y visualización de objetos	Ocultar/mostrar objetos, estilos de línea, controles deslizantes, inserción de imágenes, etiquetas de objetos, zoom (acercar/alejar).
	Exportación a páginas web	Exportación automática a páginas web, construcción manipulable,
	Otras funcionalidades	Entrada de comandos, mostrar/ocultar objetos según colores.

*Nota:* Aplicaciones más destacadas del software *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia a partir de Miranda (2006).

#### **2.4.2.4 Percepciones de *GeoGebra* por parte de los profesores de matemáticas**

Effandi Zakaria y Lo Sooth han realizado un estudio para analizar la percepción que los profesores de matemáticas tienen del uso del software *GeoGebra* en el aula (Zakaria y Lee, 2012). El estudio ha consistido en una encuesta realizada a 30 profesores de matemáticas sobre el uso de *GeoGebra* en distintos talleres sobre el empleo del software. En concreto las actividades realizadas en los mismos consistían en construcciones geométricas como simetrías, líneas paralelas, rotaciones en torno a un punto, polígonos, ortocentro de un triángulo, ángulos y transformaciones, así como coordenadas, ecuaciones, funciones o la inserción de imágenes. Los profesores comenzaban los talleres sin conocimientos sobre el uso del software y, por medio de diversas explicaciones y actividades, se les introducía en el empleo del mismo. Una vez

finalizados los diversos talleres, se les preguntaba sobre la dificultad y la utilidad del empleo de *GeoGebra*.

Los resultados de esta investigación muestran que la percepción que los profesores tienen del empleo de *GeoGebra* en clase es positiva. Es preciso señalar que, dependiendo del nivel de complejidad de la actividad propuesta, algunos de ellos mostraron cierta reticencia a su uso, pero, una vez introducidos en su explicación, éstas fueron superadas. Todos ellos coincidieron en la dificultad que presentan los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas por el grado de abstracción que se precisa. Ante éstas, conciben el software *GeoGebra* como una herramienta que facilitará a los alumnos la comprensión y visualización de ciertos conceptos matemáticos por un lado, y, por otro, como una alternativa para fomentar el uso de las nuevas tecnologías por parte del profesorado en clase, como recurso potencial de enseñanza de matemáticas en el aula (Zakaria y Lee, 2012).

Los resultados de la investigación de Zakaria y Lee (2012) podrán ser contrastados con los del estudio de campo desarrollado en el presente trabajo. Como se verá, los docentes encuestados en él, también tendrán una positiva percepción del software y lo concebirán como un recurso didáctico con grandes posibilidades para la enseñanza de las matemáticas en el aula.

## **3. ESTUDIO DE CAMPO**

### **3.1 Introducción**

Tras la investigación teórica realizada, basada en el análisis de las dificultades de los alumnos para la competencia matemática, el empleo de las TIC en educación y los fundamentos de *GeoGebra* en el proceso enseñanza-aprendizaje, se propone ahora un estudio de campo complementario. Se realizarán encuestas a docentes de diferentes centros de Barcelona con distinto nivel cultural con el fin de abarcar la mayor representatividad posible.

### **3.2 Justificación**

El objetivo del presente estudio de campo es complementar la investigación teórica efectuada hasta el momento. Se analizará el nivel académico de los alumnos en matemáticas, las dificultades de aprendizaje de los mismos en materia algebraica y el uso de *GeoGebra* en el aula.

El listado de cuestiones efectuadas, puede verse en el Anexo I: Cuestionario.

### **3.3 Objetivos**

Como ya se ha comentado, el objetivo del presente estudio de campo es contrastar los resultados obtenidos con el análisis teórico ya efectuado y corroborar así las conclusiones desprendidas de los mismos. Concretamente, se pretende:

- 1) Analizar el nivel académico de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de una zona del área metropolitana de Barcelona en cuanto a su competencia matemática se refiere.
- 2) Caracterizar la actitud que, según los profesores de matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de una zona del área metropolitana de Barcelona, muestran los alumnos en clase.
- 3) Identificar las dificultades más comunes que presentan los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona en el bloque de análisis matemático.
- 4) Valorar las medidas que deberían tomarse, según los profesores de matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona, para mejorar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y conseguir superar las dificultades anteriormente estudiadas.

- 5) Valorar el empleo de las TIC en el aula y la concepción que los profesores de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona tienen de ellas.
- 6) Caracterizar el conocimiento y uso que tiene los profesores de matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona del software de geometría dinámica *GeoGebra*.
- 7) Valorar la influencia que puede tener el uso de *GeoGebra* en los resultados de matemáticas de alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona.

### **3.4 Marco contextual del estudio de campo**

El estudio de campo ha consistido en la realización de una encuesta de 14 preguntas de respuesta cerrada y dos de respuesta abierta. Ésta ha sido respondida por 24 docentes de matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona. A continuación se describen, brevemente, los centros en los que se ha realizado la encuesta:

### Cuadro Nº 9. Marco contextual del estudio de campo.

1. <i>Escola Santíssima Trinitat de Barcelona</i>	Situada en el distrito de Les Corts, en la Avinguda d'Esplugues, 62-70. Es el lugar donde se han realizado las prácticas. Se trata de un centro privado-concertado, que tiene como Entidad Titular la Congregación de Hermanas Trinitarias. Los profesores son docentes laicos cuyo trabajo es fundamental dentro de la comunidad educativa. La escuela se encuentra en una zona con nivel socioeconómico alto, pero los alumnos, al provenir de núcleos urbanos periféricos y cercanos a la ciudad de Barcelona, provienen de un nivel socioeconómico medio-bajo, de tradición obrera, inmigrantes (de otras zonas de España, mayoritariamente). La mayoría son españoles, con algún caso puntual de alumno extranjero (sudamericano, especialmente), por lo que no se dan problemas de idioma.
2. <i>IES Ausiàs March</i>	Situado en la misma zona, en la Avenida d'Esplugues, 38 – 42. Es de carácter público y dispone de ESO y Bachillerato. Se encuentra en una zona socioeconómica alta pero los alumnos, al provenir de núcleos urbanos periféricos y cercanos a la ciudad de Barcelona, provienen de un nivel socioeconómico medio.
3. <i>Peter School</i>	De titularidad privada y bilingüe español-inglés. Situado en la misma zona, en la calle Eduard Toldrà, 18-08034 de Barcelona. Los alumnos pertenecen a un nivel socioeconómico alto. El centro dispone de ESO y Bachillerato.
4. <i>Escola Proa</i>	Situada en c/ Almeria, 57 - 08014 Barcelona. Centro concertado por la Generalitat de Catalunya. Con Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato.
5. <i>Escola Gravi</i>	Situada en Avenida Vallcarca, 258 · 08023 Barcelona. Centro privado-concertado con tres edificios donde se oferta primaria, secundaria y Bachillerato. “Escola Laica, Catalanista y del Progreso” es su lema. Sus alumnos presentan un nivel socioeconómico medio-alto.
6. <i>Colegi Pineda</i>	Situado en Carrer dels Jocs, 1. 08902 L' Hospitalet de Llobregat – Barcelona. Es un centro privado-concertado femenino. Ofrece Infantil, Secundaria y Bachillerato. El alumnado es de nivel socioeconómico alto.
7. <i>Escola Mare de Déu</i>	Situada en C/Mallorca 598 y C/Vidiella 15-17. Es una escuela catalana privada concertada y ofrece educación en Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato.
8. <i>Escolàpies Llúria</i>	Situado en Calle Aragón, 302, Cant. Roger de Llúria, 08009. Barcelona. Es un centro concertado por la Generalitat de Catalunya y dirigido por religiosas Escolàpies. Ofrece Infantil, Primaria, ESO y Bachillerato. Su alumnado es de carácter socioeconómico medio-alto.
9. <i>Colegi Sagrat Cor-diputació</i>	Situado en Carrer Diputació, 326, 08009, Barcelona. Escuela concertada por la Generalitat de Catalunya. Ofrece Infantil, Primaria, ESO y Bachillerato. Su alumnado es de clase media-alta.
10. <i>Escola Técnico Profesional Xavier</i>	Situada en Avenida Francesc Cambo, 12, 08003, Barcelona. Se trata de un centro concertado de secundaria postobligatoria y de educación superior, con Bachillerato y ciclos formativos de grado medio y superior. Su alumnado es de nivel socioeconómico medio-bajo.
11. <i>Colegi La Farga</i>	Situado en Sant Cugat del Vallés, Barcelona. Es un colegio concertado de la Institución Familiar De Educación. Ofrece docencia desde preescolar hasta Bachillerato. Sus alumnos de nivel socioeconómico alto.
12. <i>IES La Salle Bonanova</i>	Situado en Pg. De la Bonanova, 8. 08022-Barcelona. Es un centro de titularidad pública que ofrece docencia en ESO, Bachillerato y algunos ciclos formativos de grado medio y superior. Está situado en una zona socioeconómica alta de Barcelona.
13. <i>Escola Pia Sarrià-Calassanç</i>	Situada en C/Inmaculada, 25-35. 0817. Barcelona. Es un centro concertado por la Generalitat de Catalunya que ofrece docencia en Primaria, ESO, Bachillerato y algunos ciclos formativos de grado medio y superior. Su alumnado es de clase media-alta.
14. <i>Cintra Ciutat Vella</i>	Situado en C/Riereta, 21. En pleno barrio gótico de Barcelona, con un nivel socioeconómico bajo. Se trata de un centro concertado.
15. <i>IES Milà i Fontanals</i>	Situado en Pl. Josep María Folch i Torres, S/N 08001 Barcelona. Es un centro público situado en Ciutat Vella, en una zona socioeconómicamente baja. Ofrece dos modalidades de bachillerato y formación profesional.
16. <i>Instit Eugeni D'ors</i>	Situado en Calle Vallparada, 08904 Hospitalet de Llobregat, Barcelona. Es un instituto público de enseñanza secundaria con alumnado de nivel socioeconómico medio-bajo.
17. <i>Institut Margarida Xirgu</i>	Situado en Travesía Collblanc, 56, 08904 Hospitalet de Llobregat, Barcelona. Es un instituto público de enseñanza secundaria con alumnado de nivel socioeconómico medio-bajo.
18. <i>Institut Llobregat</i>	Situado en Calle Enric Prat De La Riba, 231, 08901 Hospitalet de Llobregat, Barcelona. Es un instituto público de enseñanza secundaria con alumnado de nivel socioeconómico medio-bajo.
19. <i>Institut “Les Corts”</i>	Situado en Travesía Corts, 131-159. 08028, Barcelona. Centro concertado por la Generalitat de Catalunya que ofrece docencia en ESO y Bachillerato. Nivel socioeconómico de los alumnos medio-alto.
20. <i>IES N-1 Francesc Macià</i>	Situado en Av. Joan Maragall, S/N Cornella de Llobregat, Barcelona 08940. Es un instituto público con alumnado de nivel socioeconómico medio.
21. <i>María Auròlia Capmany</i>	Situado en C/Garrofer, S/N Cornella de Llobregat (Barcelona) 08940. Es un instituto público con alumnado de nivel socioeconómico medio.
22. <i>IES Joan Miró</i>	Situado en Ntra.Sra. de Monserrat, 339 Cornella de Llobregat (Barcelona). Es un instituto público con alumnado de nivel socioeconómico medio.
23. <i>IES Poeta Maragall</i>	Situado en Calle Provença, 187, 08036-Barcelona. Es un instituto público de educación secundaria situado en una zona socioeconómica media-alta de Barcelona.
24. <i>IES Sagrada Família</i>	Situado en la Calle Compte D'urgell, 262, 08036-Barcelona. Es un centro privado con docencia de ESO y Bachillerato. Está situado en una zona céntrica de Barcelona con nivel socioeconómico medio.

*Nota:* Marco contextual del estudio de campo. Fuente: Elaboración propia.

Como puede deducirse del cuadro anterior, el estudio de campo intenta ser lo más representativo posible. La encuesta se ha realizado a docentes de distintas zonas del área metropolitana de Barcelona, en centros públicos, privados y concertados y en zonas de distinto nivel socioeconómico. Se intenta, por tanto, abarcar la mayor representatividad posible.

## **4.5 Metodología**

Se ha contactado principalmente por correo electrónico y por teléfono con varios centros de educación secundaria obligatoria y Bachillerato. El objetivo: realizar un cuestionario a los profesores de matemáticas de Bachillerato sobre los objetivos anteriormente señalados. La idea que se persigue es poder contrastar los resultados de la encuesta con lo estudiado en el análisis teórico previo, por lo que a mayor representatividad de la encuesta, mejor validez tendrá. Es por ello que se ha limitado el estudio a la ciudad de Barcelona, realizando la encuesta tanto en centros públicos como concertados.

La encuesta comprende 14 preguntas de respuesta cerrada y dos de respuesta abierta que fomentan el comentario y la reflexión del encuestado. Éstas han sido respondidas por 24 docentes de matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona. Los resultados de todas las encuestas se han recogido en el Anexo II: Resultados de los cuestionarios.

**Cuadro N° 10. Resumen del cuestionario con opciones y justificación.**

Preguntas	Opciones dadas de respuesta	Comentario	Justificación de lo que se busca conseguir con la pregunta
Pregunta N° 1. ¿Cómo considera el nivel de matemáticas en los alumnos de hoy en día?	a) Muy bueno c) Normal e) Muy malo	b) Bueno d) Malo	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta. Conocer la opinión del profesor sobre el nivel actual de los alumnos en matemáticas.
Pregunta N° 2. ¿La actitud hacia las matemáticas de los alumnos es la adecuada? ¿Cómo la definiría?	a) Muy buena c) Normal e) Muy mala	b) Buena d) Mala	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta. Conocer la opinión del profesor sobre la actitud actual de los alumnos en matemáticas.
Pregunta N° 3. ¿Qué bloque de matemáticas es el que más cuesta?	a)Contenidos comunes c)Álgebra e)Funciones y gráficas	b)Números d)Geometría f)Estadística y probabilidad	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta. Conocer la el bloque de matemáticas donde mayores dificultades presentan los alumnos y poder comparar así con lo expuesto en la investigación teórica.
Pregunta N° 4. ¿Cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en las matemáticas?	a)Problemas de comprensión b)Falta de base adecuada c)Abstracción de los conceptos d)Falta de motivación e)Miedo a la asignatura f)Otros	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer las dificultades más comunes en matemáticas y poder comparar así con lo expuesto en la investigación teórica.
Pregunta N° 5. Dentro del bloque de álgebra, ¿Cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en matemáticas?	a. Contenidos comunes. a)La representación de funciones b) La identificación de las características de una función c)El concepto de asíntota d)La resolución problemas de la vida real mediante funciones	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer las dificultades más comunes en álgebra y poder comparar así con lo expuesto en la investigación teórica
Pregunta N° 6. Comente qué cree que se podría mejorar para lograr mejores resultados en matemáticas: actuar sobre los padres, actuar sobre los niños, mejorar la actitud, mejorar la base de conocimientos, con clases de refuerzo, con un cambio de metodología, etc.	Respuesta libre	Pregunta mixta de múltiples opciones y una respuesta con posibilidad de añadir comentarios.	Conocer la propuesta de los profesores para conseguir una posible solución al fracaso escolar y a las dificultades de los alumnos en competencia matemática.
Pregunta N° 7. ¿Es necesario algún cambio metodológico o actitudinal de cara a las matemáticas?	a)Totalmente de acuerdo b)Parcialmente de acuerdo c) Ni en de acuerdo ni en desacuerdo d)Parcialmente en desacuerdo e)Totalmente en desacuerdo	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la opinión de los profesores en cuanto a un posible cambio metodológico en matemáticas.
Pregunta N° 8. Si es así, ¿cree que el uso de las	a)Totalmente de acuerdo	Pregunta cerrada de	Conocer la opinión de los profesores en

TIC podría ser clave en este cambio?	b)Parcialmente de acuerdo c) Ni en de acuerdo ni en desacuerdo d)Parcialmente en desacuerdo e)Totalmente en desacuerdo	múltiples opciones y una respuesta.	cuanto a la necesidad de proponer un cambio metodológico mediante el empleo de las TIC.
Pregunta N° 9. ¿Conoce el software <i>GeoGebra</i> ?	a)Sí b)No c)Me suena un poco.	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer el nivel de conocimientos de los profesores en cuanto a determinados softwares de geometría dinámica como <i>GeoGebra</i> .
Pregunta N° 10. ¿Usa <i>GeoGebra</i> en el aula?	a)No, nunca b)Sí, pero puntualmente c)Sí, es un recurso habitual en el aula d)Sí, e intento que los alumnos también lo usen.	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer el uso que se le da a <i>GeoGebra</i> en el aula.
Pregunta N° 11. ¿Anima a los alumnos al uso de <i>GeoGebra</i> en el aula o en casa?	a)No, porque yo tampoco lo empleo b)Sí, aunque no consigo que lo aprendan c)Sí, he conseguido que lo usen y se interesen por él.	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la posición del profesor en cuanto a la difusión del uso de <i>GeoGebra</i> entre los alumnos.
Pregunta N° 12. ¿Ha cambiado su metodología de trabajo el uso de <i>GeoGebra</i> en el aula o en casa?	a)No, porque yo tampoco lo empleo. b)Sí, aunque no consigo que lo aprendan c)No, no ha cambiado la metodología de trabajo.	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la influencia de <i>GeoGebra</i> en la metodología de trabajo.
Pregunta N° 13. ¿Cuántas horas semanales dedica a trabajar con <i>GeoGebra</i> ?	a)Ninguna b)Entre 1 y 2 c)Entre 2 y 5 d)Más de 5	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer el uso que hace el profesor de programas como <i>GeoGebra</i>
Pregunta N° 14¿Considera que la influencia de <i>GeoGebra</i> en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede mejorar los resultados de los alumnos?	a)No, los resultados siguen como antes. b)Sí, alrededor de un 10% c)Sí, alrededor de una 20% d)Los resultados han mejorado notablemente (alrededor de un 50%)	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la opinión de los profesores sobre la influencia de <i>GeoGebra</i> en los resultados académicos de los alumnos.
Pregunta N° 15. ¿Considera que el uso de programas como <i>GeoGebra</i> mejora la motivación de los alumnos?	a)No, la motivación sigue como antes b)Sí, se encuentran un poco más motivados c)Sí, se encuentran notablemente más motivados	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la opinión de los profesores sobre la influencia de <i>GeoGebra</i> en la motivación de los alumnos.
Pregunta N° 16. ¿Cuáles y qué debería mejorar?	Respuesta libre	Pregunta mixta de múltiples opciones y una respuesta con posibilidad de añadir comentarios.	Conocer la opinión de los profesores sobre las ventajas de <i>GeoGebra</i> .

Nota: Resumen del cuestionario con opciones y justificación. Fuente: Elaboración propia.

## 4.6 Análisis de los resultados

El objetivo de este apartado es analizar los resultados obtenidos pregunta por pregunta. Se pretende alcanzar una primera aproximación a la interpretación de los resultados y así poder extraer unas conclusiones generales y de alto nivel de toda la información recopilada.

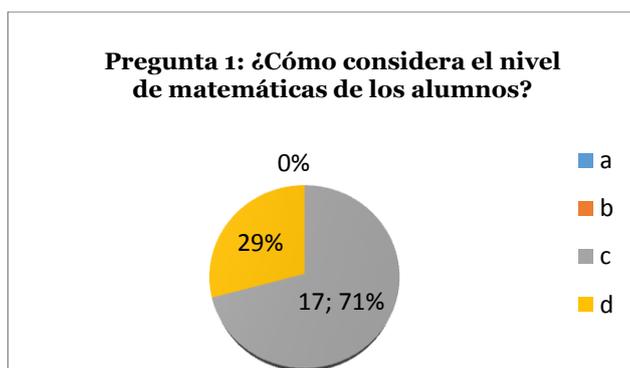


Gráfico N° 1. Preguntar 1 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Preguntar N° 1 (“¿Cómo considera el nivel de matemáticas en los alumnos de hoy en día?”) sólo el 17% de los encuestados lo consideran como bueno (respuesta B); el 29% lo considera como malo (respuesta D) y el 71% como normal (respuesta C).

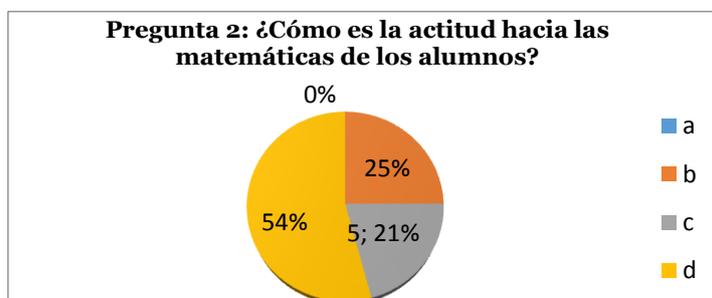


Gráfico N° 2. Preguntar 2 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Preguntar N° 2 (“¿La actitud hacia las matemáticas de los alumnos es la adecuada? ¿Cómo la definiría?”), la mayoría de los encuestados, el 54%, responden que es mala (respuesta D), el 25% de los encuestados dicen que es buena (respuesta B), mientras que el 21 y el 5% respectivamente dicen que es normal o muy mala. Nadie dice que sea muy buena (respuesta A).

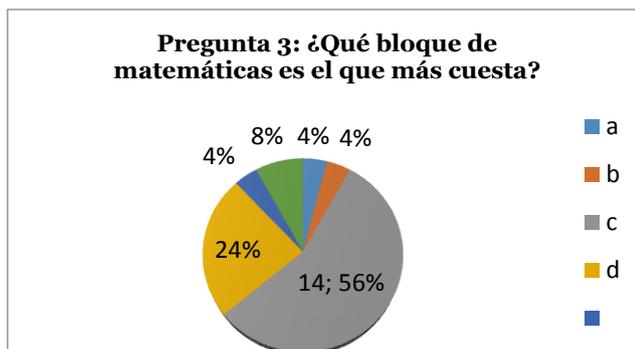


Gráfico N° 3. Pregunta 3 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N° 3 (“¿Qué bloque de las matemáticas es el que más cuesta?”), la mayoría de los encuestados dicen que es el bloque de álgebra (respuesta C) y el 24% que es geometría (respuesta D). Coincide así con los resultados evaluados en el informe PISA donde se afirma que los bloques que presentan mayor dificultad para los alumnos son geometría y álgebra.

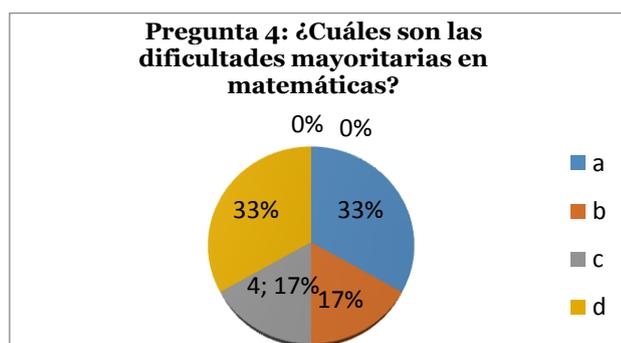


Gráfico N° 4. Pregunta 4 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N° 4 (“¿Cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en las matemáticas?”), la mayoría de los encuestados afirman que es la falta de motivación y el miedo a la asignatura (un 33% cada una; respuestas D y E respectivamente). El 17% de los encuestados afirman que se trata de un problema de falta de base y de abstracción de conceptos. En cualquier caso, es evidente que determinadas medidas se deberían tomar para mejorar la motivación de los alumnos.

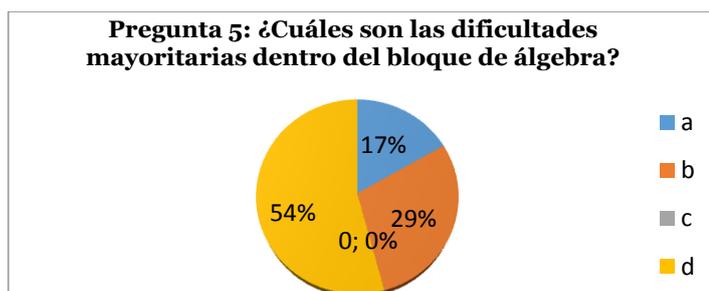


Gráfico N° 5. Pregunta 5 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N°5 (“*Dentro del bloque de álgebra, ¿cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en las matemáticas?*”), la mayoría responde que la mayor dificultad es la resolución de problemas de la vida real mediante funciones (respuesta D). Sólo el 29 y el 17% de los encuestados dicen que se trata más de un problema de identificación de las características de una función y de la representación de funciones respectivamente.

La Pregunta N°6 (“*Comente qué cree que se podría hacer para lograr mejores resultados en matemáticas: actuar sobre los padres, actuar sobre los niños, mejorar la actitud, mejorar la base de conocimientos, clases de refuerzo, cambio de metodología, etc.*”) da cabida a una respuesta más abierta. La mayor parte de los encuestados coinciden en la necesidad de un cambio metodológico. Algunos de ellos proponen respuestas muy interesantes como “acercar las matemáticas a las realidades comunes de los jóvenes mediante la adaptación de las mismas a un mundo más visual, de la imagen e incluso el video”.

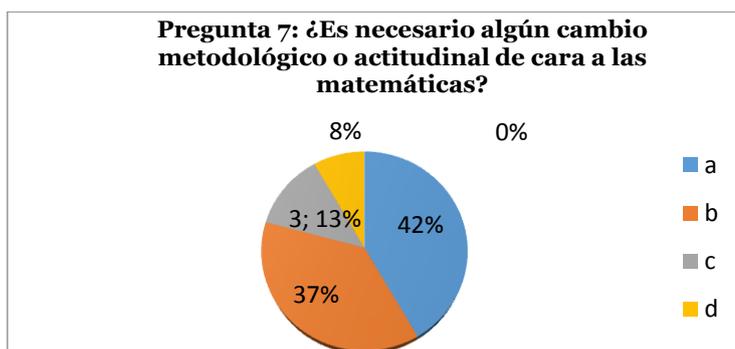


Gráfico N° 6. Pregunta 7 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N° 7 (“*¿Es necesario algún cambio metodológico o actitudinal de cara a las matemáticas?*”), la mayoría de los encuestados, el 42%, están completamente de acuerdo (respuesta A), y el 37% parcialmente de acuerdo (respuesta B). En menor proporción, el 13 y el 8% no están ni en de acuerdo ni en desacuerdo o están parcialmente en desacuerdo.

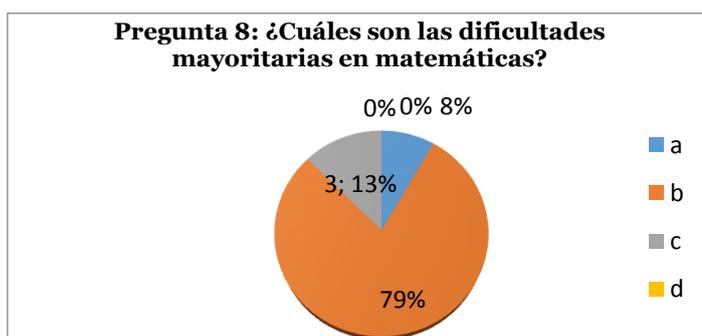


Gráfico N° 7. Pregunta 8 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N°8, (“Si es así, ¿cree que el uso de las TIC podría ser clave en este cambio?”) el 79% de los encuestados dicen estar parcialmente de acuerdo. La mayoría afirman que las TIC pueden ayudar en ese cambio metodológico tan necesario pero siempre y cuando no sean un fin en sí mismas sino más bien un recurso para lograr los objetivos didácticos propuestos.

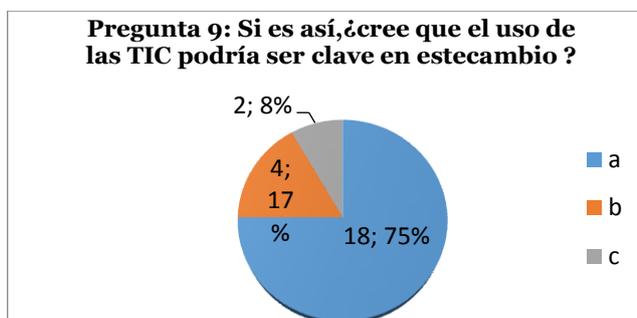


Gráfico N° 8. Pregunta 9 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N° 9 (“¿Conoce el software GeoGebra?”), el 75% de los encuestados dicen conocerlo.

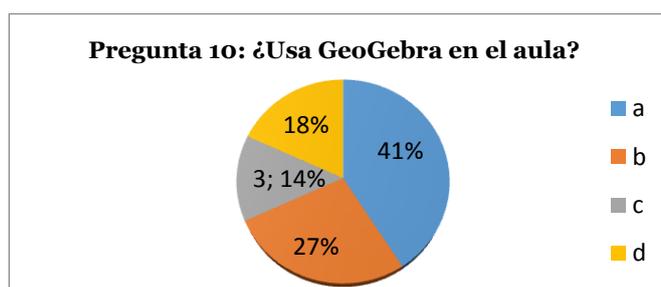


Gráfico N° 9. Pregunta 10 del cuestionario. Fuente: elaboración propia

En cuanto a la Pregunta N° 10 (“¿Usa GeoGebra en el aula?”), el 41% de los encuestados aseguran que no lo usan nunca, aunque el 27% dicen que sí, pero puntualmente. Algunos, el 14% dicen que es un recurso habitual del aula y el 18% afirman que también intentan motivar a los alumnos a su uso (respuesta D).

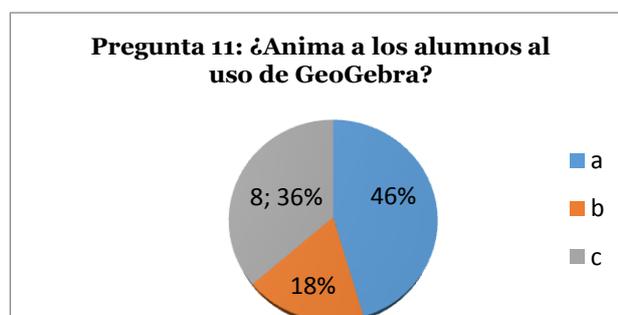


Gráfico N° 10. Pregunta 11 del cuestionario. Fuente: elaboración propia.

En la Pregunta N° 11 (“¿Anima a los alumnos al uso de GeoGebra en el aula o en casa?”), la mayoría de los encuestados dicen que no porque ellos tampoco lo emplean (Respuesta A). El 36% de los encuestados, sin embargo, dicen que sí ha conseguido que lo usen y que se interesen por

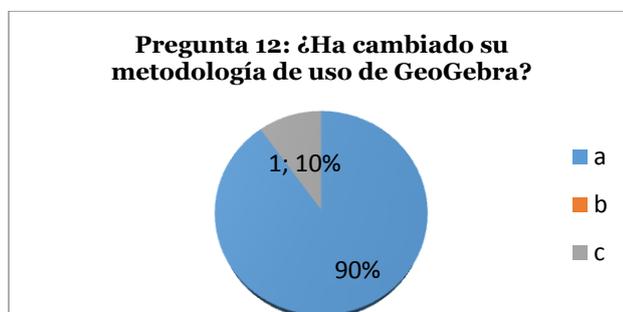


Gráfico N° 11. Pregunta 12 del cuestionario. Fuente: elaboración propia

En la Pregunta N° 12 (“¿Ha cambiado su metodología de trabajo el uso de GeoGebra en clase?”), la mayoría, el 90% de los encuestados, dicen que no ha cambiado su metodología; aunque el 10% afirman que sí ha cambiado y que ha mejorado.

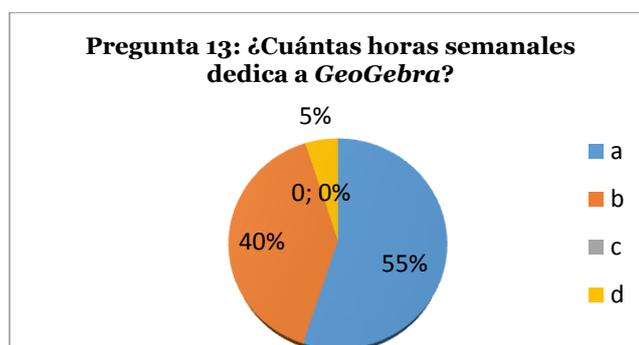


Gráfico N° 12. Pregunta 13 del cuestionario. Fuente: elaboración propia

En la Pregunta N° 13 (“¿Cuántas horas semanales dedica a trabajar GeoGebra?”), el 55% dicen que ninguna (en parte porque no lo conocen) y el 40% dicen que entre 1 y 2 (respuesta B). Sólo un 5% dicen emplearlo entre 2 y 5 horas (respuesta C).

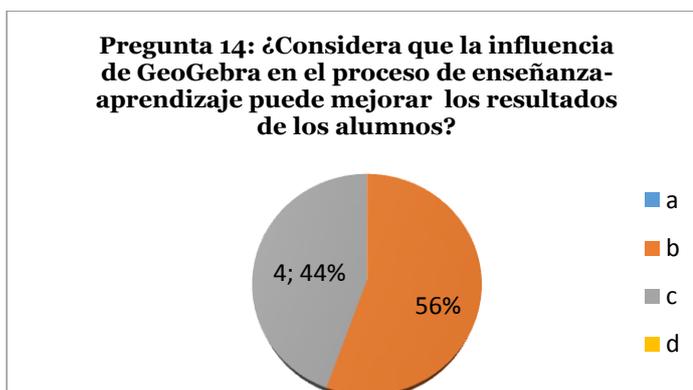


Gráfico N° 13. Pregunta 14 del cuestionario. Fuente: elaboración propia

En la Pregunta N° 14, “¿Considera que la influencia de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede mejorar los resultados de los alumnos?”, el 56% de las personas que usan *GeoGebra*, responde que sí ha mejorado en torno al 10%. Un 44% de los encuestados responden que ha mejorado alrededor de un 20%.

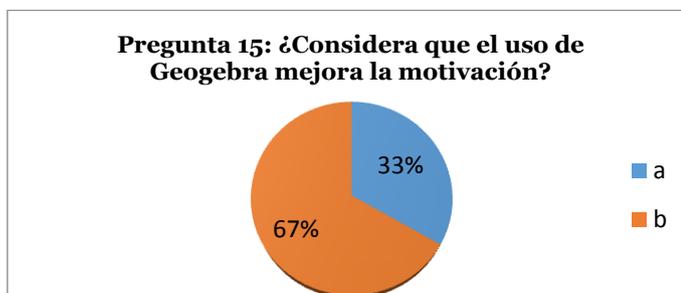


Gráfico N° 14. Pregunta 15 del cuestionario. Fuente: elaboración propia

En la Pregunta N°15, *¿considera que el uso de programas como GeoGebra mejora la motivación de los alumnos?*, el 33% de los encuestados dicen que no mejora la motivación mientras que el 67% dicen que los alumnos sí se encuentran un poco más motivados al usar *GeoGebra*.

La Pregunta N°16, (“¿Cuáles considera que son los puntos a favor de *GeoGebra* y qué debería mejorar?”) es de respuesta abierta. La mayoría de los encuestados coinciden en que este software mejora la capacidad de visualización y la comprensión de los conceptos, además de ser una buena herramienta para el cálculo. También coinciden en su capacidad interactiva, en su manejo sencillo y en el hecho de que se adquiera de manera gratuita. En cuanto a las propuestas de mejora, algún encuestado comenta que se podría implementar un menú reducido para uso en primaria además de que se podrían implementar ejemplos del uso de funciones en el menú de ayuda.

## 4.7 Conclusiones del estudio de campo

La investigación de campo se ha estructurado en cuatro grandes bloques, los mismos en los que se centra el análisis teórico.

### 1) Nivel y actitud de los alumnos hacia las Matemáticas

Según las encuestas, los resultados de los alumnos en matemáticas no son buenos o poco aceptables y la actitud de los alumnos hacia las matemáticas no es la adecuada. El estudio de campo corrobora de este modo lo analizado en la investigación bibliográfica. Además, la inmensa mayoría de los profesores también

coinciden en la necesidad de un cambio metodológico que mejore la motivación del alumno y acerque las matemáticas a su realidad más próxima.

## 2) *Currículum de matemáticas en Bachillerato*

Los resultados obtenidos en el estudio de campo coinciden con los analizados en la reseña bibliográfica. En ambos casos se observa que tanto el álgebra como la geometría son los bloques de mayor dificultad. Según los docentes, el grado de abstracción que se requiere para comprender y asimilar nuevos conceptos es lo que más cuesta a los alumnos y lo que hace que encuentren mayores dificultades en estas materias.

## 3) *El cambio tecnológico en el aula*

En cuanto al uso de las TIC, la mayoría de los encuestados coinciden en que la metodología no cambia por el uso de las TIC; éstas ofrecen apoyo esporádico al educando y han de emplearse siempre como un recurso didáctico y no como un fin en sí mismas.

## 4) *GeoGebra como entorno de aprendizaje virtual*

En cuanto a *GeoGebra*, alrededor de la mitad de los encuestados lo conocen y hacen uso de él. De éstos, la mayoría destacan como puntos a favor la mejora de la visualización conceptual, la mayor operatividad de cálculo o el aumento de la interactividad en los alumnos.

A modo de reflexión personal, me llama la atención que haya docentes que conozcan y apliquen *GeoGebra* y otros que no. Todos los alumnos deberían conocerlo y tener la oportunidad de aplicarlo en clase, no como un fin en sí mismo, sino como una herramienta didáctica de apoyo.

En definitiva, la mayoría de los profesores coinciden en que no son las TIC ni *GeoGebra* en particular lo que nos llevará a un cambio metodológico sustancial sino, más bien, la actitud de la sociedad hacia las matemáticas y hacia la educación.

Sin embargo, sí que contemplan *GeoGebra* y, en general, todos los programas de geometría dinámica, como buenas herramientas complementarias al cambio metodológico que se precisa. Esto debe significar que la innovación que implica el uso de programas de geometría dinámica, ha de venir también acompañada de un cambio metodológico general de la educación de matemáticas en Bachillerato.

## 5. PROPUESTA DIDÁCTICA

A continuación, se presenta una propuesta didáctica sobre la representación de funciones, tema de primer curso de Bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología. Se propone el uso del software de geometría dinámica, *GeoGebra* como recurso didáctico para la explicación y resolución de determinados conceptos y ejercicios. La intención perseguida es que el alumno llegue a comprender la representación y resolución de funciones de una manera más interactiva, dinámica, visual y con un mayor ahorro de tiempo.

Se ha optado por diseñar ejercicios sencillos y muy prácticos para despertar el interés y motivación de los alumnos por el álgebra.

### 5.1 Contenidos

Se presenta a continuación un cuadro resumen de los principales bloques de contenidos presentes en la propuesta didáctica. Éstos se organizan, a nivel general, en tres apartados: contenidos académicos, metodología procedimental adoptada y contenidos actitudinales adoptados.

**Cuadro N° 11. Contenidos de la propuesta didáctica.**

1. Contenidos académicos	
a)	Reconocer gráficas de distintos tipos de funciones y aprender a diferenciarlas: la función constante, lineal, polinómica, exponencial, de valor absoluto, etc. Concepto de función Tipología de funciones (las más importantes) Características de una función. Operaciones con funciones Interpolación y extrapolación lineal
2. Metodología procedimental adoptada	
	Resolución numérica y/o gráfica de ejercicios de aplicación de funciones; dada una información en forma de tabla, gráfica o texto, saber organizarla para poder dibujar una gráfica que la represente. Dada una función en forma de gráfica, saber interpretarla para obtener datos numéricos de ella. Saber obtener las características de una función: su imagen, recorrido, máximos y mínimos, etc. Saber relacionar todo ello con un contexto de la realidad que representa. Empleo de la pizarra virtual y del programa informático-matemático GeoGebra para la representación de funciones
3. Contenidos actitudinales adoptados	
	Valoración de las matemáticas en la sociedad actual como medio de progreso técnico. Sensibilidad hacia la realización cuidadosa de experiencias y hacia la elección adecuada de instrumentos de medida. Fomento positivo del interés por la investigación científica y técnica. Valoración crítica del análisis de resultados. Valoración de la correcta relación entre el enunciado matemático con un contexto real aplicable a nuestro día a día.

*Nota:* Contenidos de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

## 5.2 Objetivos de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica se ha redactado con la intención de satisfacer ciertos objetivos académicos. Se ha observado que la representación y resolución de funciones es un tema que resulta muy complicado para el alumnado. Es por ello que la presente propuesta se centra en presentar estos contenidos. A continuación se muestran los más importantes.

**Cuadro N° 12. Objetivos de la propuesta Didáctica.**

1.	Dominar el concepto de función; diferenciar entre gráficas que corresponden a funciones y gráficas que no corresponden a funciones.
2.	Reconocer gráficas de distintos tipos de funciones y aprender a diferenciarlas: la función constante, lineal, polifónica, exponencial, de valor absoluto, por tramos, etc.
3.	Calcular el dominio y la imagen de una función dada por su representación gráfica. Saber identificar las distintas características de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, discontinuidades, gráficas de funciones periódicas, etc.
4.	Dadas dos o más funciones, saber realizar sumas, restas, multiplicación y división de las mismas.
5.	Dada una tabla de valores, poder interpolar lineal para obtener nuevos valores.

*Nota:* Objetivos de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

## 5.3 Criterios de evaluación de la propuesta didáctica

Los criterios de evaluación contemplados por la legislación para el bloque de contenidos en que se centra nuestra propuesta didáctica se exponen a continuación.

**Cuadro N° 13. Criterios de evaluación de la propuesta didáctica.**

1) Interpretar y aplicar a casos concretos de la vida real las funciones estudiadas.
2) Resolver casos prácticos sencillos de situaciones reales mediante la aplicación de funciones.
3) Resolver ejercicios y problemas en orden creciente de dificultad.
4) Analizar críticamente la importancia de la aplicación de las funciones en la sociedad.

*Nota:* Criterios de evaluación de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

## 5.4 Metodología

Se presenta a continuación la propuesta metodológica del presente trabajo.

### 5.4.1 Recursos

Se emplearán los siguientes recursos para realizar la propuesta didáctica.

-*Pizarra digital interactiva (PDI)*: la empleará el docente para explicar las lecciones magistrales pertinentes, emplearla de apoyo en la corrección de ejercicios, guiar la clase, etc.

-*Proyector*: lo empleará también el docente para guiar la clase.

-Disponer del software *GeoGebra* instalado en el ordenador de clase. Los alumnos también han de tener el mismo software instalado en un ordenador portátil personalizado o en el propio de casa.

### **5.4.2 Objetivos**

A continuación se exponen los objetivos más significativos de la metodología propuesta:

1. Explicar a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología la representación y resolución de funciones de una manera más precisa, interactiva, dinámica y con un mayor ahorro de tiempo.
2. Compaginar una metodología propiamente tradicional con el empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra*.
3. Facilitar la comprensión y motivación de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología gracias al empleo del software *GeoGebra* que permite una representación y visualización más rápida y precisa de ciertos conceptos.

### **5.4.3 Actividades**

Las sesiones se desarrollarán básicamente en base a dos tipos de actividades: las lecciones magistrales y la realización y resolución de ejercicios propuestos.

-*Las lecciones magistrales* serán expuestas por el docente empleando la pizarra digital interactiva, el proyector y la pizarra tradicional. Dependiendo de la temática a desarrollar, se apoyará en el uso de *GeoGebra* para la representación y resolución de funciones. Aunque estas lecciones serán expuestas por el docente, se intentará fomentar el dinamismo y la participación del alumno, haciendo la clase lo más interactiva posible. En ello *GeoGebra* jugará un papel importante.

-*Los ejercicios* serán propuestos por el docente y realizados por los alumnos. Versarán sobre los conceptos teóricos explicados en el día correspondiente. Dependiendo del tipo de ejercicio, podrán realizarse de manera individual, por parejas o conjuntamente por toda la clase. Posteriormente, se corregirán en clase; el profesor guiará la corrección que se hará de manera conjunta por toda la clase o bien un alumno será elegido para su resolución.

### **5.4.4 Desarrollo de la propuesta**

La propuesta didáctica “*Resolución y representación de funciones*” comprende 14 sesiones de una hora cada una. A continuación se detallan el tipo de actividades de cada sesión, así como los recursos y la temporalización asociados:

**Cuadro N° 14. Metodología, recursos y temporalización de las sesiones.**

<b>Número de Sesión y temporalización</b>	<b>Recursos y tipo de clase</b>	<b>Título de la sesión _ contenidos a tratar</b>	<b>Tipos de actividades</b>
Sesiones 1 y 2: dos días (dos horas).	Clase magistral con pizarra digital	Puntos de Partida Concepto de función	Explicación sobre el concepto de función. Diferenciación entre gráficas que representan funciones de las que no. Tratamiento de ejemplos empleando el software <i>GeoGebra</i> para la representación de gráficas.
Sesión 3: Un día (una hora)	-Clase magistral con pizarra digital (primera media hora) y empleo de <i>GeoGebra</i> como recurso didáctico para la explicación de conceptos. -Resolución de ejercicios por parejas y corrección de los mismos de manera conjunta con la pizarra digital (segunda media hora).	Concepto de función, dominio y recorrido	Identificación de funciones y problemas sobre funciones, señalización del dominio y el recorrido en las funciones que se representarán con la ayuda de <i>GeoGebra</i> .
Sesiones 4 y 5: dos días (dos horas)	-Primer día: clase magistral con pizarra digital y empleo de <i>GeoGebra</i> para representar los distintos tipos de funciones. -Segundo día: resolución de ejercicios por parejas y corrección conjunta de los mismos con pizarra digital.	Algunas funciones importantes	Análisis de los tipos de funciones
Sesión 6: un día (una hora)	-Resolución individual de ejercicios con apuntes de clase.	Prueba control 1	Sobre lo visto hasta el momento. Se propondrán problemas prácticos contextualizados con situaciones de la vida real.
Sesiones 7, 8 y 9: tres días (tres horas)	-Primer día: clase magistral con pizarra digital y empleo de <i>GeoGebra</i> para señalar las características de una función sobre las gráficas representadas. -Segundo día: resolución conjunta de ejercicios ejemplo en la pizarra digital -Tercer día: resolución individual de ejercicios en libreta y corrección conjunta con pizarra digital y de tiza.	Características de una función	Ejercicios para identificar las características de una función
Sesión 10: un día (una hora).	-Resolución individual de ejercicios con apuntes de clase.	Prueba control 2	Sobre características de funciones
Sesión 11: un día (una hora).	-Clase magistral con pizarra tradicional y digital sobre la explicación teórica de las operaciones con funciones (primera media hora). -Resolución conjunta de ejercicios ejemplo en la pizarra digital (segunda media hora).	Operaciones con funciones	Ejercicios sobre operaciones con funciones: suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones.
Sesión 12 y 13: dos días (dos horas)	-Primer día: clase magistral con pizarra tradicional y digital sobre los conceptos teóricos de interpolación y extrapolación lineal. -Segundo día: resolución por parejas de ejercicios ejemplo y corrección conjunta con empleo de la pizarra de tiza	Interpolación y extrapolación lineal	Problemas de interpolación y extrapolación lineal
Sesión 14: un día (una hora).	-Resolución individual de ejercicios sin apuntes de clase.	Examen global	Sobre todo lo visto hasta el momento y sin apuntes

*Nota:* Metodología, recursos y temporalización de las sesiones. Fuente: Elaboración propia.

- *Sesiones 1 y 2 (dos días, dos horas).* En la primera sesión, el profesor comienza introduciendo el concepto de función. Se tratará de una clase magistral en la que empleará, como recurso, la Pizarra Digital Interactiva y proyectará en ella una presentación que le servirá de apoyo para mostrar los conceptos más relevantes. Explicará la definición de función y las distintas formas que puede adoptar: una tabla de valores, un gráfico, un texto, una expresión algebraica, etc. Con la ayuda del software *GeoGebra*, representará distintas funciones y señalará en ellas lo que se entiende por variable dependiente e independiente, dominio y recorrido. Igualmente, graficará distintas leyes algebraicas para explicar la diferencia entre las que representan funciones de las que no.

- *Sesión 3 (un día, una hora):* se propondrán ejercicios sobre las dos sesiones anteriores. Tratarán concretamente sobre la diferenciación entre gráficas que representan funciones y las que no, así como la identificación de las variables dependientes e independientes, el dominio y recorrido de diversas funciones. Los alumnos podrán resolver los ejercicios por parejas y, posteriormente, se corregirán de manera conjunta con la ayuda del profesor como guía.
- *Sesiones 4 y 5 (dos días, dos horas):* en la cuarta sesión el profesor explicará en una clase magistral los distintos tipos de funciones que existen: constante, lineal, afín, cuadráticas, racional, de valor absoluto, etc. Podrá apoyarse en el uso del software *GeoGebra* y la pizarra digital interactiva para proponer ejemplos. De esta manera también propiciará de una manera más sencilla la participación de los alumnos en la explicación por medio de formulación de preguntas y propuesta de ejemplos. En la quinta sesión, el profesor planteará a los alumnos determinados problemas relacionados con la identificación de los tipos de funciones. El alumno los podrá resolver por parejas y, posteriormente, se resolverán en clase de manera conjunta.
- *Sesión 6 (un día, una hora).* El docente prepara una prueba control para evaluar la adquisición de conocimientos del alumno. Por su parte, el alumno deberá resolver, ayudándose de sus apuntes, una serie de ejercicios sobre lo explicado hasta el momento. Lo hará de forma individual.
- *Sesiones 7, 8 y 9 (tres días, tres horas).* En la sesión siete, el docente explicará en clase magistral los distintas características de una función: intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, etc. Se podrá apoyar en el uso del software *GeoGebra* para representar ejemplos de funciones y señalar en ellas las características fundamentales. En la octava sesión, el profesor planteará ejercicios a los alumnos sobre la identificación de las características de diversas funciones. El alumno los podrá resolver de manera individual o por parejas en clase. En la siguiente sesión, la novena, estos ejercicios se corregirán de manera conjunta en la pizarra de tiza.
- *Sesión 10 (un día, una hora):* en esta sesión el docente propone una prueba control con ejercicios sobre la identificación de las características de una función. El alumno los podrá resolver de manera individual con la ayuda de sus apuntes.
- *Sesión 11 (un día, una hora):* el docente explicará en clase magistral y con la ayuda de la pizarra tradicional de tiza las operaciones básicas con funciones: suma, resta, multiplicación, cociente y composición de funciones. En la segunda media hora de la clase, se resolverán ejercicios de manera conjunta.

- *Sesiones 12 y 13 (dos días, dos horas)*. En la sesión 12, el docente explicará en clase magistral y con la ayuda de una presentación proyectada en PDI los conceptos de interpolación y extrapolación lineal. Posteriormente, propondrá una serie de problemas sobre estos temas que, el alumno podrá resolver de manera individual en casa. En la sesión 13, se corregirán de manera conjunta los problemas propuestos en la pizarra tradicional de tiza. El profesor podrá pedir a algún alumno en concreto que salga a ella a resolver algún ejercicio determinado.
- *Sesión 14 (un día, una hora)*: el docente proporciona al alumno un examen global sobre todo lo explicado acerca de las funciones. El alumno podrá resolverlo durante una hora de manera individual y, esta vez, sin la ayuda de apuntes de clase. El profesor corregirá estos exámenes y dará la nota al alumno posteriormente. Igualmente, el profesor corregirá en una sesión posterior todos los ejercicios del examen en la pizarra tradicional de tiza.

Se detallan, a continuación, dos de las sesiones más representativas, explicadas por el docente ayudándose de *GeoGebra* como recurso didáctico del aula.

#### **5.4.5 Primera sesión: el concepto de función**

Esta primera sesión durará una hora. Durante los primeros 30 minutos, el profesor explicará la base teórica del concepto de función así como los términos asociados a su definición (dominio, rango, variables dependiente e independiente, imagen y anti-imagen, etc.). En la segunda media hora de la sesión, el profesor explicará la diferencia entre gráficas que representan funciones y las que no. Propondrá al alumno diversos ejemplos para que identifiquen si se tratan de funciones o no.

Esta primera sesión será una introducción al tema de funciones y gráficas. El profesor comienza definiendo el concepto de función. La presentará como “una regla que relaciona dos variables numéricas de manera única y unívoca (es decir, a un valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente”. Explicará que esta regla puede ser una fórmula, una gráfica, una tabla de valores o una frase en lenguaje natural. Los elementos que la componen serán: una variable dependiente, una o unas variables independientes, el dominio y el rango o recorrido. A continuación, definirá cada uno de estos elementos. La variable dependiente suele reconocerse con el valor de  $y$  y recibe este nombre porque depende de los valores que reciba la variable independiente, que suele representarse mediante la  $x$ . El dominio es el conjunto de valores que puede adoptar la variable independiente  $x$ , es decir, el

conjunto de números reales a los que se puede aplicar la función; mientras que el recorrido es el conjunto de números que puede adoptar la variable dependiente  $y$ .

La explicación de estos conceptos ha de complementarse con un importante tratamiento visual. Los alumnos entenderán mucho mejor estos términos si el profesor representa la función de manera gráfica. Proponemos el empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra*; ya que gracias al dinamismo e interactividad que fomenta, será más sencillo despertar el interés y la motivación de los alumnos. Para ello, el profesor encenderá la PDI y abrirá el software *GeoGebra*. Aparecerá la interfaz del programa. A continuación, representará un tipo de función; por ejemplo, la función parabólica  $y = x^2 + 3x - 6$ . Lo escribirá con el teclado del ordenador y proyectará la imagen en la PDI. Sobre esta imagen señalará, con ayuda de un puntero, la variable dependiente e independiente, el dominio y la imagen o recorrido. Al tiempo que define y explica cada uno de estos conceptos.

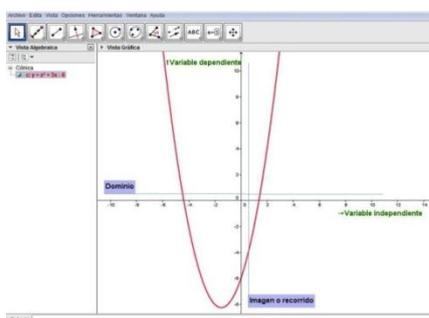


Gráfico N° 15. Representación de una función junto con su dominio, recorrido, variable dependiente e independiente. Fuente: Elaboración propia.

Sobre este mismo ejemplo de función también podrá explicar los conceptos de imagen y anti-imagen. Dado un valor de la variable independiente  $x$ , decimos que su imagen es el correspondiente valor de la variable dependiente  $y$ . A la inversa, dado un valor de la variable dependiente  $y$ , su anti-imagen sería el valor de la variable independiente  $x$  que la función le asocia. En nuestro ejemplo, la imagen de 2 sería 4; y, a la inversa, la anti-imagen de 4 sería 2. Como se puede observar, en el eje de abscisas se encuentran los valores de la anti-imagen y en el de ordenadas los de la imagen.

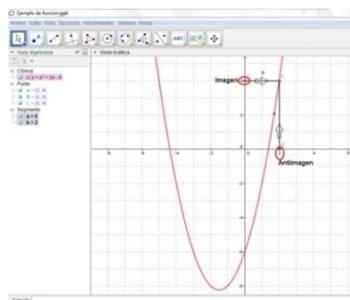


Gráfico N° 16. Conceptos de imagen y anti-imagen de una función. Fuente: Elaboración propia.

Una vez explicados los conceptos de función, dominio de definición, recorrido, variables dependiente e independiente, imagen y anti-imagen, el docente puede seguir proponiendo ejemplos hasta finalizar la primera media hora de la sesión. El objetivo es garantizar la completa comprensión por parte de los alumnos de los conceptos explicados.

Durante la segunda media hora de la sesión, el profesor explicará la diferencia entre las gráficas que representan funciones de las que no. Como bien queda expresado en la definición, una función es una relación única y unívoca de dos variables numéricas; es decir, que a un valor de una variable independiente  $x$  le corresponde un único valor de la variable dependiente  $y$ . Si esto no se cumple en una gráfica, entonces no estaremos ante una función. Para explicar esta diferenciación el docente empleará 10 minutos. Durante los 20 minutos restantes, el profesor puede representar, con la ayuda del software *GeoGebra*, una serie de gráficas para que los alumnos, de manera conjunta, identifiquen si se trata de una función o no. El profesor introducirá en el software la expresión algebraica de la izquierda y el programa nos dará la representación gráfica correspondiente. Ante ella, el alumno identificará si se trata o no de una función. Se propone, a continuación, un ejemplo de dichas gráficas.

*Ejercicio propuesto: Dada las siguientes expresiones algebraicas (columna de la izquierda), indica si representan funciones o no.*

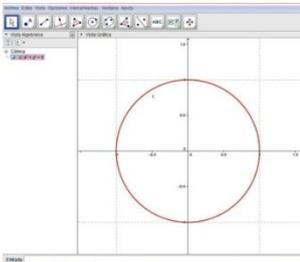
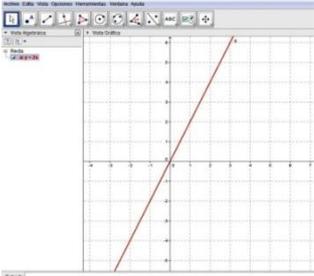
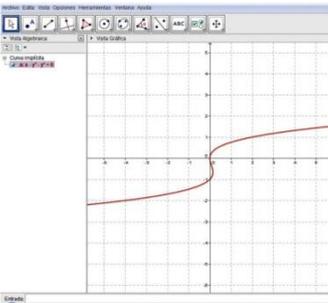
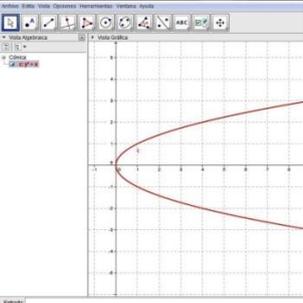
	
<p><math>x^2+y^2=1</math>. No es una función porque no presenta una relación unívoca de variables.</p>	<p><math>y = 2x</math>. Sí se trata de una función (a cada variable independiente <math>x</math> le corresponde una variable dependiente <math>y</math>).</p>
	
<p><math>x=y^3+y^2</math>. No es una función porque no presenta una relación unívoca de variables</p>	<p><math>x=y^2</math>. No es una función porque no presenta una relación unívoca de variables.</p>

Gráfico N<sup>o</sup> 17. Ejercicio sobre el concepto de función. Fuente: Elaboración propia.

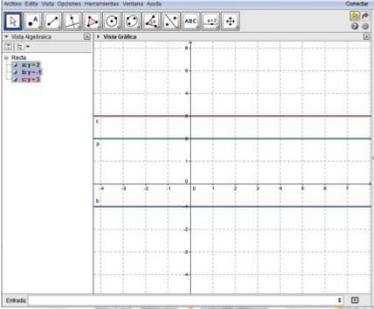
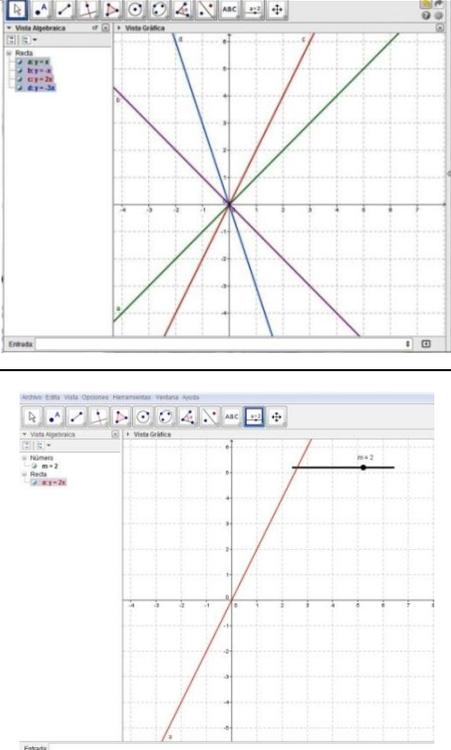
#### **5.4.6 Cuarta sesión: Tipologías de funciones**

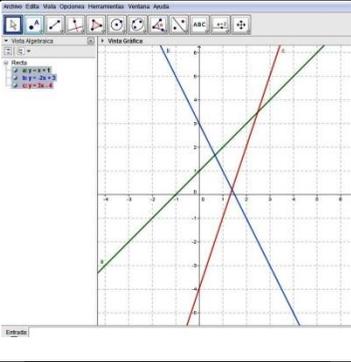
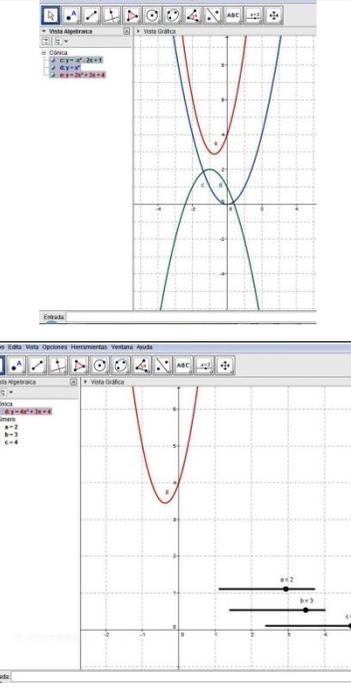
A continuación se desarrollará una de las sesiones más importantes dentro del tema de funciones y gráficas: la explicación de las tipologías de funciones. Al igual que antes, esta sesión durará 60 minutos. Esta vez se dedicará toda ella a una explicación magistral por parte del docente. Se empleará la PDI y el software *GeoGebra* para la representaciones de funciones ejemplos y además se aplicarán ciertos comandos de este software, como el “*deslizador*” para mejorar la comprensión gráfica de los conceptos teóricos así como la interactividad y dinamismo con los alumnos. El hecho de emplear este programa también permitirá una representación de funciones más precisa y rápida, permitiendo un mejor aprovechamiento del tiempo. Por su parte, los alumnos deberán prestar atención y tomar nota de las recomendaciones del profesor.

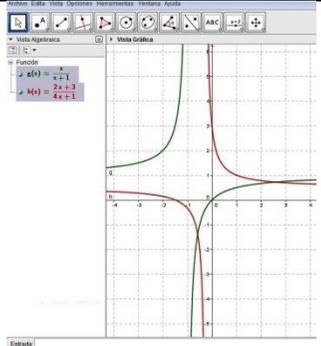
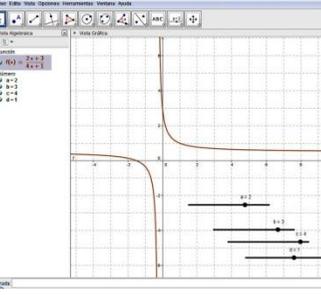
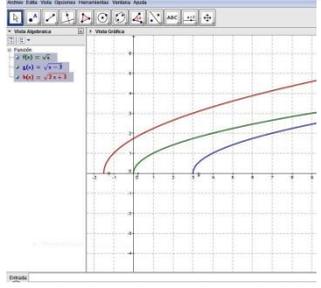
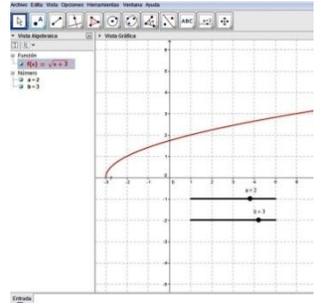
El profesor presentará seis tipos de funciones distintas, dedicando unos 10 minutos a la explicación y representación gráfica de cada una de ellas. A modo de ejemplo, se podrá seguir el siguiente modelo (Cuadro N° 15). Éste se resume en los seis recuadros siguientes; cada uno incorpora la explicación del docente y la representación gráfica de las respectivas funciones, así como el uso compartido del deslizador entre el profesor y el alumno.

Una vez el profesor haya explicado los distintos tipos de funciones y su representación gráfica (Cuadro N° 15), podrá proponer, en la siguiente sesión, ejercicios sobre identificación de los tipos de funciones. En ellos, podrán aparecer las gráficas de distintas funciones para que el alumno identifique de qué tipo se trata. Además, también podrían señalar en ellas los parámetros explicados de forma teórica como, por ejemplo, las variables dependientes e independientes, el dominio, recorrido, la imagen y la anti-imagen.

**Cuadro N° 15. Explicación y representación de las tipologías de funciones**

<p><i>Tipología de función:</i></p> <p>1. <i>Funciones constantes del tipo</i>  <math>F(x)=K</math>.</p>	<p><i>Explicación del profesor:</i></p> <p>El profesor comenzará explicando el tipo de función más sencilla: <i>las funciones constantes</i>. Su gráfica es una recta horizontal, es decir paralela al eje de abscisas, que corta al eje de ordenadas en el punto <math>(0, k)</math>. Representando distintas funciones, se podrá observar cómo varía el punto de corte con el eje de ordenadas <math>(0, k)</math>.</p>	
<p>2. <i>Funciones lineales del tipo</i>  <math>F(x)=mx</math>.</p>	<p><i>Explicación del profesor:</i></p> <p>A continuación, el profesor explicará <i>las funciones lineales</i> del tipo <math>F(x)=mx</math>. Según su definición, su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas que no es horizontal, salvo que el valor de <math>m</math> sea nulo, en cuyo caso sería una constante. El valor de <math>m</math> es la pendiente de la recta y mide la inclinación de ésta. Está definida para el conjunto de los números reales. Su imagen también son todos los números reales. Mediante la representación gráfica de distintas funciones lineales, se puede estudiar cómo varía la inclinación de la recta según el valor de la pendiente <math>m</math>. Si <math>m</math> es positiva, la recta será creciente y si <math>m</math> es negativa, será decreciente.</p> <p><i>Interacción con el alumnado mediante el empleo de deslizadores:</i></p> <p>La influencia del parámetro <math>m</math> en la representación gráfica de funciones puede estudiarse fácilmente en <i>GeoGebra</i> mediante el uso de “deslizadores”. Esta aplicación del software permite escribir una función determinada y establecer en ella varias variables. A estas variables se les puede ir asociando distintos valores numéricos (podemos ir desplazando el “deslizador”) y así estudiar la influencia que tienen en la representación gráfica final. En nuestro caso, definiremos como “deslizador” la pendiente <math>m</math>. Según variamos el valor de <math>m</math>, la gráfica de la función varía. A continuación se muestra la representación gráfica de una función lineal con <math>m</math> como deslizador. En este caso, toma el valor de 2, pero si desplazamos el “deslizador” a izquierda o derecha, el valor de <math>m</math> irá variando y la gráfica de la recta se inclinará más o menos en función de <math>m</math>. Para atraer la atención de los alumnos, el profesor puede pedir que predigan si la inclinación de la pendiente aumentará o disminuirá según mueva el deslizador a izquierda o derecha.</p>	

<p>3. Funciones polinómicas de primer grado del tipo <math>F(x)=mx+n</math></p>	<p><b>Explicación del profesor:</b></p> <p>Una vez definidas las funciones constantes y lineales, el profesor continuará la explicación representando las funciones <i>polinómicas de primer grado</i>. Los tres tipos pertenecen al conjunto de funciones afines. Su gráfica también es una recta, pero ahora no pasa por el origen, sino que corta al eje Y en el punto de coordenadas <math>(0, n)</math>, por esta razón, se llama a <math>n</math> ordenada en el origen de la recta. En todo lo demás se comporta como la función lineal, incluidos el dominio y la imagen. Al igual que antes, el profesor puede representar con <i>GeoGebra</i> distintos ejemplos de funciones polinómicas de primer grado y mostrar así cómo afectan los valores de los parámetros <math>n</math> y <math>m</math> en la representación final de la función. Si no emplease <i>GeoGebra</i>, la representación a mano de las mismas en la pizarra tradicional, sería mucho más lenta y menos precisa.</p> <p><b>Interacción con el alumnado mediante el empleo de deslizadores:</b></p> <p>Además y, al igual que antes, también puede definir <math>m</math> y <math>n</math> como “deslizadores” de la función para mostrar mejor su influencia en la gráfica final. En este caso, toman los valores de 3 y 4 respectivamente. Ante ésta, el profesor puede pedir a los alumnos que predigan la forma de la función antes de mover el deslizador de <math>m</math> y <math>n</math> a izquierda o derecha.</p>	
<p>4. Funciones polinómicas de segundo grado o cuadráticas, del tipo <math>F(x)=ax^2+bx+c</math>.</p>	<p><b>Explicación del profesor:</b></p> <p>A continuación se pueden presentar las <i>funciones polinómicas de segundo grado o cuadráticas</i>. La gráfica de esta función es una parábola con vértice en el punto de abscisa <math>x = \frac{-b}{2a}</math>. Si <math>b</math> es 0, la abscisa del vértice será nula y la gráfica de la función será simétrica con respecto al eje de ordenadas. El coeficiente <math>a</math> es el término de la variable al cuadrado, e indica hacia donde está abierta la parábola. Si <math>a</math> es positivo, la parábola tendrá forma de <math>U</math> (será cóncava), mientras que si <math>a</math> es negativa, tendrá forma de <math>U</math> invertida (será convexa).</p> <p><b>Interacción con el alumnado mediante el empleo de deslizadores:</b></p> <p>La influencia de los términos <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math> puede estudiarse fácilmente estableciendo en el software <i>GeoGebra</i> deslizadores con estos coeficientes. A continuación se muestra una imagen empleando deslizadores en <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math>. En este caso, adoptan los valores de 2, 3 y 4 respectivamente. Una vez se haya practicado con el deslizador de <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math>, el profesor podrá pedir a los alumnos que predigan la forma que adquirirá la función según mueva el deslizador a izquierda o derecha.</p>	

<p>5. Funciones racionales del tipo</p> $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	<p><i>Explicación del profesor:</i></p> <p>Otro tipo significativo de funciones son <i>las racionales</i>, del tipo <math>F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}</math>, donde <math>P(x)</math> y <math>Q(x)</math> son polinomios de grado 1 (no divisibles). La representación gráfica es una hipérbola con una asíntota vertical y otra horizontal en el punto que resulta de dividir los coeficientes de los términos dominantes. El profesor puede definir la función como <math>F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}</math> y graficar en <i>GeoGebra</i> distintas funciones asignando diferentes valores a dichos términos.</p>	
	<p><i>Interacción con el alumnado mediante el empleo de deslizadores:</i></p> <p>También puede establecer deslizadores en <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math> y <math>d</math>. En este caso adoptan los valores de 2,3,4 y 1 respectivamente pero puede pedir a los alumnos que predigan la forma de la función según mueva el deslizar de los términos a izquierda o derecha.</p>	
<p>6. Función raíz cuadrada del tipo</p> $F(x) = \sqrt{ax+b}$	<p><i>Explicación del profesor:</i></p> <p>Finalmente, el profesor explicará la función <i>raíz cuadrada</i>. Ahora la función no está definida para los valores negativos de <math>x</math>. Por esta razón su dominio son los números reales no negativos, <math>dom(f) = [0, +\infty)</math>, mientras que su imagen es también el conjunto de los números reales no negativos, <math>img(f) = [0, +\infty)</math>. A continuación el docente puede representar, con la ayuda del software <i>GeoGebra</i>, distintos ejemplos de funciones raíz cuadrada</p>	
	<p><i>Interacción con el alumnado mediante el empleo de deslizadores:</i></p> <p>Igualmente, puede definir una función tomando <math>a</math> y <math>b</math> como deslizadores para poder analizar así mejor su influencia en la gráfica final. En este caso, toman los valores de 2 y 3 respectivamente pero podrá variar estos valores desplazando el deslizador a izquierda o derecha. Los alumnos podrán predecir, antes de que el profesor mueva el deslizador, la forma que irá adoptando la función en cada caso.</p>	

*Nota:* Explicación y representación de las tipologías de funciones con el empleo de *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

## 6. APORTACIONES DEL TRABAJO

El presente trabajo presenta las siguientes aportaciones principales:

En primer lugar, se proporciona un análisis bibliográfico sobre la situación actual de la docencia de las matemáticas en España. Se han analizado los resultados de los alumnos españoles según informes internacionales, como PISA y TIMSS, y se ha presentado un estudio del marco legal de la docencia de esta materia en España así como de la incorporación de las TIC a la misma.

El marco teórico ha sido contrastado con los resultados de un estudio de campo que el presente trabajo también aporta. Se ha confirmado, después de realizar una encuesta a un número representativo de docentes de matemáticas de 1º de Bachillerato de la ciudad de Barcelona, la necesidad de un cambio metodológico en la docencia de las matemáticas.

En respuesta a este cambio metodológico que se precisa en la docencia de las matemáticas, se ha propuesto el empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra* como recurso didáctico en el aula. El presente trabajo presenta un análisis de las prestaciones y ventajas de este software en el aula y del uso que se le puede dar para la docencia de las matemáticas.

Así mismo, para finalizar el trabajo, se ha presentado una propuesta didáctica sobre la resolución y representación de funciones en 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología incorporando *GeoGebra* como recurso didáctico. Mediante este ejemplo, se ha mostrado cómo el uso de este software puede, entre otras cosas, mejorar la visualización y comprensión gráfica de lo explicado teóricamente así como la interactividad y el dinamismo del aula. Además, también permite mayor precisión en las representaciones y un mayor aprovechamiento del tiempo. En definitiva, se ha planteado una propuesta didáctica según una metodología tradicional pero con la innovación del empleo de un software de geometría dinámica que sin duda, despertará el interés y motivación por parte del alumnado.

## 7. DISCUSIÓN

La implantación en el aula de los programas de geometría dinámica como *GeoGebra* para la docencia de matemáticas no es una tarea nada fácil. Se precisa disponer de determinados medios económicos, recursos espaciales (aulas y zonas habilitadas para su uso) así como materiales (ordenadores, pizarras digitales interactivas y otros dispositivos necesarios) para conseguir un correcto funcionamiento de los mismos. Además, muchos docentes se pueden mostrar reticentes a su uso porque requieren un cierto tiempo de preparación y formación previa. En cualquier caso, el análisis teórico y el estudio de campo realizados sí que muestran que los profesores aprecian el potencial de las TIC como herramientas para ayudar al cambio metodológico que se precisa en la docencia de matemáticas. Esto no quiere decir que las TIC tengan que sustituir completamente a la enseñanza de siempre sino que han de emplearse más bien como una herramienta de apoyo. Los beneficios en el aprendizaje de ciertos programas informáticos que el uso de las TIC conlleva parecen ser claros. Según Peña (2010) fomentan la experimentación práctica del alumnado y, de acuerdo con Zerpa (2010), Ferro (2009) y Sordo (2005), favorecen la interactividad y dinamismo del aula, la motivación del alumnado, la precisión y el aprovechamiento del tiempo así como la comprensión de ciertos conceptos abstractos. Ahora bien, el uso que se haga de los mismos depende de los docentes. Es obligación de ellos aprovechar estos recursos y sacar máximo partido de ellos; sólo así podrán aprovecharse sus potencialidades para el cambio metodológico que se precisa.

En el presente trabajo se propone la aplicación de las TIC para la enseñanza de funciones y gráficas en 1º de Bachillerato dada la importancia de las mismas en la docencia de las matemáticas. Desde 1883, instituciones y personalidades de renombre en el mundo de la docencia (College Entrance Examination Board, 1959; Hamley, 1934; Hedrick, 1922; citados en Carlson y Oethrtman, 2005), han declarado la necesidad de enfatizar la importancia del concepto de función en el aula. Es momento ahora de emplear todas las prestaciones que las TIC nos ofrecen para potenciar el aprendizaje analítico y superar las dificultades que su estudio implica. Además, la aplicación de las TIC en este ámbito puede extenderse al campo completo de Bachillerato así como al de la ESO y Primaria.

## 8. CONCLUSIONES

El presente trabajo se ha desarrollado con el fin de alcanzar una serie de objetivos.

En cuanto al primero de ellos se refiere, *explicar las principales dificultades que enfrentan los alumnos de 1º de Bachillerato en el aprendizaje de funciones y gráficas*, se ha estudiado, en el apartado de “análisis teórico” del trabajo el marco bibliográfico sobre el tema. Concretamente, se ha leído el artículo de Carlson y Oethrtman (2005), *Key aspects of knowing and Learning the concept of function*. Gracias a ello, se ha podido mostrar la importancia del estudio de funciones, así como los errores más frecuentes que cometen los alumnos durante el proceso de aprendizaje de las mismas. Por tanto, mediante un análisis bibliográfico de la literatura que trata las dificultades de aprendizaje del concepto de función, el primer objetivo se ha cumplido.

El segundo objetivo del trabajo consiste en analizar *las posibles causas y mecanismos que llevan a los alumnos a cometer los errores en el aprendizaje de funciones*. Dichos mecanismos también han sido analizados por medio del citado estudio bibliográfico. Por tanto, se puede concluir que, gracias al estudio de la literatura sobre el análisis funcional matemático, se ha cumplido el segundo objetivo consistente en estudiar las causas de los errores en el aprendizaje de funciones.

Respecto al tercer objetivo, *averiguar y exponer las principales aplicaciones y prestaciones de GeoGebra como herramienta para trabajar la resolución de funciones en el aula con alumnos de 1º de Bachillerato*, se ha realizado en el apartado de estudio teórico un análisis bibliográfico sobre este software. Se ha mostrado que autores como Peña (2010), Zerpa (2010), Ferro (2009) y Sordo (2005) están a favor del uso de este programa, destacando algunas de sus prestaciones más importantes como la facilidad de uso, la experimentación práctica que permite al alumno, el dinamismo e interactividad de la clase o la precisión y aprovechamiento de tiempo que fomenta. Por tanto, mediante un detallado análisis bibliográfico sobre *GeoGebra*, se ha satisfecho el tercer objetivo del trabajo consistente en identificar las principales prestaciones que este software ofrece.

En cuanto al cuarto objetivo, *realizar un estudio de campo consistente en una encuesta a profesores de matemáticas de Bachillerato*, se ha llevado a cabo dicho estudio en el apartado correspondiente del presente trabajo. Se han realizado 24 encuestas de 16 preguntas a docentes de 1º de Bachillerato de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología en la ciudad de Barcelona. Los temas preguntados tratan sobre la actitud y nivel de los alumnos en Matemáticas, las dificultades de aprendizaje de los alumnos en esta asignatura, el empleo de las TIC en el aula o el nivel

de conocimiento del software de geometría dinámica *GeoGebra* en clase. Una vez analizados los resultados de dicha encuesta, se ha podido comprobar que éstos corroboran lo estudiado en el marco teórico del trabajo. Además, la mayoría de profesores coinciden en la necesidad de un cambio metodológico en la docencia de Matemáticas con el fin de despertar el interés y motivación del alumnado hacia la asignatura. Por tanto, mediante la realización de una encuesta a docentes de matemáticas de 1º de Bachillerato en la ciudad de Barcelona se ha podido cumplir con el cuarto objetivo del trabajo consistente en la realización de un estudio de campo.

Finalmente, en base a todo lo planteado hasta el momento, se ha satisfecho el objetivo principal del trabajo: *presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar funciones y gráficas a alumnos de 1º de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias y Tecnología basada en el uso de GeoGebra como recurso didáctico*. Esta propuesta didáctica supone el primer paso hacia el cambio metodológico que la mayoría de docentes aseguran se precisa, dando también respuesta a la necesidad de incorporar las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula. Dicha propuesta metodológica puede extender su aplicación al campo de toda la docencia de Bachillerato así como a la de otros ciclos educativos como la ESO y Primaria. Analizar las ventajas de su aplicación podría ser, sin duda, de gran interés para la investigación docente.

## 9. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Si hacemos un balance general del presente trabajo, podremos corroborar que los objetivos marcados inicialmente se han visto satisfechos. Sin embargo, los contenidos, la extensión y el marco del mismo han estado condicionados por algunas limitaciones. Éstas son de tipo temporal, espacial y referidas al propio planteamiento del trabajo.

*-Limitaciones temporales.* El periodo de realización del trabajo comprende un corto espacio temporal por lo que el ámbito de estudio se centra únicamente en un ámbito del currículum, la docencia de funciones y gráficas, sin llegar a abarcar partes que igualmente resultarían de interés. En modo similar, en caso de disponer de mayor tiempo, el ámbito del estudio de campo se podría extender a un ámbito mayor. Por último, la propuesta didáctica se ha impartido durante el periodo de prácticas en la Escola Santíssima Trinitat de Barcelona, pero se necesitaría disponer de un mayor periodo de tiempo (varios cursos académicos) para comprobar su implementación rigurosa y las ventajas de la misma.

*-Limitaciones espaciales.* Al mismo tiempo, la extensión del trabajo es acotada y estructurada en partes bien definidas. Se ha analizado bibliografía de calidad contrastada, desarrollada por autores de renombre en el ámbito de la didáctica. Sin embargo, dicho análisis queda aún abierto a estudios más amplios propios de trabajos de mayor extensión (como, por ejemplo, tesis doctorales).

*-Limitaciones en cuanto al planteamiento del trabajo.* Por todo lo anteriormente comentado, principalmente por las limitaciones temporales y espaciales, el trabajo se enmarca en el ámbito de 1º de Bachillerato y para la enseñanza de funciones y gráficas. La aplicación a otros cursos, como la Educación Secundaria Obligatoria o Primaria, así como de otras materias como geometría, son temas abiertos como líneas de investigación futuras.

## 10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Este trabajo se centra en el uso de *GeoGebra* como herramienta didáctica para la resolución y representación de funciones en 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología. Para ello se ha diseñado una propuesta didáctica con una metodología de enseñanza y una serie de explicaciones y actividades para los alumnos. El trabajo es acotado y bien definido, sin embargo, el desarrollo del mismo da cabida a ciertas líneas de investigación futuras, como podrían ser las siguientes:

1. El estudio de campo desarrollado en el presente trabajo abarca un ámbito determinado de la ciudad de Barcelona. En futuras investigaciones, resultaría de gran interés ampliar el ámbito del mismo a una zona de mayor extensión.
2. Corroborar la adecuación de la propuesta didáctica en una clase de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Como se ha comentado anteriormente, durante el desarrollo de las prácticas, la propuesta didáctica se ha podido aplicar en la Escola Santíssima Trinitat de Barcelona; sin embargo, para corroborar la adecuación de la misma, ésta debería implementarse durante sucesivas ocasiones y en un número mayor de centros docentes.
3. La propuesta metodológica desarrollada en el presente trabajo se centra en el uso del software *GeoGebra* como recurso didáctico del aula. Del mismo modo, en futuras investigaciones, se podría extender la propuesta de la misma empleando otros programas de geometría dinámica como *Cabri o Geonext*.
4. La propuesta didáctica desarrollada en el presente trabajo está diseñada para el curso de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. En futuras investigaciones, el desarrollo de la misma podría extenderse al ámbito de todo Bachillerato.
5. De un modo similar a como se comentaba en el punto anterior, el ámbito de la propuesta didáctica podría abarcar otros niveles educativos como la ESO y Primaria.
6. La propuesta metodológica planteada en el presente trabajo hace referencia a la representación y resolución de funciones y gráficas, como materia de análisis matemático. El desarrollo de la misma podría extenderse igualmente a otros ámbitos de la asignatura, como, por ejemplo geometría e, incluso a otras materias, como por ejemplo, Dibujo Técnico o Tecnología.

# 11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## 11.1 Bibliografía utilizada

- Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 5-24. Disponible en: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095332>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D. (1992). *Development of the process conception of function*. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#b>
- Bru, E. (2013). *Enseñanza del Álgebra en 4º de ESO usando Moodle*. Trabajo Fin de Máster para obtener el grado de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Disponible en: [http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1805/2013\\_04\\_02\\_TFM\\_BRU\\_DOMINGO\\_EDUARD.pdf](http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1805/2013_04_02_TFM_BRU_DOMINGO_EDUARD.pdf)
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 352-378. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>
- Carlson, M., Oethrtman, M. (2005). *Key aspects of knowing and Learning the concept of function*. Researcher Sampler, MAA ONLINE, The mathematical Association of America. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#important>
- Carlson, M. P. (1998). *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education (pp. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#b>
- Carlson, M. P., Smith, N., and Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (pp. 165-172). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawai. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#b>

[departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#cs](http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#cs)

Coll, C. & Monereo, C. (2008). *Psicología de la educación virtual*. Barcelona: Morata.

College Entrance Examination Board. (1959). *Program for college preparatory mathematics*. New York: Commission on Mathematics. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>

Cooney, T., and Wilson, M. (1996). *Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives*. Integrating research on the graphical representation of functions (pp. 131-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>

Del Pópulo, M., Romero, P., Delgado, G., de la Palma, M., Gómez, C., del Pozo, R. (2011). Dificultades de aprendizaje del Componente Gráfico-Matemático del Modelo IS-LM de los Alumnos de Macroeconomía de la Universidad de Sevilla. *Revista de Docencia Universitaria*. Disponible en: <http://revistas.um.es/redu/article/view/92541>

Dillenbourg, P. (2002). *Over-scripting CSCL: The risk of blending collaborative learning with instructional design*. Nederland : Kirschner.

DOGC (2008). *Curriculum Batxillerat - Decret 142/2008. num 5183*. Disponible en: <http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c5fe6a2e-9a69-acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf>

Ferro, C., Martínez, A. y Otero, M. (2009). Ventajas del uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *EduTEC: Revista electrónica de Tecnología educativa*, 29, 3-6.

González, M<sup>a</sup> T. y Martín, E. (2003). *Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas*. Salamanca. Disponible en: [www.iberomat.uji.es/...iones/77\\_teresa\\_gonzalez\\_2.doc](http://www.iberomat.uji.es/...iones/77_teresa_gonzalez_2.doc)

Hamley, H. R. (1934). The history of the function concept. *The ninth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: Relational and functional thinking in mathematics* (pp. 48-84). New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>

- Hedrick, E. R. (1922). *Functionality in the mathematical instruction in schools and colleges*. The Mathematics Teacher, 15, 191-207. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>
- Hicks, J.R. (1937). Mr. Keynes and the Classics - A Suggested Interpretation. *Econometrica*. 5, 147-159
- Hohenwarter, M. and Lavicza, Z. (2010). *Gaining momentum: GeoGebra inspires educators and students around the world*. Disponible en: <http://ggijro.files.wordpress.com/2011/07/article1.pdf>
- Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo, Neturity & Fundación Germán Sánchez Ruipérez (2007). *Las tecnologías de la información y de la comunicación en la educación. Informe sobre la implantación y el uso de las TIC en los centros docentes de educación primaria y secundaria (curso 2005-2006)*. Madrid. Disponible en: <http://www.oei.es/tic/TICCD.pdf>
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado (10 de diciembre de 2013), núm. 295, pp. 97858-97921. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>
- Martinovic, D., karadag, Z., Freiman, V. (2010). *First Decade of GeoGebra: Looking back through Socio-Cognitive Lenses*. Disponible en: <http://ggijro.files.wordpress.com/2011/07/article-4.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2003). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Disponible en: <http://thales.cica.es/~epsilon/debate/PISA2004/pisa2003resumenespana.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (4 de mayo de 2006). Obtenido de La Ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación (LOE). Disponible en: [http://www.educacion.gob.es/educa/incual/pdf/LeyOrg\\_2\\_2006.pdf](http://www.educacion.gob.es/educa/incual/pdf/LeyOrg_2_2006.pdf)
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Obtenido de Proyecto de Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) (2013). Texto presentado en el Consejo de Ministros (17 de mayo de 2013). Disponible en: <http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/dms/mecd/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/lomce/20130517-aprobacion-proyecto-de-ley.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013a). Obtenido de Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado (10 de diciembre de 2013b), núm. 295, pp. 97858-97921. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>

- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se establecen sus enseñanzas mínimas. Boletín Oficial del Estado (6 noviembre 2007), núm. 266, pp. 45381-45477. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/11/06/pdfs/A45381-45477.pdf>
- Miranda, R. (2005). *Comparación de procesadores geométricos. Geometría dinámica*. Disponible en: <http://www.geometriadinamica.el/2005/08/comparacion-de-procesadores-geometricos/>
- Monk, S. (1987). *Students' understanding of functions in calculus courses*. (Unpublished manuscript, University of Washington, Seattle, WA). Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#m92>
- Monk, S., and Nemirovsky, R. (1994). *The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes*. Research in Collegiate Mathematics Education. I. CBMS Issues in Mathematics Education (pp. 139-168). Providence, RI: American Mathematical Society. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#mn>
- Mullis, V., Martin, M., Foy, P. and Alka (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Obtenido de Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Disponible en: [http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11\\_IR\\_Mathematics\\_Full\\_Book.pdf](http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_Full_Book.pdf)
- OCDE (2013). *ESPAÑA—Nota País—Resultados PISA 2012*. Disponible en: <http://estaticos.elmundo.es/documentos/2013/12/03/pisa-espana.pdf>
- Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>
- Socas, M. M., Palarea, M. M. y Ruano, R. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 7, pp. 311-322. Disponible en: <http://www.pna.es/Numeros/pdf/Ruano2008Analisis.pdf>
- Santos, R. (21 de Octubre de 2007). *Implantación de las TIC en la educación y capacitación del docente*. Disponible en:

<http://www.uca.edu.sv/deptos/letras/enplural/archivo/a2n1/articulos/arto1.htm>

- Schwarz, B. B., and Hershkowitz, R. (1999). *Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools*. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 362-389. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#sh>
- Socas, M.M. (2001). *Investigación en didáctica de la matemática vía modelos de competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico*. Universidad de La Laguna, documento no publicado.
- Sordo, J. (11 de enero de 2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España. Disponible en: <http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucmt28911.pdf>
- Thompson, P. W.(1994a). *Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus*. Educational Studies in Mathematics, 26, 229-274. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>
- Thompson, P. W.(1994b). *Students, functions, and the undergraduate curriculum*. Research in Collegiate Mathematics Education. I. CBMS Issues in Mathematics Education (pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society. Disponible en: <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#thb>
- Zakaria, E. y Lee, L.S., (2012). Teachers' Perceptions towards the use of GeoGebra in the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal of mathematics and Statistics* 8, 253-257.
- Zerpa, M. (2010). Geometría analítica plana con GeoGebra. *NÚMEROS. Revista Didáctica de las Matemáticas*, 75, 131-142.

## 11.2 Bibliografía complementaria

- Carneiro, R., Toscano, J. & Díaz, T. (2012). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo*. Madrid: Fundación Santillana.
- Coll, C., Gotzens, C., Monereo, C., Onrubia, J., Pozo, J. & Tapia, A. (1999). *Psicología de la Instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Barcelona: Horsori editorial.
- Dillenbourg, P. (2002). *Over-scripting CSCL: The risk of blending collaborative learning with instructional design*. Nederland: Kirschner.
- Hohenwarter, M. & Hohenwarter, J. (2009). *Documento de ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2*. Disponible en: <http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>
- Mullis, V., Martin, M., Foy, P. & Alka. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics* Disponible en: [http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11\\_IR\\_Mathematics\\_Full\\_Book.pdf](http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_Full_Book.pdf)
- Preiner, J. (11 de enero de 2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematic teachers: The case of GeoGebra*. Tesis Doctoral. Universidad de Salzburgo, Austria. Disponible en: <http://www.geogebra.org/publications/jpreiner-dissertation.pdf>
- Prensky, M. (11 de enero de 2001). *Digital Natives, Digital Immigrants. On the horizon*. Disponible en: <http://www.marcprensky.com/writing/prensky%20-%20digital%20natives,%20digital%20inmigrants520-%20part1.pdf>
- Roschelle, J., & Teasley, S. (1995). *Construction of shared knowledge in collaborative problem solving*. New York: C.O'Malley.

## 12. ANEXO I: CUESTIONARIO

A continuación, se presenta la relación de preguntas que conforman el cuestionario de la encuesta llevada a cabo en el estudio de campo del presente trabajo. Se trata de 14 preguntas de respuesta cerrada y dos de respuesta abierta que dan cabido a ciertos comentarios por parte de los encuestados.

- 1) ¿Cómo considera el nivel de matemáticas en los alumnos de hoy en día?
  - a) Muy bueno
  - b) Bueno
  - c) Normal
  - d) Malo
  - e) Muy malo
  
- 2) ¿La actitud hacia las matemáticas de los alumnos es la adecuada? ¿Cómo la definiría?
  - a) Muy buena
  - b) Buena
  - c) Normal
  - d) Mala
  - e) Muy mala
  
- 3) ¿Qué bloque de las matemáticas es el que más cuesta?
  - a) Contenidos comunes
  - b) Números
  - c) Álgebra
  - d) Geometría
  - e) Funciones y gráficas
  - f) Estadística y probabilidad
  
- 4) ¿Cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en las matemáticas?
  - a) Problemas de comprensión
  - b) Falta de Base adecuada
  - c) Abstracción de los conceptos

- d) Falta de motivación
  - e) Miedo a la asignatura
  - f) Otros
- 5) Dentro del bloque de álgebra, ¿cuáles son las dificultades mayoritarias que se encuentran los alumnos en las matemáticas?
- a) La representación de funciones
  - b) La identificación de las características de una función
  - c) El concepto de asíntota
  - d) La resolución problemas de la vida real mediante funciones
- 6) Comente qué cree que se podría mejorar para lograr mejores resultados en matemáticas: actuar sobre los padres, actuar sobre los niños, mejorar la actitud, mejorar la base de conocimientos, clases de refuerzo, cambio de metodología, etc.
- 7) ¿Es necesario algún cambio metodológico o actitudinal de cara a las matemáticas?
- a) Totalmente de acuerdo
  - b) Parcialmente de acuerdo
  - c) Ni en de acuerdo ni en desacuerdo
  - d) Parcialmente en desacuerdo
  - e) Totalmente en desacuerdo
- 8) Si es así, ¿cree que el uso de las TIC podría ser clave en este cambio?
- a) Totalmente de acuerdo
  - b) Parcialmente de acuerdo
  - c) Ni es de acuerdo ni en desacuerdo
  - d) Parcialmente en desacuerdo
  - e) Totalmente en desacuerdo
- 9) ¿Conoce el software *GeoGebra*?
- a) Si
  - b) No
  - c) Me suena un poco
- 10) ¿Usa *GeoGebra* en el aula?
- a) No, nunca

- b) Sí, pero puntualmente
  - c) Sí, es un recurso habitual en el aula
  - d) Sí, e intento que los alumnos también lo usen
- 11) ¿Anima a los alumnos al uso de *GeoGebra* en el aula o en casa?
- a) No, porque yo tampoco lo empleo
  - b) Sí, aunque no consigo que lo aprendan
  - c) Sí, he conseguido que lo usen y se interesen por él.
- 12) ¿Ha cambiado su metodología de trabajo el uso de *GeoGebra* en clase?
- a) Sí, ha mejorado
  - b) Sí, pero considero que ahora es peor
  - c) No, no ha cambiado la metodología de trabajo
- 13) ¿Cuántas horas semanales dedica a trabajar con *GeoGebra*?
- a) Ninguna
  - b) Entre 1 y 2
  - c) Entre 2 y 5
  - d) Más de 5
- 14) ¿Considera que han mejorado los resultados de los alumnos gracias a *GeoGebra*?
- a) No, los resultados siguen como antes
  - b) Sí, alrededor de un 10%
  - c) Sí, alrededor de un 20%
  - d) Los resultados han mejorado notablemente (alrededor de un 50%)
- 15) ¿Considera que el uso de programas como *GeoGebra* mejora la motivación de los alumnos?
- a) No, la motivación sigue como antes
  - b) Sí, se encuentran un poco más motivados
  - c) Sí, se encuentran notablemente más motivados
- 16) ¿Cuáles considera que son los puntos a favor de *GeoGebra* y qué debería mejorar?

### 13. ANEXO II: RESULTADO DEL CUESTIONARIO

A continuación se presenta una relación de las respuestas obtenidas en las encuestas del estudio de campo. Éstas se corresponden con las respuestas de los 24 docentes de 1º de Bachillerato de matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la ciudad de Barcelona.

**Cuadro N° 16. Relación de respuestas del cuestionario de la encuesta**

Encuestado	Cuestiones															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	C	C	D	C	D	Cambio de metodología	A	B	A	A	A		A			
2	C	B	F	D	B	Actuar sobre padres	B	B	B	A	A		A			
3	C	B	A	C	D	Cambio de metodología	B	B	B	A	A		A			
4	D	C	C	B	A	Cambio de metodología	A	B	A	B	C	A	C	B	B	Mejora de la visión espacial
5	D	D	B	B	D	Un poco de todo. Técnicas de estudio	B	B	A	B	B		B		B	Mejora de la visión espacial
6	D	D	D	D	D	Cambio de metodología	A	C	A	D	C	A	B	B		Buena herramienta de cálculo
7	C	C	C	D	D	Hacerlas más gráficas y visuales	D	B	B	A	A		A			
8	C	B	E	B	D	Metodología más participativa; realización de ejercicios	A	A	A	C	C	A	B	C	C	Es intuitivo y de fácil manejo
9	C	D	C	D	A	Actuar sobre los padres y los niños	C	B	A	B	B		A	B		
10	C	D	C	D	A	Acercar las matemáticas a los alumnos haciéndolas más visuales	A	B	A	D	C	A	D			
11	D	D	D	B	D	Cambio de metodología	A	C	A	D	C	A	B	B		
12	C	B	C	A	B	Sobre padres, niños y profesores con metodologías más motivadoras	B	B	C	A	A		A			
13	C	C	C	D	D	Fomentar y recompensar el esfuerzo.	D	B	A	B	B	A	B			Es gratuito y con constantes actualizaciones
14	C	D	D	A	D	Mejorar la base de conocimientos mediante un replanteo de la metodología	A	A	A	D	C	A	C	C	C	Es sencillo y permite el trabajo de muchas áreas. Como mejoras: un menú reducido para primaria y que tenga ejemplos de uso de funciones en el menú de ayuda
15	D	D	C	A	D	Reducir el número de alumnos por clase. Atender a la diversidad	B	B	A	A	A		A			
16	C	D	C	C	D	Mayor número de horas	C	C	A	A	A		A			
17	C	C	D	A	B	Fomentar la capacidad de razonamiento del alumno	A	B	A	B	A	C	B			
18	D	D	C	D	A	Cambio de metodología	C	B	A	B	B		A	B		

19	C D C A B	Cambio de metodología	A B A C C A B C C	Mejora la interactividad
20	C D D A D	Acercar las matemáticas a los alumnos haciéndolas más visuales	B B A A A A	
21	C D C C D	Cambio de metodología	A B A C C A B C C	Intuitivo y de fácil obtención
22	D D C A B	Reducir el número de alumnos por clase	B B A A A A	
23	C B F D B	Mejorar la base de conocimientos mediante un replanteo de la metodología	B B B A A A	
24	C B C A B	Sobre los alumnos, especialmente cuanto mayores son puesto que asumen mayores responsabilidades	B B C A A A	

*Nota:* Relación de respuestas del cuestionario de la encuesta. Fuente: Elaboración propia