Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Algoritmos alternativos para la enseñanza de operaciones en educación primaria

Trabajo fin de grado presentado por:	Ane Ereño Arrizabalaga
Titulación:	Grado de Educación Primaria
Línea de investigación:	Estado de la Cuestión
Director/a:	Carlos de Castro Hernández

Ciudad: Bilbao

Fecha de finalización del trabajo: 27/01/14

Firmado por: Ane Ereño Arrizabalaga

CATEGORÍA TESAURO: EDUCACIÓN: Teoría y métodos educativos: Métodos pedagógicos

RESUMEN

El área de matemáticas siempre ha sido algo controvertida y en ocasiones abstracta para los alumnos. A través de este trabajo se pretende realizar una aproximación a un apartado de las matemáticas muy investigado como son los algoritmos alternativos existentes, tanto los denominados históricos como los alternativos empleados actualmente, para poder ver sus características y la idoneidad de su aplicación en la educación primaria, frente a los algoritmos tradicionales que actualmente se usan y no tienen un efecto tan positivo en su proceso de aprendizaje. La mayoría de estos algoritmos alternativos destacan la importancia de desarrollar el cálculo mental en lo alumnos, más que la adquisición de unos pasos cerrados como sucede con los algoritmos tradicionales.

Palabras clave: matemáticas, educación primaria, algoritmos tradicionales, algoritmos alternativos, cálculo mental

ABSTRACT

Nowadays, the area of mathematics in our country is being very controversial and subdued to a lot of doubts, because it could be quite abstract for our children. With this research, we want to focus on a part of this area, the algorithms, analyzing the existing alternative algorithms, the historical and the alternative algorithms used nowadays, to see their suitability into the primary school against the used traditional and less effective ones. Most of the alternative algorithms analyzed emphasize the importance of the mental calculation opposite to the closed steps we follow when using the traditional algorithms.

Keywords: mathematics, primary education, traditional algorithms, alternative algorithms, mental calculation

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En palabras de Trigo (2005), en el siglo IX, el matemático y geógrafo Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi escribió un pequeño libro donde explicaba los nuevos dígitos creados por los hindúes y cómo utilizarlos para realizar sencillas operaciones. Se ha perdido la versión original de esta obra *"Kitab al-Jam´a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi"*, pero se han conservado diversas traducciones al latín. A comienzos del siglo siguiente, fueron surgiendo otras obras que popularizaron los nuevos descubrimientos matemáticos y tuvieron mayor repercusión. Así, pueden recordarse, *"Liber Abaci"* de Finonacci (1202), *"Algoritmus vulgaris"* de Johannes de Sacrobosco (1219) y *"Carmen de algorismo"* de Alexandre de Villedieu (1225). Después de ver todos estos libros queda claro que el término "algoritmo" procede del nombre latinizado del gran matemático árabe Al-Khwarizmi.

Se entiende por cálculo algorítmico a todo cálculo que se realice siguiendo pasos bien determinados, es decir una serie de reglas a aplicar en un orden y que puede ser utilizado independientemente de los datos con los que se trabaje.

Los algoritmos convencionales de la suma, la resta, la multiplicación y la división tratan a las cifras de forma aislada como si fuesen números y no se tiene noción de la totalidad que implican las cifras, es decir el valor que tienen por su posición en el numeral. Además ocultan cálculos y propiedades que se aplican. Como consecuencia son de difícil comprensión para el alumno por lo cual la enseñanza actual de la matemática propone el uso de algoritmos alternativos que pongan en evidencia las operaciones y propiedades que se aplican en los algoritmos convencionales y utiliza los números globalmente, o bien descompuestos aditivamente lo que permite una aproximación al algoritmo convencional comprendiéndolo.

Con el presente trabajo se pretende demostrar la utilidad de ciertos algoritmos alternativos a los convencionales, para la mejor compresión de las operaciones matemáticas. Algo que actualmente para muchos de los alumnos de Educación Primaria se hace excesivamente abstracto, por lo que con este trabajo se pretenden dar a conocer formas de aplicar estos algoritmos de manera mucho más natural al desarrollo del conocimiento de los alumnos, para que cada uno los aplique de la forma que les resulte más intuitiva, llegando a dominar así los diversos algoritmos que tan necesarios serán para su vida cotidiana. Siempre sin perder la perspectiva con la realidad que les rodea, y haciendo que los alumnos sean totalmente conscientes del proceso que llevan a cabo para resolver una operación matemática (todos los pasos que dan) y puedan así comprender la esencia de la misma. De esta forma se pretende iniciar a los alumnos en la mejor compresión del cálculo matemático, haciéndolo mucho más cercano a ellos, para que puedan comprenderlo y no comiencen desde edades tan tempranas a generar rechazo por las matemáticas, debido a la rigidez de la metodología de enseñanza que se aplica todavía hoy en esta área de conocimiento.

1.1. ANALIZANDO LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Si observamos datos del informe PISA (Figura 1) y nos centramos en lo que a la Competencia Matemática se refiere, puede observarse que España se sitúa (con excepción de algunas Comunidades Autónomas), bastante por debajo de la media OCDE. Estos son datos que dan que pensar respecto a si las cosas en el aula de Matemáticas en concreto, se están haciendo bien o no.

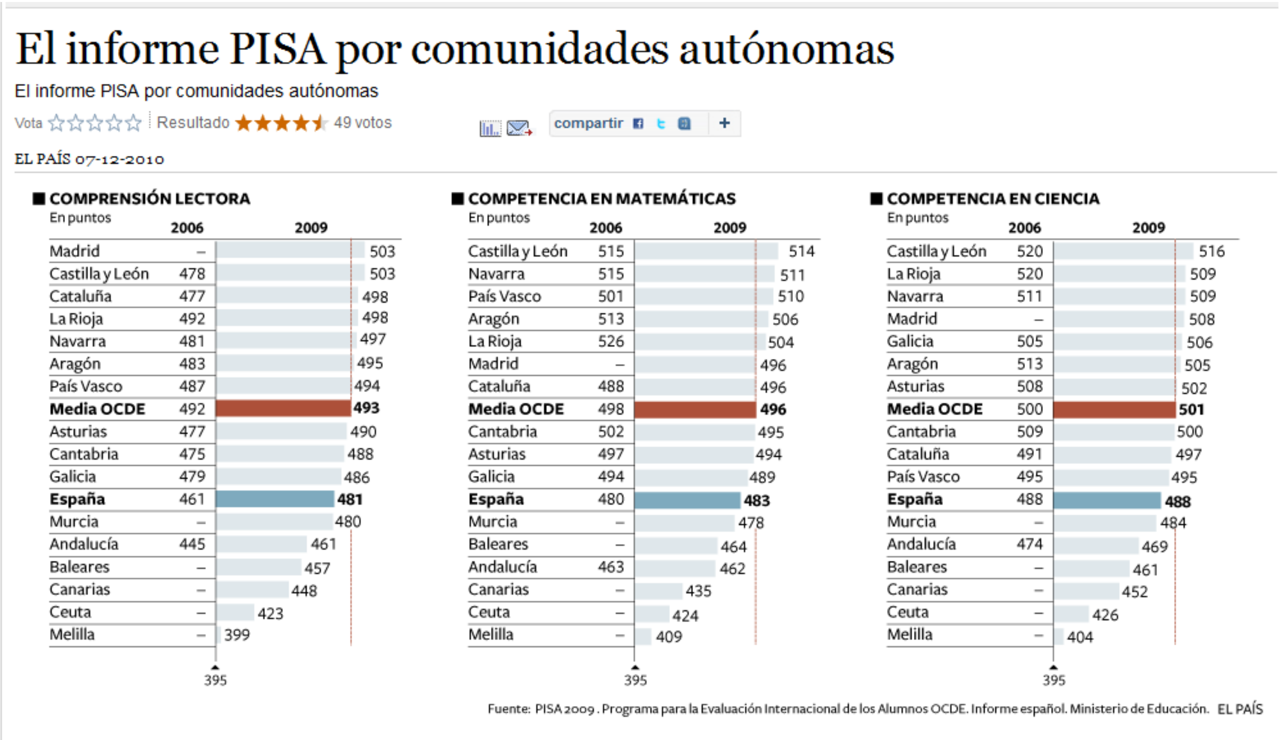


Figura 1. INFORME PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE

No solo el informe PISA habla de los malos resultados de nuestro país en lo que al área de matemáticas se refiere, también lo mencionan EUROSTAT (Oficina Estadística de la Unión Europea) que en 2002 desveló que España es el segundo país con mayor índice de fracaso escolar de la Unión Europea, después de Portugal. Y esta posición en el ranking europeo empeora especialmente en el área de Matemáticas. Las cuatro últimas valoraciones hechas por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) muestran que en general el 50% de nuestros escolares no llegan a alcanzar la puntuación media en matemáticas. Y esto no queda aquí, el TIMSS (3ª Evaluación Internacional de Matemáticas y Ciencias) revela que nuestros alumnos no solamente no llegan a alcanzar globalmente la puntuación media, sino que además quedan situados en los últimos lugares del ranking establecido, de modo que casi todos los países nuestro entorno, y otros de nivel socioeconómico inferior al nuestro, están situados por delante de España.

Con todo ello se ve la necesidad de trabajar por mejorar una competencia, la matemática, que está dejando unos resultados no muy esperanzadores entre nuestros jóvenes. Con este trabajo se pretende avanzar en la investigación sobre cómo mejorar un aspecto tan importante de esta competencia como es el trabajo con los algoritmos matemáticos, que ya desde edades tempranas se introduce en las aulas de una forma tradicional, y no siempre con los mejores resultados. Para ello se pretenden realizar un análisis de la situación actual sobre la enseñanza de los algoritmos matemáticos tradicionales (observando lo que la legislación específica sobre ellos), para realizar una revisión bibliográfica de los algoritmos alternativos existentes, sus características y formas de aplicarlos, obteniendo conclusiones sobre la idoneidad de su utilización en la Educación Primaria.

1.2. OBJETIVOS

Los objetivos que me he planteado para este TFG son los siguientes:

1.2.1. Objetivo general

Estudiar las posibles alternativas existentes al uso de algoritmos de cálculo escrito (tradicionales) para su posible aplicación en el aula de educación primaria.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Analizar los algoritmos históricos existentes, como el de la rejilla, el egipcio etc.
2. Analizar los algoritmos alternativos a los tradicionales que se están empleando en la actualidad: como los algoritmos ABN, holandeses, inventados por niños…
3. Realizar una aproximación a cada uno de estos algoritmos observando sus características, aplicaciones, ejemplos, enlaces para practicarlos etc.
4. Obtener unas conclusiones sobre cada algoritmo analizado para ver la idoneidad de su aplicación en la Educación Primaria.

2. MARCO TEÓRICO

Atendiendo a lo que el Real Decreto 1513/2006, por el que se regulan las Enseñanzas Mínimas en la Educación Primaria, dice respecto a la Competencia Matemática, se observa que el aprendizaje de algoritmos matemáticos es algo fundamental en la Educación Primaria, para poder resolver numerosos problemas en la vida real. Según esta normativa, la Competencia Matemática consiste entre otras cosas en "la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus *operaciones básicas*, los símbolos y las formas de expresión….para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral." (p. 43059)

Si se atiende a la forma de introducción de los algoritmos matemáticos en toda la etapa de Primaria, puede observarse que la ley contempla una introducción progresiva de los algoritmos tradicionales en los diversos ciclos de primaria. La recomendación es la siguiente con respecto al Bloque 1 de contenidos ("Números y operaciones") dónde se ubicaría la enseñanza de algoritmos:

- Primer ciclo:
    - Utilización en situaciones familiares de la suma para juntar o añadir; de la resta para separar o quitar; y de la multiplicación para calcular número de veces.
    - Expresión oral de las operaciones y el cálculo.
    - Cálculo de sumas y restas utilizando algoritmos estándar.
    - Construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 apoyándose en número de veces, suma repetida, disposición en cuadrículas…
    - Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas. (p. 43097)

- Segundo ciclo:
    - Utilización en situaciones familiares de la multiplicación como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios.
    - Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar.
    - Interés para la utilización de los números y el cálculo numérico para resolver problemas en situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.
    - Descomposición aditiva y multiplicativa de los números. Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.
    - Utilización de los algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división por una cifra.

- Utilización de estrategias personales de cálculo mental. (p. 43098)
- <u>Tercer ciclo:</u>
  - Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas.
  - Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores.
  - Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
  - Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. (p. 43100)

Podemos observar que la legislación recomienda empezar por los algoritmos de la suma y la resta, y una vez dominados los mismos, incluir los de la multiplicación y finalmente la división. En todos los casos se especifica la necesidad de desarrollar el cálculo mental, y con ello la composición y descomposición de los números, para tratar de explicar de una forma más razonable todos los pasos a seguir hasta realizar el algoritmo estándar. La realidad del aula, sin embargo, hace ver que una vez que el niño conoce formas familiares (quitar a, utilizar los dedos, descomposición de números etc.) de trabajar con las distintas operaciones, debe "olvidarlas" de alguna forma, para aplicar los pasos a seguir del algoritmo estándar, casi sin entender la operación que está realizando.

2.1 LA IMPORTANCIA DEL CÁLCULO MENTAL

La legislación anteriormente mencionada hace referencia una y otra vez a la importancia de desarrollar el cálculo mental antes de introducir los algoritmos matemáticos. Para una aproximación a los algoritmos alternativos debemos introducir a nuestros alumnos en el cálculo mental, más que en el cálculo algorítmico:

- <u>Cálculo algorítmico:</u> serie de reglas aplicables en un orden determinado, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar un resultado en un número finito de pasos.
- <u>Cálculo mental:</u> conjunto de procedimientos que, analizando los datos a tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido para obtener resultados exactos o aproximados.

Según Chelle (2008), los algoritmos permiten operar sin reparar en los números con los que se está calculando. Sólo se trata de seguir los pasos que aseguran llegar al resultado correcto si no se comete ningún error en el camino. En el caso del cálculo mental es necesario analizar cada caso en particular y buscar el modo más conveniente para operar. No hay reglas a seguir, cada caso es singular.

El concepto de cálculo mental es algo que menciona explícitamente el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas 1513/2006 que dentro de los objetivos que persigue el área de Matemáticas en Educación Primaria incluye entre otros: "elaborar y utilizar instrumentos personales de cálculo mental y medida…." (p. 43097). Desde el primer ciclo de Educación Primaria se debe pues fomentar el desarrollo del cálculo mental, para de esta forma, poder introducir el cálculo algorítmico de una forma mucho más natural y cercana al pensamiento del niño. No debemos olvidar que actualmente nos dirigimos hacia una educación constructivista, donde los nuevos conocimientos deben anclarse sobre los cimientos de los anteriores. Si introdujéramos los algoritmos tradicionales desde un inicio, el alumno los aprendería de forma memorística, sin aplicar la lógica y esto dificultaría la adquisición de los conocimientos posteriores a estos.

El hecho de utilizar el cálculo mental, no significa que el alumno no deba, en ciertas ocasiones plasmar su proceso mental sobre el papel, para escribir así las descomposiciones y cálculos intermedios que va realizando, permitiéndole así controlar el sentido y guardar el rastro de lo que está haciendo. Los problemas de cálculo mental siempre se basarán en que el niño deberá, como se menciona anteriormente, poner en funcionamiento sus conocimientos anteriores, y a través de diversos razonamientos llegar a un conocimiento superior. Cada alumno, de esta forma elaborará su propia solución a un problema de cálculo mental, realizando tantos pasos como le sea necesario.

2.2 LA SUMA Y LA RESTA: LOS PROBLEMAS VERBALES

La idoneidad de cuándo introducir los algoritmos matemáticos en la Educación Primaria es un tema muy debatido y del que existen numerosos puntos de vista. Según (Bermejo, 2004):

> Aunque a veces es imprescindible el aprendizaje mecánico y memorístico, debemos buscar siempre que el aprendizaje de los alumnos en el aula sea significativo, para ello debemos por un lado, relacionar los contenidos del aprendizaje con los previamente adquiridos por los niños y por otro, que el proceso de aprendizaje se lleve a cabo en un contexto familiar, atractivo y relacionarlo, siempre que sea posible con el contexto extraescolar de los niños. No tiene sentido que en la calle hagan unas matemáticas completamente diferentes a las que hacen en el aula, puesto que esto causa demasiada confusión. (p. 55)

Este autor parte de la importancia que tiene introducir la matemáticas de una forma mucho más cercana a la realidad del alumno.

Bermejo (2004) opina que:

> Los niños, antes de conocer la enseñanza formal de la suma y la resta, ya son capaces de resolver múltiples problemas y situaciones de suma y resta, incluso de multiplicación y división. Pero estos escolares resuelven esos problemas mediante el uso del conteo y de los objetos, sin tener

> que recurrir a los algoritmos, cuyo significado, a edades tempranas no llegan a comprender (p. 55)

Por todo ello parece razonable introducir las operaciones matemáticas básicas, de una forma más afín al pensamiento del niño, utilizando los diversos problemas verbales antes que el algoritmo tradicional. De esta manera, la adquisición de las operaciones se realizará en armonía con su forma de utilizarlas también fuera del aula.

Si planteamos según Bermejo (2004) el siguiente problema: "*Juan tiene 3 canicas y ha ganado 2 más. ¿Cuántas canicas tiene ahora?*", el niño reconoce rápidamente el contexto del juego con canicas, porque como escriben Ginsburg y otros (1998) los problemas verbales (PV en adelante) "ofrecen contextos del mundo real que presumiblemente motivan a los niños y les facilitan la aplicación de sus habilidades matemáticas" (p. 55-56). En general, se puede decir, que existe un consenso unánime entre los investigadores sobre la prioridad de los PV con respecto al algoritmo.

En el sistema educativo actual, por lo general, se siguen una serie de pasos en la introducción de las operaciones de suma y resta, que van desde un nivel de menor a mayor abstracción. Generalmente se sigue el siguiente proceso (p. 78-86):

1. <u>Representaciones con material concreto:</u> se representa el problema con elementos reales y se actúa sobre ellos, siendo importante que verbalice el trabajo que va realizando para que sea consciente del mismo.
2. <u>Representación de la expresión gráfica del problema:</u> necesitan la presencia del material sobre el que han actuado, incluso lo utilizan como plantilla para hacer su dibujo, pero sin representar la acción (la realizan de forma mental).
3. <u>Utilizar la expresión simbólica:</u> con cifras y signos matemáticos: el algoritmo. Normalmente lo que se hace desde las aulas al introducir el algoritmo, es hacer que el niño se "olvide" de lo anterior, para que siga una serie de normas que conllevan la resolución de ese algoritmo.

Lo ideal sería seguir todo el proceso de desarrollo, que hasta cierta edad realmente se sigue, aumentando el nivel de abstracción poco a poco. Pero si es cierto, que con la introducción del algoritmo, la enseñanza propone una educación muy poco flexible, limitándose a aprender memorísticamente una serie de reglas para su resolución, todo ello muy alejado del principio de aprendizaje significativo que es en lo que debemos basarnos.

2.3 LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

La multiplicación y la división tienen, según Bermejo (2004, p.104) sus orígenes en la Educación Infantil, donde los niños generan sus primeros esquemas multiplicativos mediante la constitución de unidades compuestas y la acción de reiterar. Por tanto, el concepto de multiplicar surge como una consecuencia de modificar los esquemas previos de contar.

Según este mismo autor, si queremos enseñar la multiplicación, debemos comprender primero la naturaleza del pensamiento multiplicativo, del cual hay dos formas de interpretar:

a. Considerar que tiene sus raíces en el pensamiento aditivo y buscar estos orígenes en la enseñanza.
b. Suponer que este pensamiento es una estructura conceptual compleja con entidad propia, en la que intervienen una gran cantidad de conceptos, relaciones y propiedades.

Además de todo esto, Piaget opina que la multiplicación es una operación que requiere un pensamiento de alto nivel y que los niños lo construyen al margen de su habilidad para pensar aditivamente. Piaget describe de esta manera, las diferencias entre la adición y la multiplicación según el número de niveles de abstracción y el número de relaciones de inclusión que el niño tiene que realizar simultáneamente. La diferencia de pensamiento se observa en la figura 2, donde para la operación 3x4 se ve claramente la diferencia de abstracción entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo:

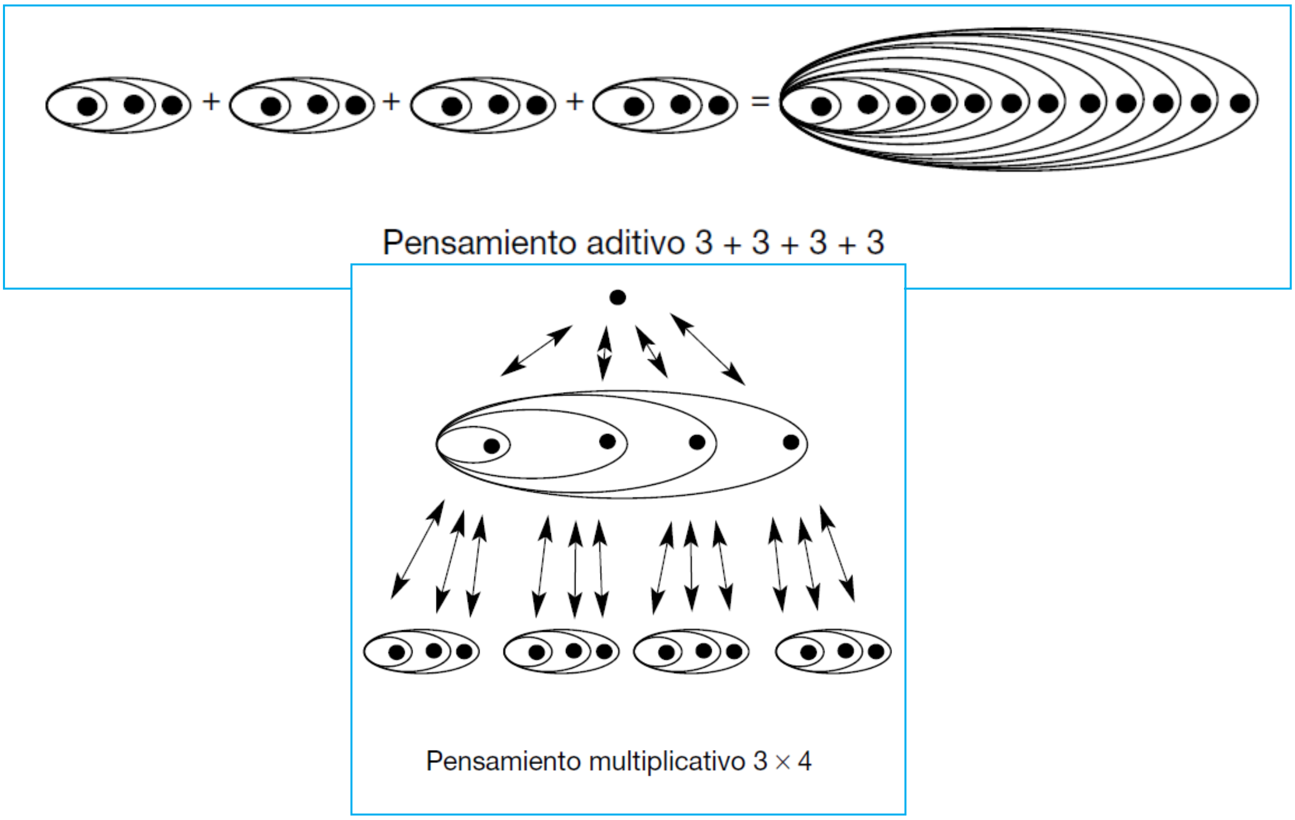


Figura 2. **Pensamiento aditivo y multiplicativo de la operación 3x4**

En cuanto a la división, el currículum de Educación Primaria no plantea la inclusión de estos problemas hasta los cursos intermedios. Sin embargo, tal y como plantea Bermejo (2004) los niños en la etapa de Educación Infantil son capaces de emplear estrategia de sustracción para resolver problemas sencillos de división antes siquiera de estudiarlos en la escuela. Una vez más nos encontramos en la situación en que la división, desde la escuela, es algo que los niños llevan muy integrado en su realidad. Es decir, las situaciones de reparto son muy habituales en nuestra vida diaria, y de esta forma, los niños, sin conocer el algoritmo de la división, ya realizan divisiones de una forma natural y afín a su pensamiento.

3. MARCO EMPÍRICO

A la vista de los datos anteriores, está claro que los algoritmos deben enseñarse en el aula de una forma más afín al pensamiento del niño, incorporando según Barba-Calvo (2009) la aritmética mental como eje vertebrador de la enseñanza de la aritmética, educar a los alumnos con la capacidad de resolver los problemas que se plantean en Primaria sin necesidad de acudir al algoritmo escrito (o tradicional). Lo que se desprende de esta afirmación, es que los algoritmos tradicionales deberían salir de ese papel estructurador que tienen en el currículum de Primaria. Se sigue centrado en incorporar las restas con llevada (algo totalmente abstracto al pensamiento del niño) en Segundo de Primaria, y las divisiones con dos cifras en Cuarto.

Según recogen Barba-Calvo (2009) históricamente se han planteado una serie de preguntas sobre la idoneidad de los algoritmos tradicionales. Las preguntas (junto con el año en que fueron realizadas) son las siguientes (p.16-18):

- ¿Cuánto tiempo hace que no ve a alguien resolviendo una división por dos cifras con lápiz y papel? (1979)
- ¿Cuál es la razón para continuar enseñando algoritmos en la escuela? (1987)
- ¿Cómo es posible que dedicando tanto tiempo a la enseñanza de los algoritmos se obtengan resultados tan pobres? (Finales del siglo XX)

La primera pregunta la formula Plunkett (1979) a partir de la irrupción de la calculadora en nuestra sociedad. Según él, el mundo había dejado de utilizar el lápiz y el papel para realizar operaciones largas y para apoyar su argumento realizó un estudio sobre cómo calculaban las personas. Lo que pudo observar según este estudio es que las operaciones más sencillas las resolvían fácilmente de forma mental, mientras que a medida que aumentaba la complejidad, muchos utilizaban la calculadora para realizarlas. Esto nos habla ya de que debemos acercar las matemáticas a la realidad social del niño, y que por ello la calculadora se debe incorporar al aula con naturalidad.

Para la segunda pregunta, se debe referir a Maier (1987) que acuñó el término "supervivencia escolar" para explicar la continuidad de los algoritmos en el aula. Escribe lo siguiente:

> Sin embargo, algunos educadores sostienen que los estudiantes necesitan conocer esos procedimientos. Y tienen razón: los estudiantes necesitan conocerlos, pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a los estudiantes a tener éxito en la escuela. Dicho sencillamente, estos procedimientos son destrezas para la supervivencia escolar de los alumnos (...) en mi opinión, carece de sentido, tanto educativa como económicamente, usar nuestros recursos educativos para enseñar destrezas que sólo sirven para perpetuarse a sí mismas. Cuando tal cosa ocurre, es la hora de cambiar (p. 22)

Finalmente, para responder a la tercera de las preguntas, habiendo analizado ya las implicaciones sociales e institucionales de las dos anteriores, debemos centrarnos en la eficacia de la enseñanza de los algoritmos. Es evidente que la enseñanza de los algoritmos es algo repetitiva, totalmente memorística y que esconde la lógica del razonamiento. Los alumnos realizan acciones por imitación, sin llegar a la comprensión de lo que realizan, de forma que cuando dejan de ejercitarse, no pueden recuperar lo que han olvidado.

Ante estas preguntas cabe pensar que no enseñamos los algoritmos tradicionales por el simple hecho de que los niños puedan "resolver problemas", puesto que pueden hacerlo de una forma mucho más natural, sin necesidad de aplicar el algoritmo tradicional. Debemos pues, entender que la transmisión de algoritmos tradicionales debe dar paso a aquellos algoritmos alternativos, que utilizan una forma de razonamiento totalmente lógica, que cada niño adapta a sus necesidades y que conllevan un razonamiento mental y transparente de los pasos que se llevan a cabo para su resolución.

3.1- LOS ALGORITMOS ALTERNATIVOS: LA IMPORTANCIA DE SU USO

Como se ha mencionado anteriormente, un algoritmo alternativo es aquel que ofrece una vía distinta de solución a un problema, al margen del algoritmo tradicional. Existen numerosos algoritmos alternativos, que tienen en común su facilidad de uso, transparencia, aplicación de la lógica en su resolución y fomento del uso del cálculo mental. Existe una serie importante de razones por la cual vale la pena llevar estos algoritmos al aula (Barba-Calvo, 2009), son las siguientes (p. 18-22):

a. <u>Motivo histórico:</u> se enseñan los algoritmos tradicionales porque son una construcción social que se ha mantenido vigente durante siglos por su eficacia. Pero es importante que los alumnos sepan que no siempre se operó de esta forma: multiplicación en celosía o multiplicación egipcia.

b. <u>Multiculturalidad:</u> no solo ha cambiado la manera de realizar cálculos a través del tiempo, en la actualidad, tampoco se opera igual en todas partes del mundo. Para ello basta con comparar cómo realiza los cálculos un alumno extranjero que llega al aula de acogida.

c. <u>Valorar la transparencia:</u> teniendo en cuenta la imagen errónea que sobre las matemáticas genera en el alumno la aplicación de un procedimiento sin que entienda la razón de su funcionamiento, se aboga por unas matemáticas transparentes. Siendo la transparencia de un algoritmo la posibilidad de captar las razones por las que un procedimiento da respuesta al problema que pretende resolver.

Todas estas razones, hacen necesario realizar una observación de los algoritmos alternativos existentes, analizando cada uno de ellos como alternativa a los algoritmos tradicionales. Los algoritmos alternativos reúnen las características anteriormente mencionadas, y actualmente, existen dos corrientes diferenciadas en su análisis: los algoritmos históricos y los algoritmos inventados.

3.2- ALGORITMOS HISTÓRICOS

Los algoritmos históricos son aquellos que se han ido utilizando a lo largo de la historia, por varias civilizaciones y sociedades, que generaron en su momento la forma más sencilla de realizar el cálculo de las cuatro operaciones básicas. Son algoritmos, que en muchas ocasiones conviene recuperar para el aula actual, porque realizan la operación de una forma sencilla y comprensible para nuestros alumnos.

3.2-1. Algoritmo de la rejilla

También denominado multiplicación hindú o de Fibonacci, este algoritmo requiere de la preparación de una tabla que sirve de guía para el cálculo. Este algoritmo data del siglo X y fue muy popular durante los siglos XIV y XV en Europa. Se trata de un algoritmo de fácil utilización, que evita las llevadas hasta el final del proceso, pero tiene el inconveniente de ignorar el valor de la posición del número. Para emplearlo, se dibuja una rejilla con tantas celdillas como cifras tengan los números. Cada celdilla se divide con una diagonal por la mitad. Se coloca el multiplicando en la parte superior de la rejilla y el multiplicador a la derecha de la misma (ver figura 3). Después se empieza a multiplicar cada cifra, colocando las decenas en la parte superior de la celdilla y las unidades en la inferior. Finalmente se suman los contenidos de las celdillas en diagonal. Veamos un ejemplo: 458 x 72.

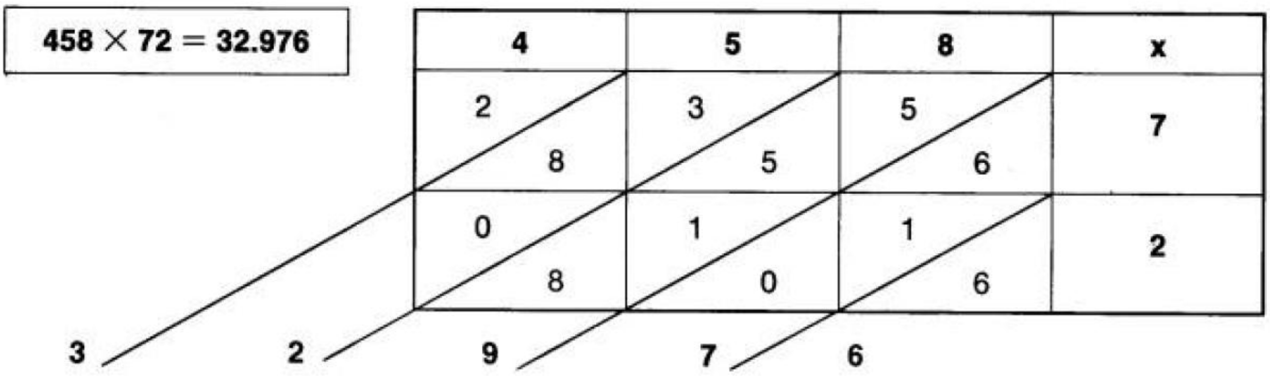


Figura 3. Algoritmo de rejilla 458 x 72

Este es un algoritmo que puede aplicarse también a las sumas, simplificando el proceso de suma tradicional, porque una vez más, evita las llevadas hasta el final del proceso. Este algoritmo se basa en la fragmentación de los números que forman los sumandos, dándoles el mismo tratamiento a las unidades de millar que a las unidades, es decir, una vez más no se tiene en cuenta la posición del número. En la figura 4 puede observarse cómo se aplica en la suma:

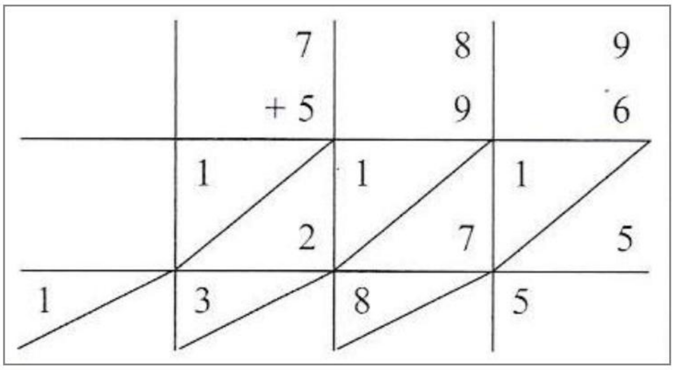


Figura 4. Suma 789 + 596

Análisis del algoritmo

Este es un algoritmo que permite a los alumnos multiplicar utilizando la descomposición de los números (siempre se multiplican dos números de un solo dígito), con lo cual, conociendo las tablas de multiplicar, los niños pueden ir fácilmente rellenando la celosía o rejilla. Lo que me parece complejo es que los niños adquieran la mecánica de cómo ubicar los números en la rejilla, eso conllevaría algo más de tiempo de entrenamiento, pero finalmente es una acción que se llega a mecanizar.

El hecho de no utilizar llevadas al principio de la operación también es una ventaja, puesto que el concepto de llevada es algo abstracto y poco entendible. Cuando decimos que de una unidad nos “llevamos una”, lo que realmente estamos haciendo es llevarnos una decena. Y esto es algo que a los niños les cuesta asimilar.

Finalmente, en el proceso de suma diagonal, para obtener los distintos dígitos que compondrán el producto de nuestra multiplicación, regresamos a una suma habitual, donde aquí sí que hay que aplicar el concepto de “llevarse una”. Escribiéndolo, tal y como se ve en la Figura 3, el niño es capaz de visualizar que lo que se está llevando es una centena, pero sigo pensando que es algo abstracto.

Es un algoritmo, que una vez mecanizada su aplicación y conociendo las tablas de multiplicar, puede facilitar e incluso acelerar el cálculo de una multiplicación, pero que sigue requiriendo de cierto nivel de abstracción tal como lo requiere el algoritmo tradicional. Esto lo soluciona el alumno memorizando de forma mecánica los pasos a seguir para solucionar la situación pero dudo que realmente lo haga entendiendo lo que está haciendo, teniendo en cuenta que tampoco se atiende demasiado a la posición de los dígitos.

Por lo que puede verse este es un proceso eficiente, puesto que una vez interiorizado como aplicarlo, es bastante rápido de realizar, incluso si se trata de números grandes, donde los pasos a dar aumentarían, perdiendo quizá algo de eficiencia. Es también un proceso matemáticamente válido, puesto que conduce a una solución correcta, donde realizando diversas multiplicaciones (conociendo la tabla de multiplicar) y sumas, llegamos al resultado adecuado. Es además un proceso relativamente generalizable, puesto que con números pequeños resulta muy sencillo, pero con números excesivamente altos puede que llegue a ser un proceso algo engorroso de aplicar.

3.2-2. La multiplicación china

En la antigüedad, los chinos multiplicaban utilizando varillas de bambú. La varillas se disponían de forma horizontal para representar el multiplicando y de forma vertical representando el multiplicador. Por ejemplo para multiplicar 12 x 23 observamos la Figura 5:

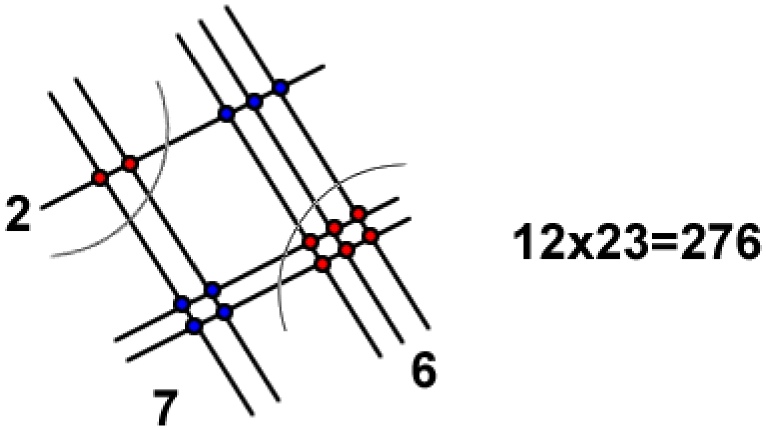


Figura 5. Multiplicación china

Una vez realizada la cuadrícula, se suman las intersecciones de cada varilla en diagonal, comenzando siempre desde la diagonal inferior. Una vez obtenemos estos resultados, debemos sumar las unidades de cada número. De esta forma obtenemos que 12 x 23 = 276.

Este método es también conocido como Multiplicación Maya, ya que esta antigua civilización lo utilizaba para multiplicar, pero en vez de utilizar palillos, los mayas marcaban las rayas del multiplicando (vertical) y del multiplicador (horizontal) sobre un soporte.

Análisis del algoritmo

El mecanismo de obtención del resultado de este algoritmo es muy similar al algoritmo de la rejilla, solo que en este caso el proceso de llegar hasta ahí es mucho más sencillo e intuitivo para el niño. Realmente, casi parece un juego el hecho de tener que manipular unos palillos, cruzándolo unos con otros de forma que debemos contar las intersecciones que se forman entre ellos.

Con este algoritmo, el niño debe saber dónde situar el multiplicando y el multiplicar, y a partir de ahí, descomponiendo en unidades ambos números, realizar los cruces correspondientes. Una vez más, por tanto, el alumno no ve el número como un todo, sino como un conjunto de dígitos.

Una vez realizada la base de la multiplicación, es cuando llega la fase de sumar. Puesto que hasta este punto el alumno solo ha tenido que realizar la acción de colocar los palillos adecuadamente, haciendo coincidir las múltiples intersecciones. En la primera fase de la suma, el alumno, utilizando el modelo de correspondencia uno a uno, solo debe ir señalando y contando el número de intersecciones que se dan en cada una de las diagonales, de forma que anota este número en la diagonal correspondiente. Aquí irán apareciendo una serie de números que parecen independientes unos de otros y que hacen una vez más que el proceso sea algo abstracto, puesto que los números para obtener el resultado final provienen de las diagonales de las intersecciones, y opino que a estas alturas, el alumno ya habrá perdido la perspectiva de la multiplicación de la que partía.

Finalmente llegamos a la segunda y última suma, donde los números obtenidos en las diversas sumas anteriores se vuelven a descomponer en sus unidades, y lo que el alumno hace es sumar esas unidades entre ellas, hasta así obtener el resultado final.

Este es un método sencillo de aplicar, puesto que simplifica mucho el proceso de multiplicación, pero a su vez, es un método complicado de aplicar en la multiplicación de números de muchos dígitos, por el montaje que supone. Necesitamos primero una superficie suficientemente amplia donde realizar los cruces de los palillos si utilizamos la forma tradicional de multiplicación China, algo que no siempre es posible. Si no, siempre es posible dibujar las líneas (palillos) en una hoja y realizarlo de esta forma. Además, cada vez que queramos multiplicar, debemos construir nuestro cuadro, y con números muy altos no es un proceso excesivamente eficiente, aunque sí que es matemáticamente válido.

Por último, observar que desde un primer momento, se vuelven a descomponer los números que componen la multiplicación, por lo que el alumno continuamente está manejando unidades. No requiere si quiera conocer las tablas de multiplicar que no se aplican en ningún momento, solo con saber contar y sumar es suficiente. Eso simplifica las cosas, puesto que poder manipular el material y verlo, es algo que facilita la visión de lo que se está llevando a cabo. Aunque sigue siendo un proceso algo abstracto, puesto que el alumno sigue sin tener en cuenta el orden de los números.

Este es por tanto un algoritmo eficiente, pero que con números muy elevados va perdiendo su eficiencia, puesto que los pasos a dar (sobre todo el hecho de tener que dibujar o manipular los palillos) resulta algo largo, sin embargo es muy sencillo de aplicar. Es además matemáticamente válido, porque aunque descompone los números en unidades (al igual que sucedía con el algoritmo de rejilla), el resultado al que se llega es correcto. Es un procedimiento generalizable a otro tipo de problemas de multiplicación, aunque algo engorroso de realizar, como sucedía con el de rejilla.

3.2-3. La multiplicación egipcia

El sistema de multiplicación egipcio según (Moreno, R. y Vegas, J.M.), consistía en un proceso de duplicación del multiplicando hasta pararse en la potencia de dos más próxima al multiplicador. Por ejemplo, para multiplicar 459 x 16 observar la Figura 6:

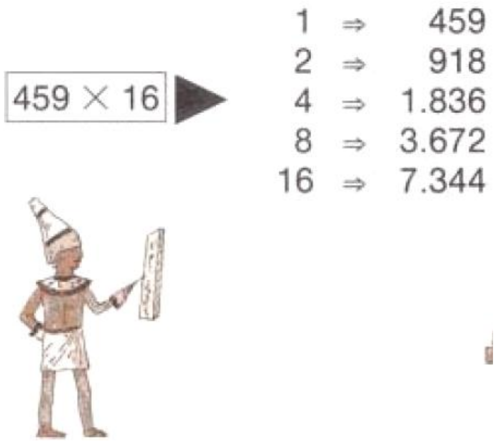


Figura 6. 459 x 16 (Método Egipcio)

En la columna de la izquierda, se indica las veces que se repite el multiplicando. En este caso, cuando se llega a la potencia de dos más cercana al multiplicador (13) se para el proceso. En la columna central se muestra el proceso de ir duplicando el multiplicando, tantas veces como potencias de dos realicemos en la columna de la izquierda. La columna de la derecha nos indica las filas que son necesarias, para sumando las potencias de dos, llegar al valor del multiplicador 13 (1+4+8 = 13). En la última fila aparece finalmente el resultado, que es en este caso, la suma de las filas marcadas.

Análisis del algoritmo

Este es un algoritmo muy sencillo de aplicar por los alumnos, y una de sus máximas ventajas es que no es necesario conocer las tablas de multiplicar, puesto que lo único que se hace continuamente es duplicar ambas columnas de números, hasta llegar finalmente a sumar. Es un algoritmo bastante eficiente cuando los números a multiplicar no son demasiado grandes, sin embargo, puede resultar excesivamente lento de resolver en aquellos casos en los que se manejan números más altos.

Es por lo tanto un algoritmo muy útil para la etapa de primaria, puesto que el alumno sigue fácilmente todo el proceso de duplicación, hasta que se llega a obtener el resultado, una vez más, a través de un proceso de suma. Para realizar esta suma puede utilizar incluso el método de sumas parciales, que consiste en sumar unidades por un lado, centenas por otro, decenas...y así sucesivamente, hasta tener los productos parciales y poder realizar la suma total. Con este algoritmo, el alumno ejercita la tabla del dos y también la suma, por lo que es recomendable en los primeros años de la etapa de primaria. En el ANEXO I se encuentran unas fichas tipo muy útiles para llevar a cabo esta forma de multiplicar de manera más sencilla.

Este es un algoritmo eficiente para multiplicar números de dos cifras, incluso tres, pero para multiplicar cifras superiores va perdiendo su eficiencia por la cantidad de pasos que hay que dar para su resolución. Es, al igual que los anteriores, matemáticamente válido puesto que el resultado que se obtiene tras duplicar el multiplicando varias veces y después realizar la suma, es correcto. Finalmente mencionar que es un proceso generalizable, que aunque con números grandes (como se menciona anteriormente) se vuelva un proceso algo largo, puede ser aplicado a cualquier tipo de multiplicación.

3.2-4. La multiplicación y división rusa

La **multiplicación** rusa es un método según Moreno y Vegas (2006) también conocido como Multiplicación Turca, que consiste en realizar dos columnas (al estilo egipcio) con el multiplicando y el multiplicador. En el encabezado de la primera de las columnas ponemos el primer número (preferentemente el más pequeño de los dos, independientemente de si es el multiplicando o el multiplicador) y en la segunda columna, el segundo número.

Debajo de la primera columna, se van calculando las mitades del número del que hemos partido. Si nos encontramos con un número impar, mentalmente le restamos 1, y seguimos dividiendo hasta llegar a 1.

En la segunda columna, el número se va duplicando, hasta llegar al 1 de la primera columna. Una vez realizado esto, nos quedaremos con las filas, cuyo primer número (columna de la izquierda) sea impar, y sumaremos los números correspondientes de la columna de la derecha. Para la multiplicación 27 x 82:

A	B	Sumandos
27	82	82
13	164	164
6	328	
3	656	656
1	1312	1312
		Result: 2214

Figura 7. 27 x 82 (Multiplicación Rusa)

De esta forma, realizando las sumas de los números de la columna B que corresponden a un número impar de la columna A, obtenemos el resultado de 2214.

De forma similar se resuelve la división rusa, basándose igual que los egipcios en el método de la duplicación. En la columna de la izquierda sitúa los números empezando por el uno, duplicándolos, de la misma forma que en la columna derecha se sitúa el divisor y se duplica tantas veces como sea necesario para llegar a aproximarse (sin pasarse) al valor del dividendo. Una vez realizado, se toman los valores de la columna de la derecha que sumen aproximadamente (también sin pasarse) el valor del dividendo. Sumando por otro lado los valores de la columna de la derecha correspondientes se obtiene el resultado de la división con el resto correspondiente (si lo hubiere). En la siguiente figura (8) puede observarse un ejemplo 1860:25:

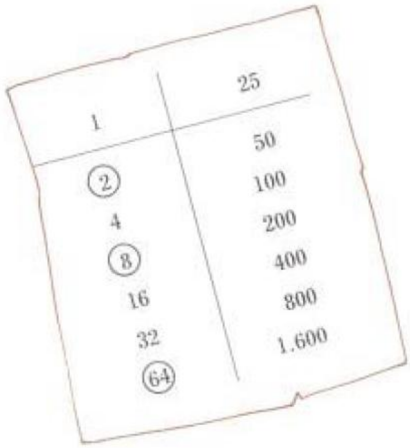


Figura 8. División rusa

En este caso puede verse que tomando las cifras rodeadas por un círculo suman en total 74, a estas les corresponden unos valores de la columna derecha que suman en total 1.850. Observando esto llegamos a la conclusión de que el resultado de dividir 1.860 entre 25, es de 74 y un resto de 10 (lo que va de 1.850 a 1.860).

Análisis del algoritmo

Al igual que la multiplicación Egipcia, esta es una forma muy sencilla de realizar la multiplicación y también la división, puesto que solo requiere conocer la tabla de multiplicar del dos. Simplemente el alumno debe saber duplicar un número, y también dividir.

La dificultad de aplicar este algoritmo puede residir en conocer la mecánica del mismo pero, una vez entendida su forma de proceder, es sencillo. Quizá la parte de la columna en la cual hay que aplicar las divisiones pueda tener algo de dificultad, por el hecho de que si tras la división obtenemos un número impar, debemos restarle mentalmente 1, para partir de otro número par para hacer la siguiente división.

Tal y como sucede con el algoritmo egipcio, este es un algoritmo muy intuitivo, donde el alumno va observando toda la progresión, pero que se puede hacer excesivamente lento cuando los números a multiplicar son largos. Por lo que se puede concluir que es un algoritmo matemáticamente válido pero quizá no demasiado eficaz cuando se trata de números elevados. Es igualmente un algoritmo generalizable, puesto que puede utilizarse en todos los procesos que impliquen la multiplicación, a pesar de no ser del todo práctico para aplicarlos a números muy elevados. Aun así es un algoritmo muy recomendable para la etapa de primaria, permitiendo que los alumnos ejerciten la tabla del dos, la división, los números pares e impares y la suma.

3.2-5. La tabla pitagórica

Esto no es realmente un algoritmo alternativo, pero si una forma alternativa de representar las tablas de multiplicar. Es también conocida como tabla total y según (elbibliote.com) fue desarrollada por el famoso matemático Pitágoras. Es una versión de tablas más compacta que las versiones tradicionales y ayuda a visualizar de manera sencilla algunas propiedades como la conmutatividad.

La primera columna y fila, dispone de los números que van a ser multiplicados, y cada una de las celdas internas de la tabla representa la multiplicación entre los números de la primera fila y columna que contienen la celda. En la Figura 9 puede observarse la tabla:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 9. La Tabla Pitagórica

Análisis de la tabla

Con el uso de esta tabla, el alumno puede observar de un solo vistazo todas las tablas de multiplicar y establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo:

- Se observa claramente la relación existente entre las tablas del 2, del 4 y del 8. Conociendo la del 2 (que es más sencilla), las otras pueden sacarse simplemente duplicando la primera.
- La relación existente entre las tablas del 3 y el 6, o del 5 y del 10 es también una relación de clara duplicación de la primera respecto a la segunda.
- Hay una simetría en la tabla, si se toma la diagonal mayor que va de izquierda a derecha y de arriba abajo, que comienza en el uno y termina en el cien.
- En esa misma diagonal, el número que sigue se obtiene sumando siempre un número impar. Este número es el siguiente número impar, a partir del que empieza.
- La otra diagonal mayor, que va de abajo hacia arriba, puede observarse que el número que sigue se obtiene sumando un número par. Es número se obtiene restando dos al número del

que se ha partido. Hasta llegar al cruce central, donde se obtiene el 30 y después los números vuelven a repetirse hacia atrás.

- En cada una de las filas o columnas, los números aumentan tantas veces más como lo indique el número inicial, es decir, en la tabla del 1 van de uno en uno, en la del 2 de dos en dos etc.
- Esta tabla también sirve para encontrar distintas divisiones, por ejemplo 35:7. Para encontrar el resultado basta con localizar el número 35 en el interior de la tabla, y ver del cruce de qué fila y columna es el resultado. Vemos que del cruce de 5 x 7, por lo tanto la respuesta sería 5.

Es por tanto una buena forma de comenzar el aprendizaje de las tablas de multiplicación en la etapa de primaria. Un buen enlace para practicar la tabla pitagórica y observar todas las relaciones anteriormente mencionadas es la de Realini Cujó.

3.3- ALGORITMOS ALTERNATIVOS QUE SE EMPLEAN EN LA ACTUALIDAD

Estos son algoritmos que han desarrollado numerosos estudiosos, observando la poca eficacia de los algoritmos tradicionales en nuestros centros educativos. Diversos países han tratado el tema, y normalmente han desarrollado unos algoritmos que son más sencillos y adaptados al pensamiento de los alumnos, más transparentes (donde el proceso que se lleva a cabo puede observarse en su totalidad) y tomando como base el cálculo mental.

3.3-1. Algoritmos ABN

Los algoritmos ABN (Abiertos Basados en Números), han sido desarrollados por Jaime Martínez Montero, Inspector de Educación desde 1977. Es el mismo Martínez (2010) quien define en qué consisten los algoritmos ABN:

> La "A" es la primera letra de "ABIERTOS". Se contraponen así a los clásicos, a los de toda la vida, que son cerrados. ¿Por qué son abiertos? Porque no hay una forma única de realizarlos, y cada alumno puede solucionarlos de forma distinta, en función de su desarrollo, dominio del cálculo, estrategias o, a veces, simple capricho. Los algoritmos clásicos son cerrados: sólo hay una forma de realizarlos, no admiten discrecionalidad ni alteración en lo prescrito. Las cuentas de siempre no son más que la aplicación ciega, memorística y sin sentido, de un conjunto de instrucciones previamente establecido.
>
> Después viene "BN". Quiere decir "BASADOS EN NÚMEROS". Se me podrá argüir: ¿es que los otros están basados en letras? No, naturalmente. Pero sí lo están en cifras. Es decir, que desgajan todas las cifras que contiene el número, y a todas les da idéntico tratamiento. Insisto: al hacer cuentas no se descompone el número en unidades, decenas, centenas, etc., sino en cifras sueltas y aisladas. De este modo, en una multiplicación se trata igual a un producto de unidades por unidades que a otro de centenas por centenas. Cogen su rango y adquieren su dimensión de acuerdo con la colocación que les toca en el algoritmo. Como ven, muy

> matemático. Por el contrario, en nuestro método siempre se trabaja con números: podrán ser más pequeños o más grandes, pero siempre se combinan números completos.
>
> Escribiéndolo en términos que produzcan el adecuado resalte, diríamos que la metodología tradicional está constituida por algoritmos CBC (cerrados basados en cifras), mientras que la nuestra establece algoritmos ABN (abiertos basados en números) (entrada de blog “Algoritmos ABN” martes 13 de abril de 2010).

Según Martínez (2011), y apoyando lo que se ha ido diciendo a lo largo de este trabajo, hay una serie de razones por las cuales las viejas cuentas hacen incompetentes a los niños:

- Son algoritmos antiguos, pensados para la vida adulta, que se introdujeron sin adaptaciones en la escuela.
- Han quedado obsoletos, hoy no los usan ni los adultos.
- Obstaculizan el desarrollo del cálculo mental.
- Son la causa fundamental que impide que los alumnos sepan resolver problemas.
- Tienen parte de culpa en la mala fama que acompaña a las Matemáticas (p.2).

Según el mismo autor, las ventajas que tiene el cálculo basado en los algoritmos ABN, son notables, por ejemplo:

- Los niños aprenden más rápido y mejor.
- Mejora de manera espectacular el cálculo mental y la capacidad de estimación.
- Se aumenta notablemente la capacidad de resolución de problemas.
- Hay un crecimiento efectivo de la motivación y un cambio favorable en la actitud de los niños ante la matemática (p.3).

3.3.1.1. Suma y resta con el método ABN

Según (Martínez, 2011), la esencia de la **suma** es que hay que acumular un sumando en el otro. Una vez que esté totalmente acumulado, el nuevo sumando nos dará el resultado. El algoritmo tradicional solo permite que esto se haga de una manera: descomponiendo los sumandos en unidades, decenas, centenas etc.; colocarlos adecuadamente y, a partir de ahí, realizar una combinación unidad a unidad y siguiendo un orden de menor a mayor (sin excepciones). Sin embargo, utilizando el método ABN, el orden de acometida es indiferente, se pueden sumar las centenas primero, luego unidades y decenas o dicho de otra forma, seguir el orden que a cada alumno le parezca mejor. De esta forma, un alumno realizará la suma en tres pasos y otro quizá en cinco. En el siguiente ejemplo (figura 10) puede verse como realiza la suma una alumna de Primero (algo más dubitativa y que solo realiza un paso cuando lo ve muy claro) y una alumna de Segundo:

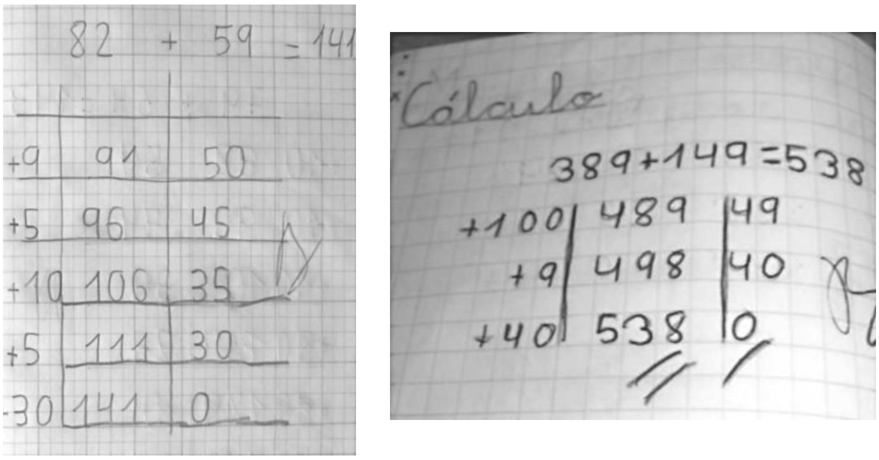


Figura 10. Suma alumna Primero frente a alumna de Segundo

Esto nos muestra que no podemos exigir a los diversos alumnos que encontramos en una clase el mismo nivel de dificultad, puesto que cada uno tendrá unas cualidades para realizar los cálculos (memoria a corto plazo, capacidad de procesamiento etc.).

En el caso de la **resta** se emplean tres modalidades diferentes que se adaptan a los diversos tipos de problemas. Son los siguientes (Martínez Montero, 2008):

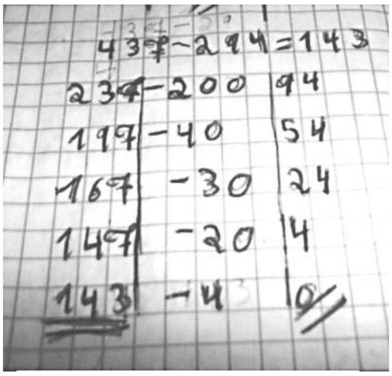


Figura 11. Detracción

Formato por detracción y comparación

En el caso del siguiente ejemplo (figura 11) vemos la sustracción 437-294 donde el alumno va quitando de ambos números la misma cantidad hasta que desaparece la más pequeña:

En la primera columna se expresa la cantidad inicial, en la segunda la que se va gastando y la tercera lo que queda por gastar.

En los problemas de comparación se operaría de forma similar, solo que en la primera columna encontraríamos la cantidad comparada, en la segunda la que se retira y en la tercera la que sirve de referente. El orden de las columnas, en ambos tipos de problema, puede variar de un centro a otro, pero siempre sigue el mismo razonamiento.

Formato en escalera ascendente

Es un proceso más natural y que más tienden a emplear los niños. Sigue una progresión de abajo hacia arriba, por lo que el alumno procesa mejor los datos y de manera más eficiente cuando se presentan de esta forma, más que de forma descendente. Este modelo solo requiere dos columnas, en la primera se colocan las cantidades parciales que se van añadiendo y en la segunda el

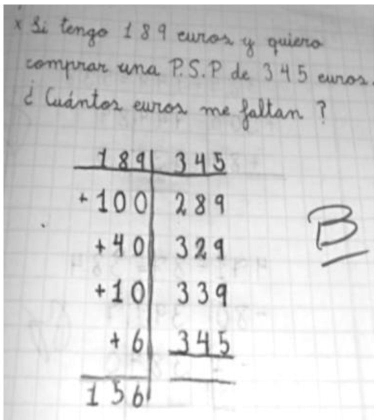


Figura 12. Escalera ascendente

progreso hasta la cantidad deseada. Partimos siempre del sustraendo, hasta que se añaden cantidades hasta llegar al minuendo. En el siguiente ejemplo (figura 12) puede verse la siguiente operación: “Si tengo 189 euros y quiero comprar una P.S.P. de 345, ¿cuántos euros me faltan?”:

Formato escalera descendente

Se basa en lo mismo que el algoritmo anterior, solo que a la inversa. Partimos de una cantidad, haciéndola más pequeña, para llegar a otra. En el siguiente ejemplo (figura 13), se trata de averiguar los pisos que se deben descender desde el 364 hasta llegar al 138:

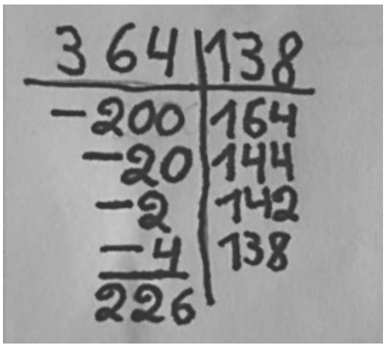


Figura 13. Escalera descendente

Con estos ejemplos podemos observar que tanto para el algoritmo de suma como el de resta, el proceso que sigue cada alumno será distinto, variando el número de pasos que dará, puesto que cada uno necesita realizar el proceso adaptándose a su forma de pensar y de procesar los datos.

3.3.1.2 Producto y la división con el método ABN

El proceso de **multiplicación** se basa en el algoritmo clásico, solo que desarrollado. La única variante que tiene es que se van indicando y acumulando los productos parciales que se van obteniendo, para finalmente realizar una suma. El proceso puede observarse a continuación (figura 14). Se puede ver que la niña sigue su propio proceso, como en el caso de multiplicar 213x4, donde descompone el 13 en 8 y 5 para que así la multiplicación por 4 le resulte más sencilla de realizar.

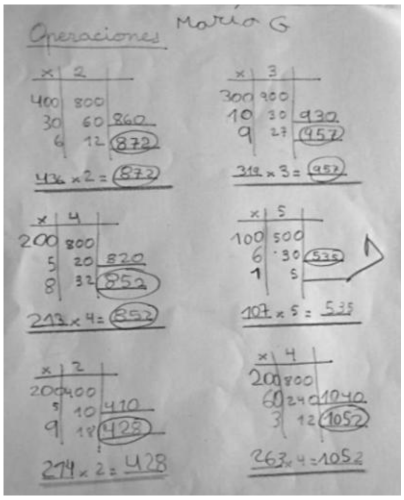


Figura 14. Multiplicación ABN

En el caso de la **división** o cociente, tal y como observa Martínez Montero (2010), si el niño domina la tabla de multiplicar, entendiendo por ello no solo multiplicar unidades, sino también decenas, centenas y millares, entonces sabrá resolver todas las divisiones de una cifra de forma rápida y con gran componente mental. En la figura 15 se muestra el proceso de realización de una división donde el niño reparte 633€ entre dos:

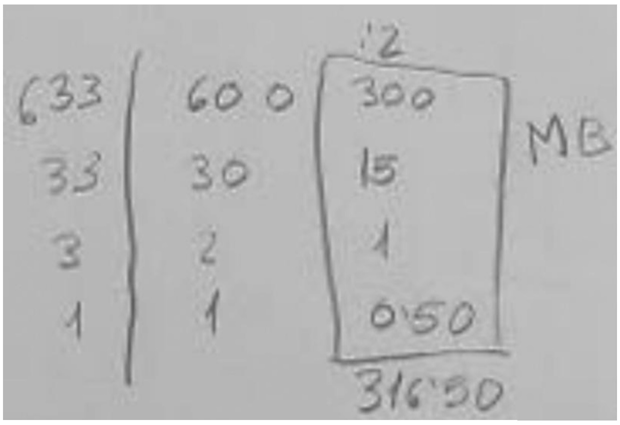


Figura 15. División por ABN

En este caso, la columna de la izquierda recoge las cantidades totales a repartir, la del centro la que el niño escoge para realizar la distribución exacta, y la última, debajo del divisor, recoge los cocientes parciales. La suma de ellos dará el cociente total. La cantidad que se quede en la primera columna será el resto. Puede observarse que en el ejemplo concreto el niño ha repartido el euro restante, obteniendo una cifra con decimales.

En los siguientes ejemplos (figura 16), puede observase como cada alumno adapta el mismo algoritmo a su individualidad, realizando en todos los casos 933:3:

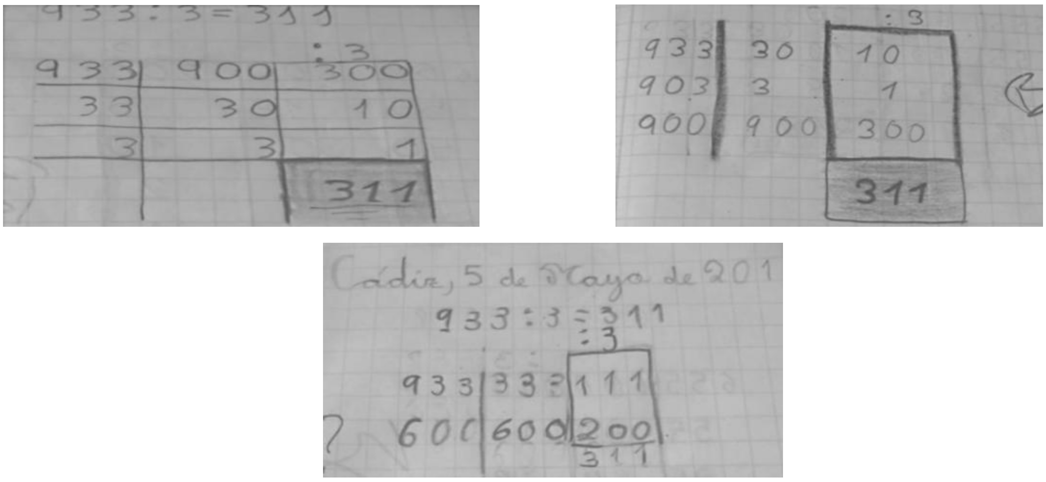


Figura 16. Variantes de división

Análisis del algoritmo

Una de las principales ventajas de los algoritmos ABN es que los alumnos operan con números completos, sin divisiones artificiales que le lleven a usar cifras sueltas, como sucede en el método tradicional. Si el número es demasiado grande para poder manejarlo con facilidad, el alumno tiene la oportunidad de dividirlo en números completos más pequeños. Unido a esto está que el alumno, utilizando este tipo de algoritmo, es consciente de todos los pasos que debe seguir para su resolución, es decir, no hay pasos ocultos u abstractos. De esta forma el alumno es consciente en todo momento del proceso realizado, ayudándole a integrar ese conocimiento de una forma más natural.

Al no seguir un procedimiento tradicional, donde todos los alumnos deben llevar un mismo ritmo de aprendizaje, siguiendo los mismos pasos, la aplicación de los algoritmos ABN permite que cada alumno siga su propio ritmo, resolviendo los problemas en los pasos que necesite, sin que sea algo cerrado. Esta es una gran ventaja, ya que en un aula nos encontramos con un perfil muy diferente de alumnos, algunos con mayor o menor facilidad para las matemáticas, lo cual no significa que no sean capaces de resolver un problema, sino que necesitan seguir su propio camino. Esta flexibilidad que ofrecen los algoritmos ABN hace que los alumnos no se frustren en el proceso de adquisición de conocimientos matemáticos, ya que existen diversas maneras de resolver el mismo algoritmo.

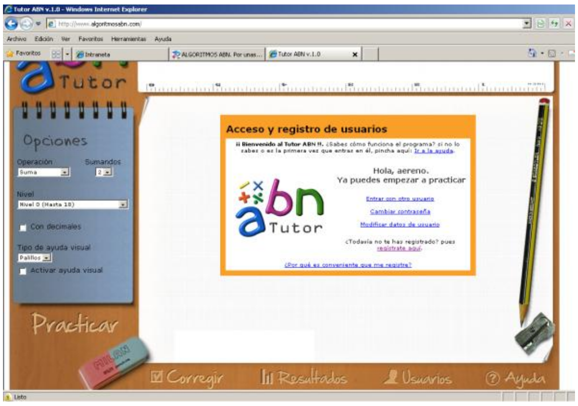
Los algoritmos ABN son en general eficaces, aunque su eficacia dependerá de cada alumno y de los pasos que este necesite para resolverlo. De la misma forma son matemáticamente válidos, puesto que se obtiene un resultado adecuado y son generalizables a cualquier situación de suma, resta, multiplicación y división.

En cuanto a la suma, se basa en el principio de descomposición de números, algo que hace que se manejen números enteros y por tanto la forma de resolverlo sea más natural al pensamiento del niño. En lo que a la resta se refiere, hemos mencionado tres formas de realizarla, de las cuáles la más sencilla y acorde al pensamiento de los niños me parece la de escalera ascendente. En este caso el niño sigue realizando sumas (algo más afín a su forma de pensar), para llegar de un valor menor, a otro superior. Sea cual sea la forma, una vez más se utiliza aquí la descomposición de los números. El método de detracción y comparación no me parece tan sencillo, sobre todo en la forma de plasmarlo sobre el papel, puede resultar algo confuso su desarrollo y los números obtenidos no se sitúan en la columna correcta.

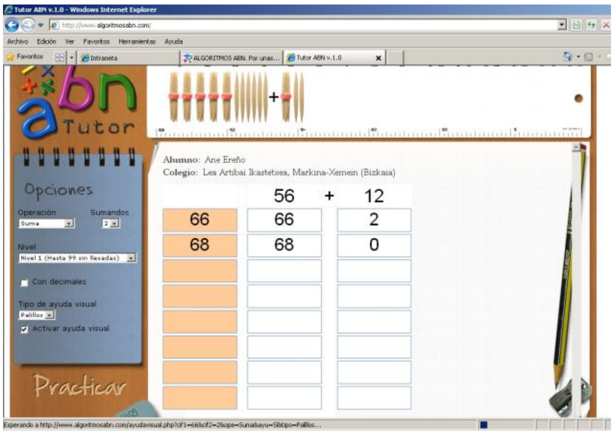
La multiplicación también sigue el adecuado planteamiento de los productos parciales, con lo que además de multiplicar será necesaria una suma al finalizar el proceso. Finalmente, la división es un proceso que como se observa en los ejemplos aportados, es muy personal de cada alumno, pero que una vez más sigue un planteamiento de restas por descomposición de números enteros, para después realizar la división y finalmente la suma para obtener el resultado. Es por tanto un ejemplo de cómo poner en práctica varios algoritmos a la vez.

3.3.1.3 Tutor ABN

Disponible en la web se encuentra un tutor ABN V1.0 (http://www.algoritmosabn.com/) para los algoritmos de la suma, la resta y la multiplicación. Este programa ha sido desarrollado por Enrique Goberna García y cuenta con el beneplácito de Javier Martínez Montero, persona que ideó los algoritmos ABN. Es un programa muy sencillo de utilizar que permite resolver las diversas operaciones por el método ABN y de la forma que más lo prefiera cada alumno. Solo hace falta registrarse, y comenzar a utilizarlo pulsando "practicar". Una vez desarrollado el algoritmo el propio programa nos da la oportunidad de corregir e incluso ver una estadística con los resultados obtenidos:

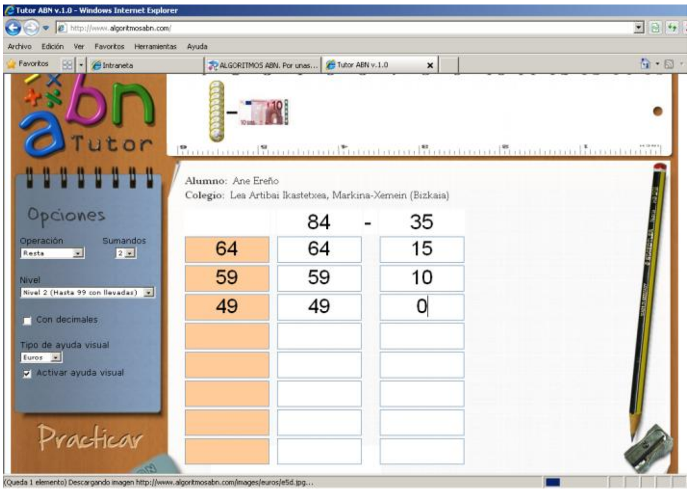


En el caso de la **suma**, el programa da la opción de realizarla con uno o dos sumandos, a través de cuatro niveles de dificultad (hasta 999 con llevadas), con la opción de activar decimales y dos tipos de ayuda visual: palillos o euros. De esta forma puede observarse cómo se realiza la suma con dos sumandos de nivel 1 (hasta 99 sin llevada) utilizando palillos como ayuda visual:



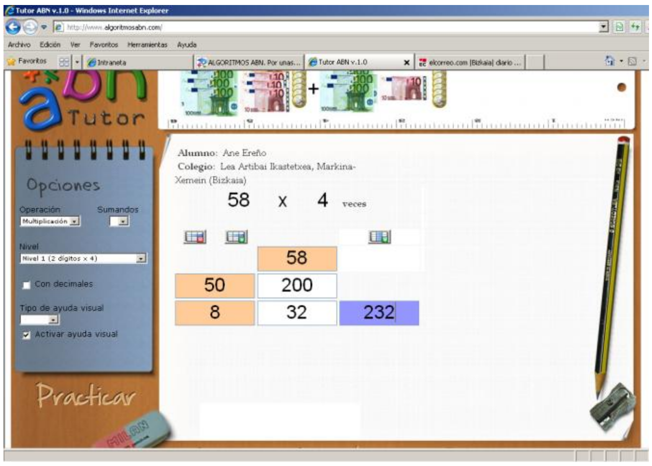
Como puede observarse en la parte superior aparecen los palillos (en grupos de 10 e individuales) para que el alumno visualice los dos sumandos. Aparecen además unas cuantas filas para que el alumno vaya desarrollando a su ritmo la suma, en este caso ha sido suficiente con dos pasos, pero el programa permite realizarlo hasta en 8.

En el caso de la **resta** solo existe la opción de realizarla con dos sumandos, y al igual que en él, caso anterior, cuatro niveles de dificultad. También aquí se permite la opción de usar decimales o no y ayuda visual de palillos o monedas:



Al igual que sucede con la suma, en la parte superior tenemos esta vez dinero (euros) representando los dos sumandos, y 8 filas a través de las cuáles desarrollar el algoritmo, cada uno en los pasos que considere necesario, en este caso se han necesitado 3. El modelo de resta que permite realizar el programa por el momento es el de comparación-detracción.

La **multiplicación** consta de 5 niveles de dificultad ascendente, llegando hasta multiplicaciones de cuatro dígitos por dos dígitos, dándonos la opción de utilizar decimales también y de visualizar la multiplicación solo utilizando euros:



En este caso, el propio programa nos indica las cifras a multiplicar a través de euros en la parte superior, y la tabla inicial que proporciona el programa se puede modificar por parte del usuario incluyendo columnas o filas a medida que lo considere necesario, puesto que se irán calculando los productos parciales, y al igual que sucedía en los casos de la suma y de la resta, es el propio alumno el que decidirá cuántos pasos necesita para resolver el problema.

Esta es una herramienta fácil y muy útil para que los alumnos practiquen desde sus casas, con la comodidad de que él mismo es capaz de corregir nuestro resultado y podemos ver, mediante estadísticas cómo se desarrolla nuestro proceso de aprendizaje. Falta solamente el algoritmo de la división, quizá algo más complicado de desarrollar, pero que seguro estará disponible en breve.

3.3.1.4 Cuadernillos ABN

Existen una serie de cuadernillos para los diversos cursos de primaria que tienen ejercicios para poder aprender matemáticas por el método ABN. Es el propio Jaime Martínez Montero el que los ha desarrollado: “Aprendo y disfruto con los números. Método ABN” Editorial la Calesa.

En ellos existen numerosos ejercicios divididos en 8 bloques de contenido: las decenas (1), la tabla de sumar (2), numeración (3), la suma (4), la resta (5), el producto (6), la división (7) y las situaciones problemáticas (8). En general, y centrándonos en los algoritmos, utilizan dos sistemas de visualización de los números como son los palillos (divididos en unidades, decenas o centenas) y dinero. Este es el mismo sistema de visualización que emplea el Tutor ABN, desarrollado en el punto anterior. Utilizan el sistema de decenas (por eso el uso de los palillos), puesto que los algoritmos se basan en la descomposición de los números en unidades, decenas, centenas etc. por lo que es importante que los alumnos se familiaricen con este concepto (ANEXO II).

En cuanto a la suma, utiliza varios métodos como el empleo de la recta numérica o el uso de los dedos y enseñan a los alumnos a descomponer los números en decenas (ANEXO III), para finalmente pasar a la suma en columna con descomposición de números (ANEXO IV). Para la introducción de las restas por ejemplo, se utiliza la ayuda de la tabla del cien que facilita mucho el cálculo y después se realizan restas utilizando columnas al estilo de las sumas (restas parciales) (ANEXO V).

El trabajo con la multiplicación y la división comienza con el uso de mitades y dobles (ANEXO VI), para pasar a realizar sencillas multiplicaciones utilizando el sistema de productos parciales y divisiones (ANEXO VII). Estos son sólo algunos de los ejemplos de actividades que se pueden encontrar en estos cuadernillos, cuya dificultad irá en aumento, según los alumnos avancen en los niveles de Educación Primaria. Unos cuadernillos con actividades muy visuales y amenas para hacer de la matemática algo divertido.

3.3-2. Algoritmos holandeses

Tal y como menciona Van den Heuvel-Panhuizen (2008) la educación matemática en Holanda se basa en la denominada Educación Matemática Realista (EMR). Considera las matemáticas como actividad humana y en ningún caso una teoría acabada, sino algo que está en marcha. La EMR surge en torno a 1970, con los principios colocados por Freudenthal y sus colegas del IOWO, el predecesor del Instituto Freudenthal. Freudenthal (1968) decía que las matemáticas deben mantener conexión con la realidad, mantenerse apegadas a las experiencias de los niños y ser pertinentes a la sociedad para que tengan valor humano. Según él, las clases de matemáticas debían dar la oportunidad a los alumnos de re-inventar las matemáticas haciéndolas. El nombre de "realista" causó cierta confusión en su momento, puesto que no se eligió este nombre solo por su conexión con el mundo real, sino por poder ofrecerles a los alumnos situaciones problema que ellos pudieran imaginar, ya que la traducción holandesa de imaginar es "zich realiseren". La EMR se apoya, según Santamaría (2006) en dos pilares fundamentales: el uso de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, y la interacción en el aula entre los alumnos y entre el docente y los alumnos. Esta interacción permitirá a los docentes construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los alumnos.

Para la enseñanza de las matemáticas, Van den Heuvel-Panhuizen (2008) propone los seis principios siguientes (p. 289-290):

- <u>Principio de actividad:</u> como se ha mencionado anteriormente, Freudenthal opina que las matemáticas se aprenden haciendo. Esto significa que los estudiantes se enfrenta a situaciones problema en las que por ejemplo deben realizar fracciones, después desarrollar una forma algorítmica de multiplicar y dividir, basándose en un modo informal de trabajar. Las producciones propias son muy importantes en la EMR.

- <u>Principio de realidad:</u> se busca que los estudiantes sean capaces de aplicar las matemáticas, utilizando su comprensión y herramientas para resolver problemas de la vida real. Es decir, aprender "las matemáticas las matemáticas de modo que sean útiles" (Freudenthal, 1968).

- <u>Principio de nivel:</u> significa que los estudiantes pasan por diversos niveles de comprensión: de la capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto, a la creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones. La condición para llegar al siguiente nivel es la capacidad para reflexionar sobre las actividades realizadas.

- <u>Principio de entrelazamiento:</u> significa que las matemáticas, como asignatura escolar, no están separadas en ejes distintos de aprendizaje. Se dice que no es posible separar los capítulos dentro de las matemáticas, es decir, resolver problemas de contexto rico suele significar que uno tiene que aplicar una amplia variedad de herramientas y discernimientos matemáticos; si por ejemplo se le pide a un alumno que estime el tamaño de una bandera, este debe aplicar no solo mediciones, sino también razones y geometría.

- Principio de interacción: dice que las matemáticas son una actividad social donde se debe ofrecer a los estudiantes oportunidades para dar a conocer unos a otros sus estrategias e inventos. Al escuchar lo que otros averiguan y comentar estos hallazgos, los estudiantes toman ideas para mejorar sus estrategias. Esto no significa que la clase entera avance colectivamente, puesto que la EMR considera a los niños individuos cada uno de los cuáles sigue una senda individual de aprendizaje.
- Principio de orientación: según Freudenthal (1991), las matemáticas deben dar a los estudiantes una oportunidad orientada a re-inventar las matemáticas. Esto supone que en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes. Profesores y programas deben conducir el proceso de aprendizaje, pero no de forma fija mostrando a los estudiantes lo que deben aprender, sino que estos necesitan espacio para construir herramientas y discernimientos matemáticos por su cuenta. El profesor actúa de guía en el aprendizaje.

A través de esta educación matemática, lo que se trata es que los alumnos busquen métodos propios para la resolución de problemas y que desarrollen su forma de pensar. La característica de la enseñanza de las matemáticas (y por tanto de los algoritmos) en Holanda, es que no existe una regulación legal sobre qué es lo que los profesores deben enseñar, cada uno elige, en base a sus alumnos cuál será esa manera aunque sí que existen varios pilares que guiarán a los profesores en la práctica educativa: libros de texto (actualizados y basados en el enfoque EMR), libros Proeve (contienen descripciones acerca del contenido en varias de las áreas que engloba las matemáticas), proyecto TAL (son diversas guías, hasta ahora sólo existen 3, sobre la trayectoria a seguir en la enseñanza de las matemáticas). Todos ellos son escritos por expertos en el tema y nunca influenciados por el gobierno, aunque este sí que define una serie de directrices (muy superficiales) sobre las metas principales que debe alcanzar un alumno al finalizar la Educación Primaria, y en este caso concreto en lo que se refiere a la educación matemática (el proyecto TAL complementa estas metas, especificando mucho más).

En lo referente a los algoritmos escritos, una de las directrices que define el gobierno es que los alumnos sean capaces de aplicar el algoritmo convencional (o una variante de este) de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en situaciones concretas. Unido a ello, se recomienda el uso razonable de la calculadora y se hace especial hincapié en el cálculo mental. A continuación se desarrollan ejemplos según Van den Heuvel-Panhuizen (2005) de cálculo mental, desarrollo de algoritmos, estimación y uso de la calculadora:

CÁLCULO MENTAL

Es la base de la educación primaria, se trata de un conocimiento matemático que implica que los alumnos pongan en funcionamiento tanto los hechos numéricos como las operaciones que los componen. No se trata simplemente de realizar cálculos mentales, sino de usar la mente para realizar estos cálculos. Realizar el cálculo mental puede incluir plasmar por escrito los pasos intermedios que se van dando a la hora de realizar una operación (algoritmo alternativo). Las estrategias de cálculo mental más utilizadas son las siguientes: encadenar (stringing), separación (splitting) y variaciones (varying). En la figura 17 aparecen algunos ejemplos de las operaciones de cálculo mental que se realizan en Educación Primaria (p.295):

Problem	
	Stringing strategy
325+243	325+200=525; 525+40=565; 565+3=568
325–249	325–200=125; 125–40=85; 85–9=76
6×48	3×48=144; 3×48=144; 144+144=288
78÷6	10×6=60; 3×6=18; 10+3=13
	Splitting strategy
325+243	300+200=500; 25+43=68; 500+68=568
385–249	300–200=100; 85–49=36; 100+36=136
6×48	6×40=240; 6×8=48; 240+48=288
78÷6	60÷6=10; 18÷6=3; 10+3=13
	Varying strategy
253+198	253+200–2=451
19×25	(20×25)–(1×25)=475
124–78	124–78=126–80=46
125×7	125×7=7×125=875
301–298	298+...=301; 3
16×25	16×25=8×50=400
75÷5	5×...=75; 15

Figura 17. Estrategias de cálculo mental

Estos son simples cálculos, pero a los alumnos también se les pide que resuelvan utilizando estas estrategias problemas que incluyan un contexto como cálculos monetarios, de distancias u otros relacionados.

CÁLCULO EN COLUMNA Y ALGORÍTMICO

Al finalizar la Educación Primaria los alumnos deben ser capaces de resolver problemas de suma, resta, multiplicación y división con cifras multinuméricas de la forma algorítmicamente más abreviada posible. En la educación holandesa, la multiplicación incluye multiplicar una cifra multinumérica por un número de dígito único y la división no pertenece a las metas de la Educación Primaria (aunque una vez más, esto son meras directrices, después cada maestro las adapta a su situación concreta).

El cálculo en columna es mucho más transparente y una alternativa al cálculo algorítmico. Este es un tipo de cálculo a caballo entre el cálculo mental y el algorítmico; en él se aplica la estrategia de separación, y a pesar de que el cálculo se da de forma vertical, se hace de izquierda a derecha en vez de al contrario. Utilizando el cálculo en columna el alumno trabaja con números enteros en vez de con dígitos. En la figura 18 se muestra el cálculo en columna frente al cálculo algorítmico tradicional (p.295):

Column calculation	Algorithmic calculation
463 382+ 700 140 5 845	1 463 382+ 845
845 382– 500 - 40 5 463	7 14 845 382– 463
163 7× 700 420 21 1141 the same for 70×163	163 7× 21 420 700 1141 or 4 2 163 7× 1141 the same for 70×163 and 47×163
422÷12= 35 remainder 2 422 360– 30× 62 60– 5× 2	

Figura 18. Formas de cálculo

ESTIMACIÓN

No es un aspecto de las matemáticas que se contemplara desde las directrices emitidas por el Ministerio de Educación, pero sí que el proyecto TAL lo incluyó como una destreza que los alumnos de Educación Primaria debían adquirir, dividiendo la estimación en cuatro apartados: (1) exploración y redondeo de números, (2) estimación en problemas de suma y resta, (3) estimación en problemas de división y multiplicación y (4) cálculos con valores estimados en problemas donde la información necesaria es incompleta o no está disponible. En la figura 19 se ofrecen varios ejemplos de problemas de estimación planteados a los alumnos (p.296).

USO DE LA CALCULADORA

El proyecto TAL recomienda la introducción de la calculadora como una ayuda en el cálculo, no antes de quinto grado de primaria. Al utilizarlo como ayuda, los alumnos deben saber hacer un uso de la misma, conociendo cuando tiene sentido utilizarla y cuándo no, por ejemplo, para realizar 1495/5 no tendría sentido utilizarla. Por el contrario, utilizar la calculadora en problemas como los de la figura 20, sería útil puesto que el proceso de resolución requiere un análisis del problema y una visión clara sobre cómo organizar los cálculos a realizar (p. 296).

Rounding off

> Indicate on a distance line where 489 km and 7378 km is located. For each distance, choose the most suitable line.

0 — 100 km

0 — 1000 km

0 — 10.000 km

0 — 100.000 km

Estimation in addition and subtraction

> Is the total number of visitors more than quarter of a million?

January	47,312
February	13,561
March	26,897
April	107,348

> Approximately 1 billion – 1 million = Approximately ...

Estimation in multiplication and division

> The wooden ornamental letters cost 3.95 Euro each. Arlette buys seven letters to put on her bedroom door. Approximately how much does this cost?

> In total, 4985 Euro worth of lottery tickets were sold. The lottery tickets cost 5 Euro each. Approximately how many lottery tickets have been sold?

Estimation with incomplete data

> A traffic jam is 5 kilometers long. How many cars could there be in this traffic jam?

Figura 19. Estimación

> The RingRing Telephone Company charges 7 cents for each 27 seconds of a telephone call or fraction thereof. What would they charge for a call lasting 33 minutes and 5 seconds?

> Water use in 1990: $87m^3$.
> $1\ m^3$ costs 84.6 cents. What is the total cost?

Figura 20. Problemas con calculadora

3.3.2.1 Situaciones aditivas: problemas de sumas y restas

Según Santamaría (2006) las situaciones aditivas que utilizan en el sistema holandés son las que incluyen descomposición de los números y problemas de sumas y restas.

En el caso de la descomposición, existen varias opciones según el libro de texto utilizado y que se introducen ya desde el tercer grado de educación primaria. En ocasiones la descomposición que se pide es libre (el alumno decide en qué dos números descompone uno dado), otras veces se da uno de los números de la descomposición, de manera que se restringe la solución. Véase la figura 21 del libro de texto Wis en Reken (p. 87):

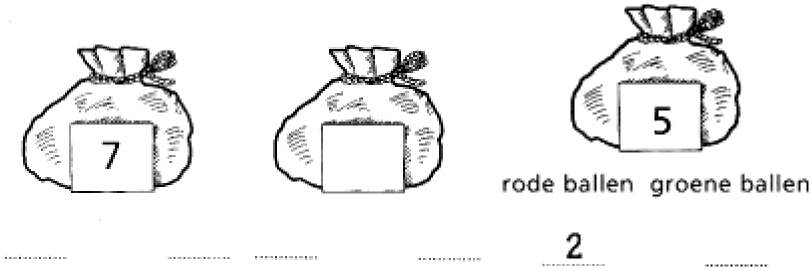


Figura 21. Descomposición Wis en Reken

Para que los ejemplos sean reales, además, en los diversos libros de texto utilizados en educación Primaria, se utilizan en estos problemas monedas, situaciones de compras etc. Otro ejemplo del uso de descomposición de números enteros se encuentra en el libro RekenRijk que se puede observar en la figura 22 (p. 88):

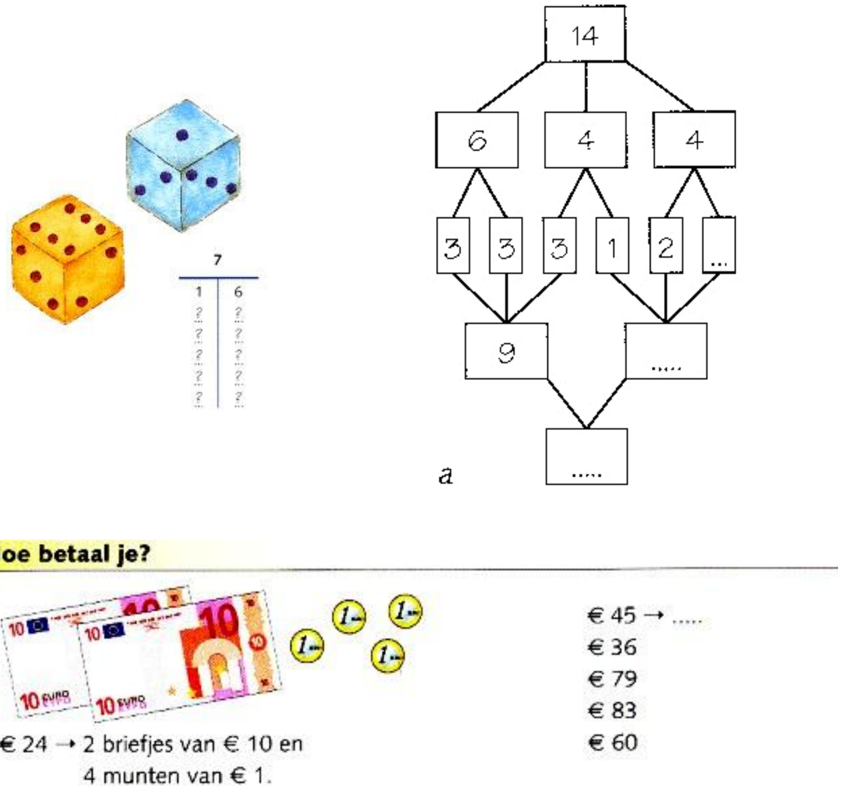


Figura 22. Descomposición

Tanto en la suma como en la resta, mediante este sistema se utiliza el sistema de descomposición (véase la figura 23) como algoritmo alternativo al tradicional, pero nunca perdiendo de vista este último, ya que una vez dominado el alternativo se realiza la transición al tradicional (véase la figura 24):

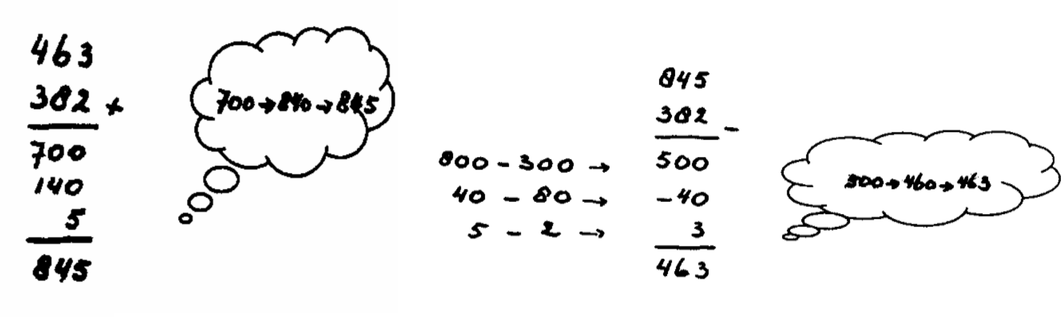


Figura 23. Algoritmos alternativos de suma y resta

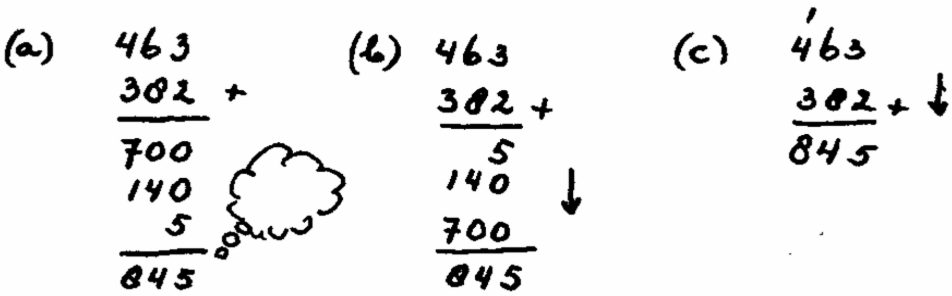


Figura 24. Transición del algoritmo alternativo al

3.3.2.2 Problemas de multiplicación

Según Santamaría (2006) los libros de texto hasta tercer grado de Educación Primaria no incluyen la multiplicación tal cual, sino que la trabajan a través de problemas de proporcionalidad y arreglos rectangulares. Por ejemplo en el libro Wis en Reken, pueden verse problemas en los cuáles los alumnos deben contar piezas de un puzle, o determinar el número de apartamentos de un edificio o contar cualquier otro elemento como puede observarse en la figura 25 (p. 96):

Figura 25. ¿Cuántos? Wis en Reken

Según la misma autora, a partir de ahí, comienzan a trabajar el cálculo de la multiplicación propiamente dicho, resolviendo ejercicios como los que se observan en la figura 26: identificar a qué operación simbólica corresponde cada gráfico (a), multiplicaciones escritas en lenguaje simbólico (b), escribiendo simbólicamente la operación que representa a las ilustraciones (c), identificando qué operaciones no se corresponden con el resultado (d), hallando qué par de números al multiplicarlos dan el resultado establecido (e), resolviendo problemas combinados (f), calculando el número de piezas totales para una silla, dos o más (g), calculando el peso total (h), encontrando relaciones numéricas para facilitar o recordar los cálculos (i), resolver cuentas en donde se hace uso de la propiedad distributiva y asociativa (j), resolver los problemas denominados “verbales” (k) (p. 98).

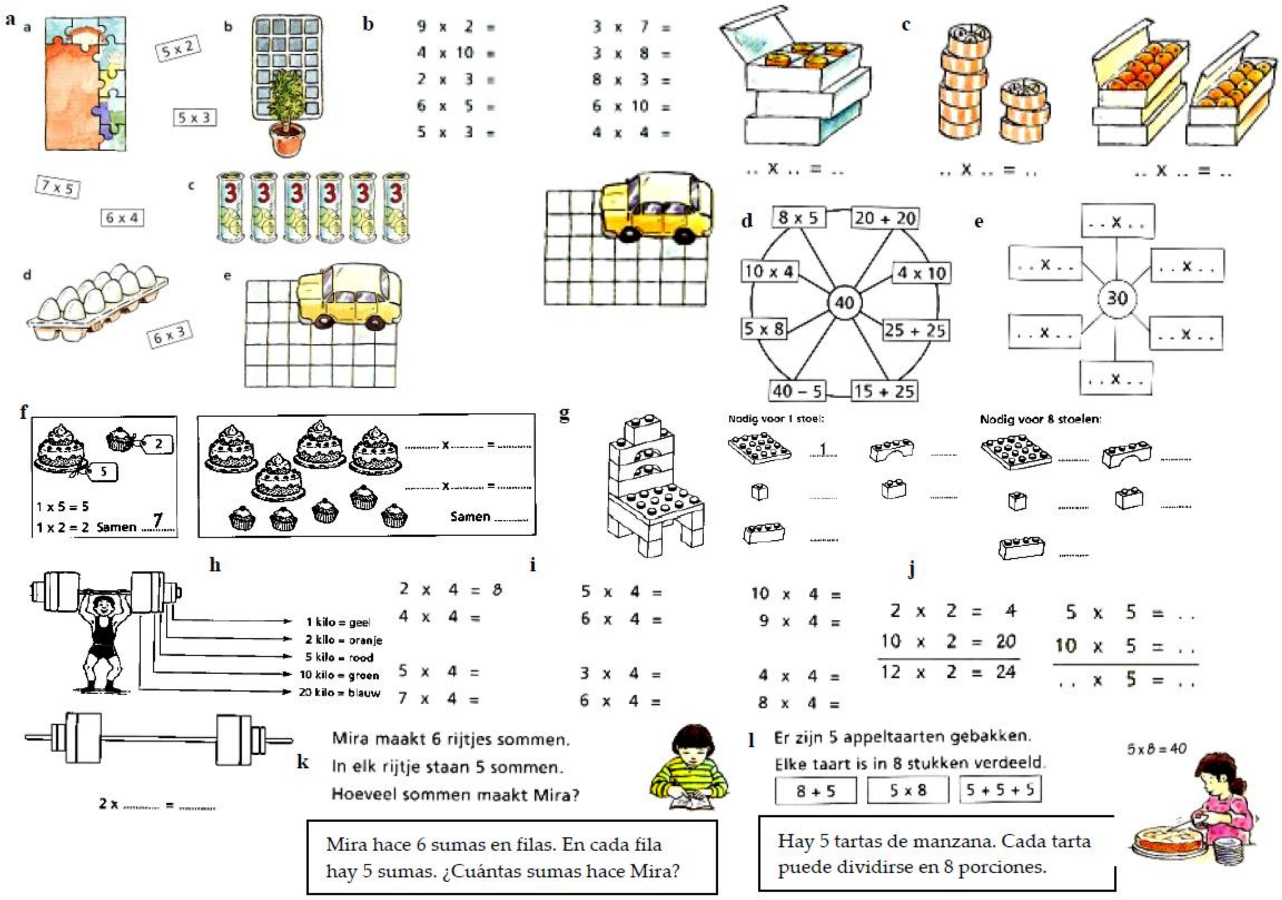


Figura 26. Problemas de multiplicación Wis en Reken

El algoritmo alternativo que utilizan en el sistema holandés para la resolución de la multiplicación también se basa en la descomposición como se observa en la figura 27. Puede verse que la multiplicación se da comenzando por las centenas, después las decenas y finalmente las unidades, para finalizar realizando la suma de los productos parciales obtenidos.

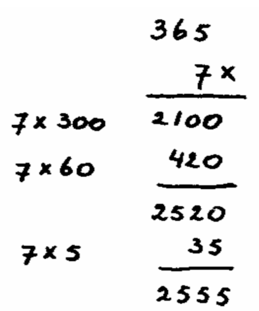


Figura 27. Algoritmo de la multiplicación

Al igual que sucedía con los algoritmos alternativos para la suma y la resta, tampoco en este caso pierden de vista el algoritmo tradicional, al cual se hace la transición una vez dominado el algoritmo alternativo. Véase la figura 28:

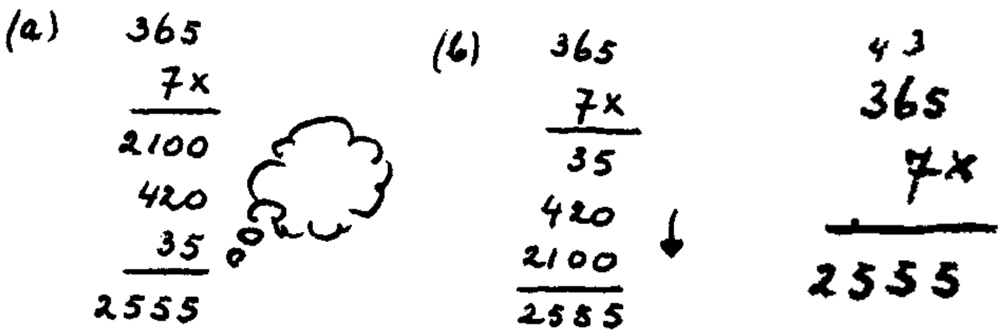


Figura 28. Transición al algoritmo tradicional

Puede observarse en la imagen anterior que se pasa del algoritmo alternativo que utiliza la descomposición de los números (multiplicaciones parciales), a un paso intermedio (b) donde se realizan igualmente productos parciales pero comenzando por las unidades (en la línea de lo que será el algoritmo tradicional), hasta llegar finalmente a este, utilizando la multiplicación de los dígitos del multiplicando por el multiplicador comenzando a realizar la operación desde las unidades y anotando las llevadas en la parte superior.

3.3.2.3 Problemas de división

Según Santamaría (2006) los problemas de división que se encuentran en los libros holandeses, realizan las divisiones de una manera informar, sin incluir el símbolo de la división en ningún momento, de esta forma los alumnos aprenden a dividir sin realmente saber "dividir". Es solo tras dominar esta forma informal de dividir, que se introduce en el algoritmo alternativo para la división. Un ejemplo de los problemas de división informal se encuentra en la figura 29, donde se pide a los alumnos que realicen bolsas de tres zanahorias y averigüen cuántas pueden hacer (p. 100-101):

Figura 29. ¿Cuántas bolsas de tres puedes llenar?

Otro tipo de problema de división es el que encontramos por ejemplo en el Win en Reken (figura 30), donde se pide a los alumnos que dividan pasteles en un número determinado de partes (p.102):

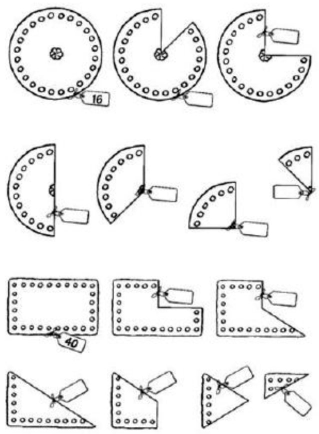


Figura 30. Problemas de división Wis en Reken

A la hora de realizar la división utilizando el algoritmo alternativo lo que se suele realizar habitualmente es plantear un problema realista en el aula, formar grupos de 10 y realizar una discusión entre todos los miembros para que los alumnos de nivel más bajo observen la solución dada por los mejores alumnos, que normalmente necesitan menos pasos para realizar la división. En este primer paso se plantean problemas de tipo: si 81 padres visitan la escuela y caben 6 en cada mesa ¿Cuántas mesas hará falta para todos? En la figura 31 puede observarse como cada alumno resuelve de una forma este problema:

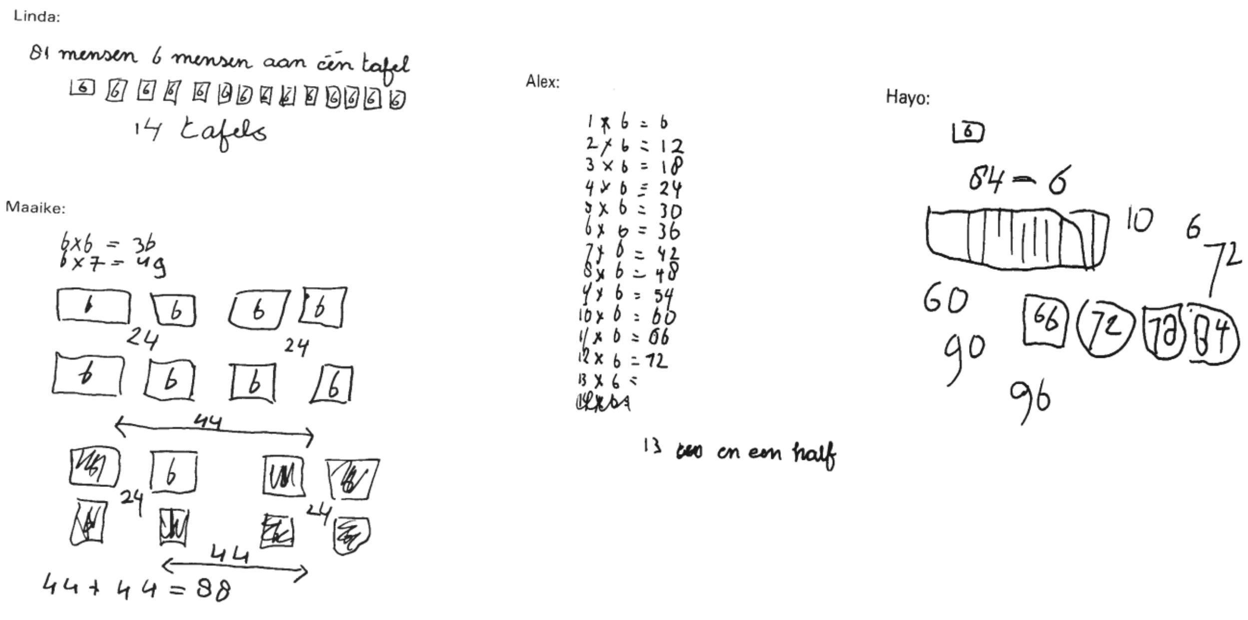


Figura 31. Diversas maneras de realizar la división

Los dos alumnos de la izquierda (Linda y Maaike) realizaron el dibujo de las mesas, aunque en el caso de Maaike, se ve que va sumando los padres que se ubican en las distintas mesas para tener una especie de recordatorio de cuántos padres se han sentado hasta el momento. Alex en cambio, ha optado por ir multiplicando paso a paso (en vez de dibujar), hasta obtener un valor cercano al número total de padres. Finalmente Hayo ha optado por hacer grupos de 10, multiplicando 6 x 10, y después sumándole a este resultado grupos de 6 (66, 72, 78, 84) hasta llegar a un resultado similar al que se pide.

Una vez más, como se observa en la figura 32 cada alumno llevará su ritmo de aprendizaje y realizará la operación en tantos pasos como le sea necesario. Para un problema con números más grandes como el siguiente: en un restaurante 12 personas tienen que pagar un total de 420 euros ¿Cuánto tendrá que pagar cada uno? Este es el resultado obtenido:

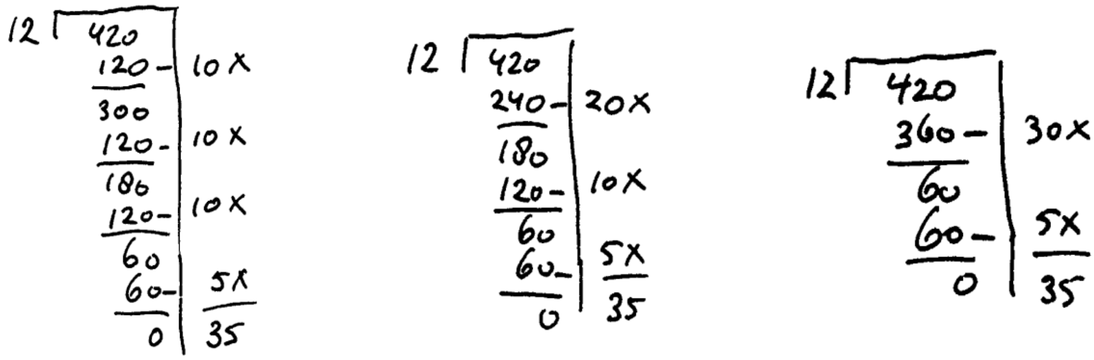


Figura 32. División formando grupos de 10 (de izquierda a derecha de más larga a más corta)

En la resolución de este problema se toma como base los grupos de 10, y se resta al dividendo el producto del divisor por diez. De esta manera se van haciendo la correspondientes restas hasta llegar a tener resto 0. Sumando los grupos de diez que hemos necesitado para lograr el resto de 0, se obtiene el resultado de la división. Se observa que el último alumno es capaz de agrupar los tres primeros grupos de diez, en uno solo de 30, para realizar menos pasos en la resolución del problema.

Análisis del algoritmo

Al observar el sistema holandés, puede verse el gran peso que tiene el cálculo mental en el desarrollo posterior de los algoritmos. Cada alumno llevará un ritmo de aprendizaje, y los algoritmos se adaptan a él, puesto que en todos los casos (suma, resta, multiplicación y división) son los propios alumnos los encargados de realizarlos en tantos pasos como les sea necesario.

En el caso de la suma, resta y multiplicación, se utiliza la descomposición de los números. Algo que hace más sencillo el desarrollo del algoritmo, siendo eficaz (casi siempre el número de pasos que dan todos los alumnos es el mismo), matemáticamente válido y generalizable a cualquier otra situación donde se aplique. De esta forma, los alumnos empiezan a operar con el número de izquierda a derecha en el algoritmo alternativo, utilizando el valor posicional de los números en lugar de los dígitos (números aislados) trabajando de lo más grande (centenas) a lo más pequeño (unidades). Se introduce este algoritmo antes que el tradicional, porque este último se puede convertir en un obstáculo para el cálculo mental, además se da forma más natural que el tradicional por la posicionalidad de los números.

En el caso de la división, se permite que cada alumno divida de la forma que le parece más natural y cómoda, por lo que la eficacia queda a veces limitada, dependiendo de la manera en que cada alumno lleve a cabo la división (si realizan dibujos por ejemplo, con números más elevados puede convertirse en algo engorroso). Sí que son procedimientos matemáticamente válidos todos ellos y una vez más, la generalización de estos procesos queda limitada a la forma en que cada alumno realiza la división (los pasos que lleve a cabo). Por lo general es una forma de proceder muy adecuada, puesto que permite a cada alumno seguir el razonamiento que le parece más natural, pero lo realmente importante es la puesta en común de los resultados, donde un alumno que quizá ha invertido demasiados pasos en realizar la división se da cuenta de que hay maneras más cortas y sencillas de hacerlo. Así cada alumno es consciente de sus propios errores y mejora su rendimiento y eficacia.

3.3-3. Algoritmos estadounidenses: algoritmos inventados por los niños

Este apartado no se desarrollará muy en profundidad, dado que realmente no existe un algoritmo estadounidense propiamente dicho, sino que existen numerosos estudios realizados por diversos investigadores que ponen en duda la efectividad del uso del algoritmo tradicional, y optan por dejar al alumno que invente su propio algoritmo, de la manera que le parezca más sencillo y acorde a su pensamiento. Una de las investigadoras más importantes en este campo es Constance Kamii. Según Kamii y Dominick (1998) los algoritmos tradicionales no son adecuados por dos razones: incitan al alumno a dejar de lado su propio pensamiento (puesto que se deben desarrollar siguiendo unos pasos dados) y porque hace que el alumno olvide el valor posicional de los números, haciendo así que el niño pierda el sentido numérico. En base a ello, fomentan los algoritmos inventados por los niños, ya que según Madell (1985) si damos libertad de pensamiento a los alumnos, estos proceden a operar universalmente de izquierda a derecha (al contrario que opera el algoritmo tradicional). Por lo tanto el algoritmo tradicional hace que los alumnos traten cada columna numérica como si fuera una columna de unidades y no viendo el número completo.

Según Campbell y Johnson (1995) los alumnos deben aprender a pensar matemáticamente y a construir relaciones e idear modelos que permitan ordenar y estructurar experiencias del mundo real y situaciones-problema. El trabajo de los algoritmos alternativos en Estados Unidos se fundamenta básicamente en que sean los propios alumnos frente a un problema, los que apliquen las estrategias que más lógicas les parecen para resolver el mismo y que compartan sus ideas con el resto de la clase, para que con la verbalización de los problemas se genere un feedback del que tanto alumnos como el resto de compañeros aprenderán. Este proceso debe darse con la ayuda del maestro que guiará a sus alumnos en el desarrollo de sus propias estrategias de resolución.

En la figura 33 (Kamii 1995) pueden observarse ejemplos de diversas maneras de resolver operaciones con algoritmos inventados por los alumnos:

18 + 17	10 + 10 = 20 8 + 7 = 15 20 + 10 = 30 30 +5 = 35	10 + 10 = 20 8 + 2 = otro diez 20 + 10 = 30 30 + 5 = 35	10 + 10 = 20 7 + 7 = 14 14 + 1 = 15 20 + 10 = 30 30 + 5 = 35
44 -15	40 - 10 = 30 4 - 5 = 1 bajo cero 30 - 1 = 29	40 - 10 = 30 30 - 5 = 25 25 + 4 = 29	40 - 10 = 30 30 + 4 = 34 34 - 5 = 29
135 x 4	4 x 100 = 400 4 x 30 = 120 4 x 5 = 20 400 + 120 + 120 = 540	4 x 100 = 400 4 x 35 = 70 + 70 = 140 400 + 140 = 540	
23) 285	23 + 23 + 23 + 23. . . hasta que el total se acerque a 285 46 + 46 + 46 + 46 . . .hasta que el total se acerque a 285 10 x 23 = 230 y luego seguimos sumando hasta que el total se acerque a 285		

Figura 33. Algoritmos inventados por los alumnos

En este caso los alumnos utilizan un sistema de descomposición de los números como se ha mencionado en el algoritmo holandés o el ABN, tanto para la suma, como para la resta, como también para el producto. En el caso de la división, se basa en sumar el divisor tantas veces como sea necesario hasta alcanzar un valor próximo al dividendo. Aunque existen formas más singulares de multiplicar, como es el caso de la figura 34, donde el alumno utiliza el sistema del árbol para resolver el problema:

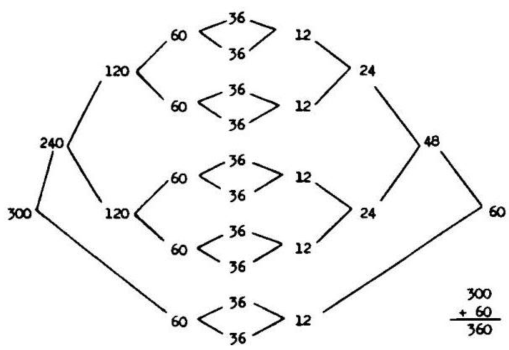


Figura 34. Método para resolver 10x36 empleado por Jerry

Lo que realiza Jerry en el ejemplo anterior, es plasmar el multiplicando tantas veces como indica el multiplicador, y realiza sumas parciales por ambos lados, de la unidades por su parte (lado derecho) y de las decenas por la suya (lado izquierdo). Así va ramificando el árbol hasta obtener dos números y sumarlos entre sí para obtener el resultado final.

Por lo tanto, en lo que se basa esta forma de aplicar los algoritmos es en la libertad del alumno para seguir su propio camino, llegando a elaborar sus algoritmos de la forma que les parezca más cómoda y lógica con respecto a su pensamiento. De esta manera, existen unos criterios (que se han ido utilizando a lo largo del trabajo) para valorar estos algoritmos que los alumnos van desarrollando y ver si realmente son válidos. De esta manera analizaríamos la eficacia del algoritmo (los pasos que el alumno da para su desarrollo), también si el algoritmo es matemáticamente válido, es decir, si el razonamiento matemático que ha seguido es correcto y por tanto le lleva a obtener un buen resultado. Con este criterio se debe tener cuidado, porque existen algoritmos que nos llevan a un resultado correcto por azar, pero no porque realmente los criterios seguidos han sido matemáticamente aceptables. Finalmente debe valorarse si el algoritmo desarrollado puede aplicarse a otro tipo de problemas similares, es decir, si ese algoritmo es generalizable a otros contextos.

4. CONCLUSIONES

Durante muchos años la enseñanza de las matemáticas ha sido algo que tanto para profesores como para alumnos, no ha sido tarea fácil. Son en general conceptos que cuesta transmitir a los profesores y asimilar a los alumnos. Un punto complicado y que ha generado un largo debate en todos estos años es el uso de los algoritmos para las cuatro operaciones matemáticas básicas. Con el desarrollo de este trabajo se ha conseguido realizar una recopilación de los algoritmos alternativos existentes y que pueden llegar a tener aplicación en la Educación Primaria, como una alternativa muy adecuada al algoritmo tradicional. Puede observarse como el objetivo principal del trabajo queda cubierto, dado que se han estudiado numerosas alternativas de enseñanza del algoritmo tradicional que se podrían adaptar muy bien a la forma de pensar de los alumnos. Los algoritmos tradicionales operan de derecha a izquierda, algo que no es natural en los niños, que operan naturalmente de izquierda a derecha. De esta manera, se manejan números enteros, más que cifras sueltas, y por lo tanto es mucho más adecuado para que el cálculo no resulte abstracto.

Los algoritmos históricos analizados ponen de relieve que las operaciones básicas han sido importantes en las diversas civilizaciones, y que estas tenían sistemas de cálculo desarrollados con los medios y el conocimiento de la época. Son en general algoritmos útiles que nos pueden ayudar a reflexionar sobre cómo se están haciendo las cosas actualmente y poder, en cierta medida, aplicarlas en la etapa de Educación Primaria, puesto que utilizan por lo general una forma de operar sencilla (en ocasiones teniendo que mecanizar algunos pasos como en el algoritmo de rejilla, para poder situar los números donde corresponde) y que normalmente manejan números enteros (a excepción del de rejilla y el chino que no tienen en cuenta la posición de los números).

En cuanto a los algoritmos alternativos puestos en práctica en diversos países, lo más importante es ver como en nuestro país existe todo un método de aplicación de algoritmos alternativos (ABN) que se ha puesto en marcha en algunos colegios con gran resultado. En su blog oficial (http://algoritmosabn.blogspot.com.es/) pueden verse las aportaciones de muchos colegios contando su experiencia con este sistema, siempre con una conclusión muy satisfactoria. Importante es también, el hecho de poder comparar lo que se realiza en otros países como Holanda o Estados Unidos en torno a la enseñanza de los algoritmos y el punto de vista que tienen respecto a la transmisión del algoritmo tradicional. Todos ellos tienen un punto en común: la necesidad de enseñar estos algoritmos de una forma más lógica para el alumno, partiendo de la importancia que tiene el cálculo mental y la descomposición de los números. De esta manera se ha realizado una aproximación a estas formas de operar, centrándose en los algoritmos ABN y holandés, de los que existe mucho más material generado como libros de texto, páginas web, actividades para poder desarrollar las operaciones básicas etc. Analizados estos algoritmos, se puede determinar que su aplicación en la Educación Primaria podría ser algo adecuado, aunque suponga cambiar un poco la forma de transmitir los algoritmos conocida hasta ahora.

Finalmente mencionar la importancia de realizar un buen análisis de cada uno de los algoritmos, para así poder concretar la idoneidad de los mismos para la Educación Primaria. Para los alumnos de esta etapa, es mucho más natural comenzar por el cálculo mental para adquirir destreza y después pasar al algoritmo escrito. Destacar además, la importancia de realizar las operaciones de la forma que el alumno considere más adecuada, realizando el número de pasos que este crea necesaria para llegar al resultado final. De esta forma, el alumno es consciente de su propio aprendizaje y su evolución, a la misma vez que aprende de los otros, ya que una característica muy importante tanto del algoritmo ABN como del holandés es la puesta en común del desarrollo seguido por cada alumno. El hecho de verbalizar el desarrollo del algoritmo, hace que el alumno tome plena conciencia de lo que ha realizado y fomenta el aprendizaje constructivista al que se tiende en la actualidad.

A través de este trabajo se pretende des-demonizar una parte de una asignatura como las matemáticas, que típicamente se ha considerado como algo complicado, muchas veces por la forma tan enrevesada de transmitirla a nuestros alumnos y que se ha ganado su mala fama. Puede verse, por tanto, que la resolución de problemas de suma, resta, multiplicación o división puede llegar a ser un juego, no excesivamente complicado y sobre todo muy útil para la vida real, huyendo (pero sin perder de vista) del algoritmo tradicional, del cual su uso se limita hoy en día al aula. Con ello evitamos la frase de John Von Neumann (matemático Húngaro-Americano) “en las matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas”, ya que a través de los algoritmos alternativos se hacen realmente mucho más comprensibles.

5. PROSPECTIVA

Como se menciona anteriormente, el uso de algoritmos alternativos está hoy en día bastante extendido en algunas sociedades como la holandesa (que tiene su propio sistema) o la estadounidense, pero en nuestro país es algo que todavía no tiene demasiado calado. Es complicado que algo que está tan arraigado (aunque en ocasiones no sea lo más efectivo) como son los algoritmos tradicionales y en general la forma de hacer tradicional, son difíciles de cambiar. El hecho de introducir en el aula una nueva forma de trabajar los algoritmos, como por ejemplo utilizando el método ABN, supone para muchos maestros un trastorno. Además de ello, debería cambiarse el currículo, algo que va más allá de la propia práctica en el aula, y que no queda al alcance de los maestros.

Sería interesante poder poner en práctica en algún colegio el método ABN (como insisto ya se ha hecho en algunos casos, pero siempre a nivel particular y no de centro) para poder realizar una comparativa de si realmente es un método con el cual se consiguen buenos resultados (algo que avalan algunas de las experiencias realizadas hasta el momento) con la forma tradicional de operar, introduciendo este método en una clase tipo de primer curso de Educación Primaria. Como profesores de primaria, sería algo que podría realizarse a nivel particular, puesto que podría ser interesante observar la evolución de unos alumnos que siguen este método. De todas formas, cambiar la forma de trabajar a este respecto, es algo particular de cada profesor, ya que si se quisiera hacer a nivel más global supondría una revisión del currículo actual (un poco complicado hoy en día), algo que actualmente estaría en manos del gobierno y no de un grupo de profesores en concreto. Además de todo ello, sólo el método ABN daría para poder desarrollar un trabajo de fin de grado completo, incluyendo un análisis en profundidad del material existente, de las experiencias realizadas y de cómo introducirlo en el aula de Educación Primaria.

En la misma línea, podría ser materia de estudio en profundidad el sistema holandés, como está organizado, en que se basa y el enfoque que le da al tratamiento de los algoritmos, dado que este trabajo sólo está centrado en la aplicación de los algoritmos, tocando muy por encima el resto de los puntos que sería materia interesante de estudio en otro trabajo. Puede observarse como en Holanda se trabaja a base de problemas, desarrollando el cálculo mental, y no es hasta cursos avanzados de educación primaria que se introducen los algoritmos escritos. Así como el sistema estadounidense, observando en profundidad el trabajo realizado por Kamii en cuanto a los algoritmos inventados por los niños, para conocer realmente cómo está estructurado su pensamiento y en base a eso, ver cuáles son las formas más innatas de desarrollar los distintos algoritmos (aunque seguramente cada niño en particular tendría una manera distinta de resolver el mismo algoritmo). De esta forma, conociendo cómo se organiza el pensamiento matemático del niño podría desarrollarse un método de trabajo con los algoritmos acorde al mismo. Todo ello supondría la realización de estudio de campo para poder poner en práctica las distintas propuestas.

Los demás algoritmos (sobre todo los históricos) son algo que particularmente podría desarrollar un profesor a nivel individual para mejorar la compresión de la suma, la resta, la multiplicación o la división, y que pueden ser una herramienta muy útil en educación primaria.

Este es un tema que da la oportunidad de llevar a cabo muchas investigaciones, y partiendo de la aproximación expuesta en este trabajo, algo interesante sería estudiar más en profundidad estos métodos y poder ver si son adecuados o no para ponerlos en práctica en el aula y realmente comprobar si los diversos algoritmos alternativos desarrollados son una buena opción o no, y cuál será el que mejor se podría adaptar a nuestro sistema.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barba-Calvo (2009). *"Elementos y razonamientos en la competencia matemática"* impartido por la Universidad Internacional Menéndez Pelayo (UIMP)

Bermejo, V. (2004). *Como Enseñar Matemáticas para Aprender Mejor*. Madrid: CCS.

Bravo, J. (2009). *"La multiplicación en la antigüedad"*. Recuperado de: http://www.slideshare.net/guest449e23/la-multiplicacion-en-la-antiguedad-1537324

Campbell, P. F. y Johnson, M. L. (1995). *"How primary students think and learn ". In seventy-five years of progress: Prospects for School Mathematics*. Reston: Irish M. Carl, pp. 21-42. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chelle, P. G. (2008). *Mejorar los Aprendizajes Área: Matemáticas*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be Useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.

Ginsburg, H., Klein, A. y Starkey, P. (1998). «The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice». En Sigel, I. y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology*. Vol. 4 (pp. 401-476). NY: John Wiley & Sons.

Kamii, C. K. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid. Visor.

Kamii, C. K., & Dominick, A. (1998). *The harmful effects of algorithms in grades 1-4*. In L. J. Morrow & Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 NCTM Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Madell, R. (1985). *Children´s natural processes. Arithmetic teacher,* 32, 20-22.

Maier, E. A. (1987). Basic Mathematical Skills or School Survival Skills? *Teaching Children Mathematics*. (p. 22)

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2011). El método de cálculo basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón, 63* (4), 95-110.

Martínez, J. (2010). "Algoritmos ABN" creado en marzo de 2010. Disponible en internet: http://algoritmosabn.blogspot.com.es/2010/04/que-es-eso-de-abn.html

Moreno, R. y Vegas, J.M. (2006). *Una historia de las Matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. Madrid: Nivola Libros y Ediciones.

PISA (2009). *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación.

Plunkett, S. (1979). *Decomposition and All That Rot. Mathematics in School*, 8(3), 2-5.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. BOE nº293.

Realini, S. "Tablas de multiplicar a través de la tabla Pitagórica". Disponible en: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/120316_batalla_multiplicar.elp/index.html

Santamaría, F. I. (2006). *La Contextualización de la Matemática en la escuela Primaria de Holanda*. Argentina: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Comahue.

Tabla pitagórica. Recuperado de: http://elbibliote.com/resources/destacados/notad245.html

Trigo, V. (2005). *Algoritmos*. Manuales formativos de ACTA (Autores Científico-Técnicos y Académicos), 35, 43-50. Recuperado de: http://www.acta.es/medios/articulos/matematicas/035041.pdf

Van de Heuvel-Panhuizen, M. y Wigers, M. (2005). *Mathematics Standars and Curricula in the Netherlands*. ZMD, 37 (4), 287-296

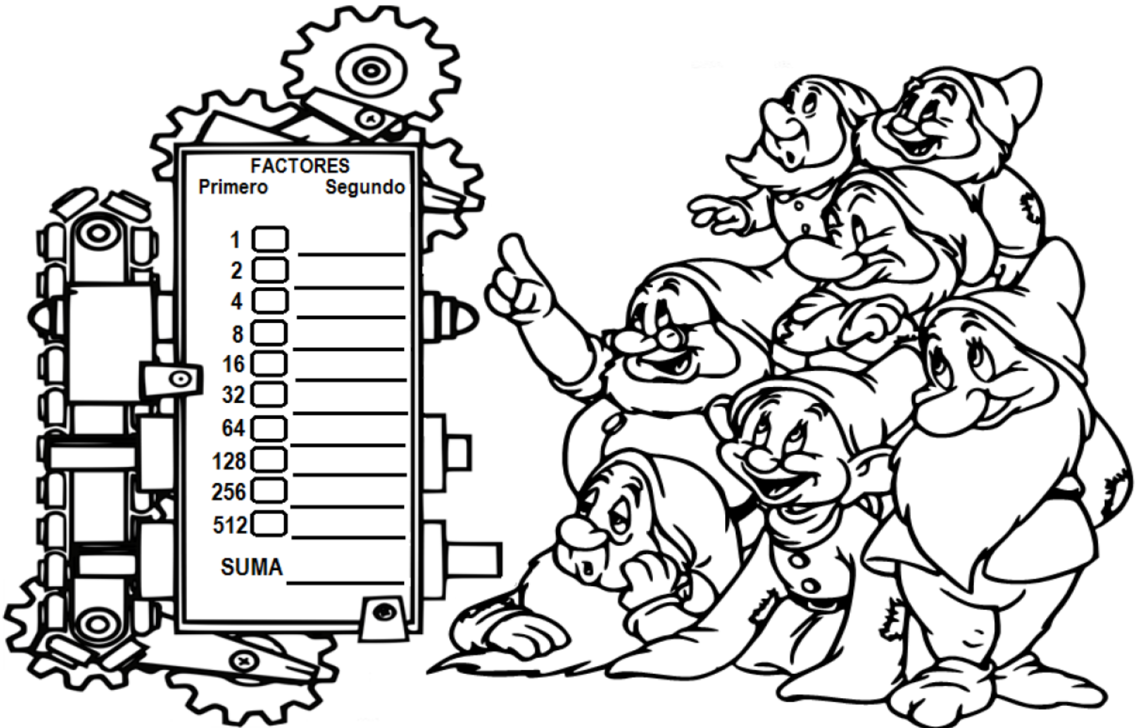
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Educación Matemática en los Países Bajos: un recorrido guiado*. Correo del Maestro, 149

ANEXO I

ALUMNO/A: ____ **CURSO:**______

MULTIPLICA SIN SABERTE LAS TABLAS

Hola amigos. Ya me conocéis, soy "SABIO" y tengo un gran problema con mis seis compañeros: NO CONSIGO QUE SE SEPAN LAS TABLAS.
Por eso he inventado esta máquina que puede hacer todas las multiplicaciones, desde las más fáciles a las más complicadas. Sólo necesitas saber sumar. Te las dejo por si algún día necesitas usarlas.
Puedes colorearme como quieras, pero no colorees los rectángulos situados a la derecha de los números que van a funcionar como "pilotos".



Te explicaré su funcionamiento: Si quieres multiplicar 17 x 29; el primer factor, en este caso el 17, tienes que descomponerlo en un suma cuyos sumandos sean los números situados en el margen izquierdo de la máquina, es decir 17=16 +1, y coloreamos de rojo los rectángulos situados al lado de estos números.
El segundo factor, el 29, lo escribimos en la primera renglón y vamos bajando renglones, escribiendo siempre el doble del número que tengamos encima, hasta llegar al último "piloto" rojo; en este caso el 16. Así habremos escrito por orden descendente: 29–58-116-232 y 464. Ahora solo nos queda sumar las cantidades que tienen el "piloto" rojo a su izquierda. Es decir 464 + 29 = 493
Y ese es el resultado de multiplicar 17 x 29. COMPRUÉBALO.

AHORA TE TOCA A TI. Prueba a realizar multiplicaciones de una o de varias cifras con la máquina y luego con el método que te han enseñado en el colegio. Comprueba los resultados.
NOTA: En vez de colorear los "pilotos" de rojo, coloca un trocito de cartulina o plástico simulando que están "coloreados", así la máquina te puede servir muchísimas veces.

Isidro Burgos Ramos

ALGUNOS EJEMPLOS

7 X 9		
Primero	X	Segundo
7		9
1	■	9
2	■	18
4	■	36
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
SUMA: 9+18+36= 63		
Por tanto 7 x 9 = 63		

38 x 45		
Primero	X	Segundo
38		45
1	☐	45
2	■	90
4	■	180
8	☐	360
16	☐	720
32	■	1440
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:1440+180+90=1710		
Luego: 38 x 45 = 1710		

124 x 25		
Primero	X	Segundo
124		25
1	☐	25
2	☐	50
4	■	100
8	■	200
16	■	400
32	■	800
64	■	1600
128	☐	
256	☐	
512	☐	
1600+800+400+200+100		
Luego 124 x 25= 3100		

112 x 202		
Primero	X	Segundo
112		202
1	☐	202
2	☐	404
4	☐	808
8	☐	1616
16	■	3232
32	■	6464
64	■	12928
128	☐	
256	☐	
512	☐	
12928+6464+3232=22624		
Luego 112 x 202= 22624		

769 x 32		
Primero	X	Segundo
769		32
1	■	32
2	☐	64
4	☐	128
8	☐	256
16	☐	512
32	☐	1024
64	☐	2048
128	☐	4096
256	■	8192
512	■	16382
16382+8192+32=24608		
Luego 769 x 32 = 24608		

AHORA TE TOCA A TI

8 x 4		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Por tanto 8 x 4 =		

7 x 7		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 7 x 7 =		

36 x 9		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 36 x 9 =		

46 x 34		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 46x 34=		

68 x 92		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 68 x 92 =		

85 x 47		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Por tanto 85 x 47 =		

79 x 73		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 79 x 73 =		

62 x 93		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 62 x 93 =		

64 x 43		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 64x 43=		

86 x 29		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 86 x 29 =		

345 x 24		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Por tanto 8 x 4 =		

603 x 22		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 7 x 7 =		

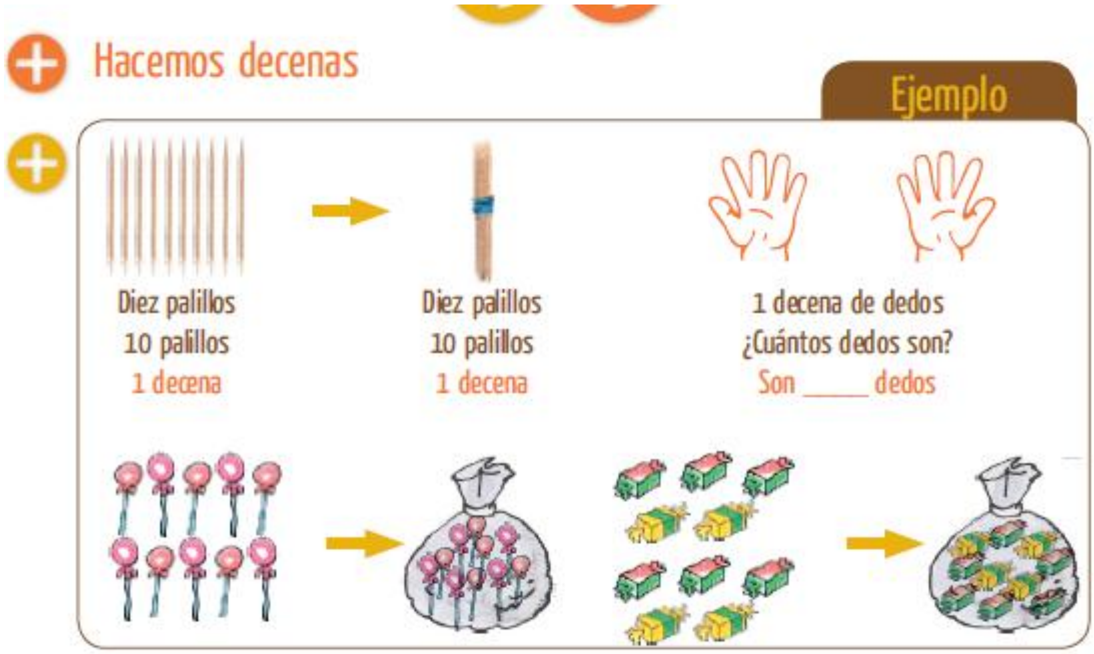
396 x 54		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego: 36 x 9 =		

763 x 96		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 46x 34=		

515 x 120		
Primero	X	Segundo
1	☐	
2	☐	
4	☐	
8	☐	
16	☐	
32	☐	
64	☐	
128	☐	
256	☐	
512	☐	
Suma:		
Luego 68 x 92 =		

Isidro Burgos Ramos

ANEXO II


Hacemos decenas
Ejemplo
Diez palillos
10 palillos
1 decena
Diez palillos
10 palillos
1 decena
1 decena de dedos
¿Cuántos dedos son?
Son _____ dedos

ANEXO III

Empezamos a sumar

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Ejemplo
4 + 5

¡Mira cómo se hace!

1.- Marca el 4.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

2.- Cuenta 5 hacia adelante. El número al que llegas es el resultado. 4 + 5 = 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Ahora tú. Ayúdate de la recta numérica si lo necesitas.

3 + 1 = ___	7 + 2 = ___	5 + 1 = ___	5 + 2 = ___	2 + 8 = ___
2 + 6 = ___	4 + 1 = ___	3 + 2 = ___	8 + 2 = ___	1 + 6 = ___
8 + 1 = ___	2 + 9 = ___	1 + 9 = ___	1 + 7 = ___	2 + 4 = ___

Completa.

6 + 1 = ___	8 + 2 = ___	4 + __ = 6	2 + 6 = ___	7 + __ = 8
2 + 7 = ___	1 + __ = 8	1 + 9 = ___	9 + __ = 10	2 + __ = 8
5 + 2 = ___	7 + __ = 9	5 + __ = 7	2 + __ = 10	9 + 2 = ___

Aprende a sumar con los dedos

Resuelve estas sumas.

3 + 3 = ___	2 + 3 = ___	4 + 4 = ___
2 + 2 = ___	3 + 4 = ___	4 + 2 = ___
5 + 2 = ___	5 + 5 = ___	3 + 5 = ___

Ejemplo

3 + 2 = 5

Ahora con números mayores

Ejemplo
7 + 2 = 9

¡Mira cómo se hace!

1. Piensa en el número 7.
2. Extiende tantos dedos como tiene el segundo sumando.
3. Cuenta los dedos a partir del 7. Ya tienes el resultado: 9.

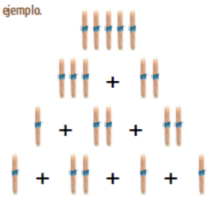
Ahora tú.

6 + 2 = ___	8 + 2 = ___	2 + 7 = ___	9 + 1 = ___
7 + 1 = ___	3 + 6 = ___	1 + 8 = ___	9 + 2 = ___
7 + 3 = ___	6 + 3 = ___	3 + 8 = ___	7 + 2 = ___
4 + 6 = ___	9 + 4 = ___	2 + 9 = ___	4 + 8 = ___
3 + 7 = ___	8 + 3 = ___	3 + 9 = ___	4 + 7 = ___

Componer y descomponer decenas

Ejemplo

Fíjate en el ejemplo.



Ahora tú. Si quieres ayúdate de los palillos, pero aquí escribe sólo los números. El primer ejemplo te lo damos resuelto.

	EN DOS SUMANDOS	EN TRES SUMANDOS	EN CUATRO SUMANDOS
	40 + 10	30 + 10 + 10	20 + 10 + 10 + 10
	__ + __	__ + __ + __	__ + __ + __ + __
	__ + __	__ + __ + __	__ + __ + __ + __
	__ + __	__ + __ + __	__ + __ + __ + __
	__ + __	__ + __ + __	__ + __ + __ + __
	__ + __	__ + __ + __	__ + __ + __ + __

ANEXO IV

¡Vamos a sumar!

Ejemplo

68 + 24

Hay que hacer la suma 68+24.

EJEMPLO 1

Paso 1 → Paso 2 → Paso 3 → Paso 4

Paso 1

	68	+24
10	78	14

Paso 2

	68	+24
10	78	14
10	88	4

Paso 3

	68	+24
10	78	14
10	88	4
2	90	2

Paso 4

	68	+24
10	78	14
10	88	4
2	90	2
2	92	0

EJEMPLO 2

Paso 1 → Paso 2 → Paso 3

Paso 1

	68	+24
10	78	14

Paso 2

	68	+24
10	78	14
10	88	4

Paso 3

	68	+24
10	78	14
10	88	4
4	92	0

EJEMPLO 3

Paso 1 → Paso 2

Paso 1

	68	+24
20	88	4

Paso 2

	68	+24
20	88	4
4	92	0

ANEXO V

Vamos a hacer restas con la ayuda de la tabla del 100 y de la recta numérica. Ejemplo:

50 - 24 =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

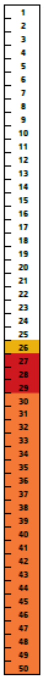
1. Sitúate en el 50. Cuenta 20 hacia atrás. Es dar dos saltos. Hazlo también en la recta numérica.

Llegas al número 30.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Ahora cuenta hacia atrás 4 números. Llegas al 26. Ese es el resultado:

50 - 24 = 26



Ahora tú.

90 - 4 = 86	80 - 1 =	90 - 34 =
80 - 11 =	90 - 44 =	80 - 21 =
90 - 14 =	80 - 31 =	90 - 24 =

Ejemplo

Haz estas operaciones. Emplea los pasos que necesites.
Mira cómo lo han hecho tres niños diferentes.

	110	-28
10	100	18
10	90	8
8	82	0

	110	-28
20	90	8
5	85	3
3	82	0

	110	-28
25	85	3
3	82	0

Ahora tú.

	100	-48

	600	-74

	700	-29

	900	-99

Algo más difícil.

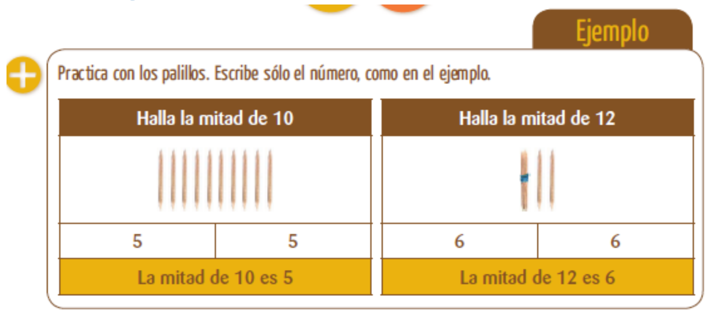
	110	-64

	810	-35

	610	-61

	710	-48

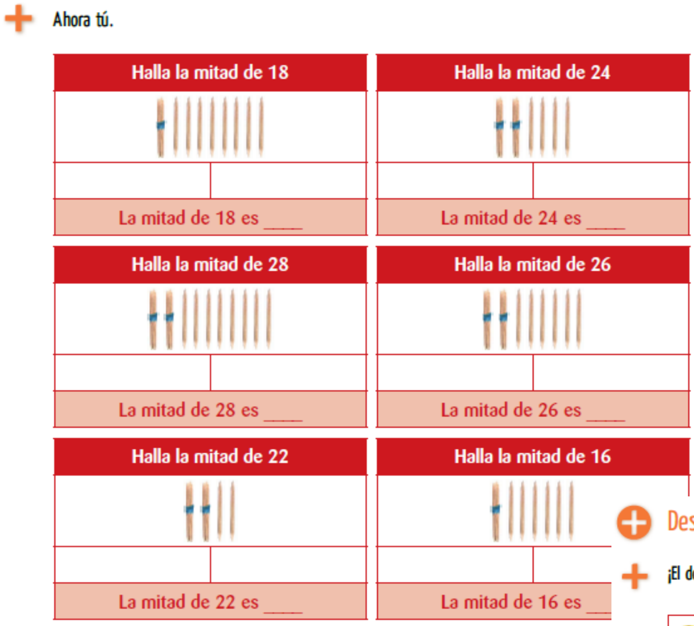
ANEXO VI



Ejemplo

Practica con los palillos. Escribe sólo el número, como en el ejemplo.

Halla la mitad de 10		Halla la mitad de 12	
5	5	6	6
La mitad de 10 es 5		La mitad de 12 es 6	

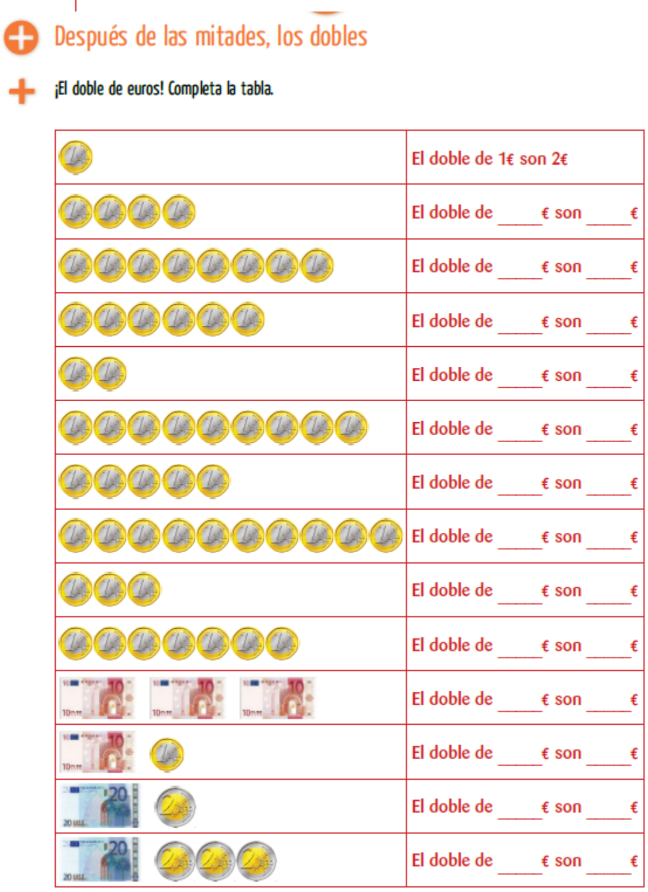


Ahora tú.

Halla la mitad de 18		Halla la mitad de 24	
La mitad de 18 es ____		La mitad de 24 es ____	

Halla la mitad de 28		Halla la mitad de 26	
La mitad de 28 es ____		La mitad de 26 es ____	

Halla la mitad de 22		Halla la mitad de 16	
La mitad de 22 es ____		La mitad de 16 es ____	



Después de las mitades, los dobles

¡El doble de euros! Completa la tabla.

	El doble de 1€ son 2€
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €
	El doble de ____ € son ____ €

ANEXO VII

Aprende a multiplicar por dos

Ejemplo

Mira cómo lo han hecho los niños y niñas:

 x 2 (436 x 2)

436	x 2	
400		
30		
6		

1. Han colocado las cantidades para hacer la operación.

436	x 2	
400	800	
30		
6		

2. Han hallado el doble de 400, que es ochocientos.

436	x 2	
400	800	
30	60	
6		

3. Han hallado el doble de 30, que es 60.

436	x 2	
400	800	
30	60	860
6		

4. Han sumado el doble de 400 y el doble de 30, que es 860.

436	x 2	
400	800	
30	60	860
6	12	

5. Han hallado el doble de 6, que es 12.

436	x 2	
400	800	
30	60	860
6	12	872

6. Han sumado el doble de 6 a la suma anterior (860). Ese es el resultado.

Empezamos a dividir por 2

Haz tú la operación de la derecha y fíjate en el ejemplo.

Ejemplo

844 : 2 =		
		: 2
844		

682 : 2 =		
		: 2
682		

		: 2
844	800	400
44		

		: 2
682		

		: 2
844	800	400
44	40	20
4		

		: 2
682		

		: 2
844	800	400
44	40	20
4	4	2
0		422

		: 2
682		