



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**Metodología para enseñar álgebra a
alumnos de 1º de la ESO basada en el
aprendizaje cooperativo**

Presentado por: MÓNICA CHORQUES ESPÍ
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
/Recursos educativos (TIC)
Director/a: PEDRO AURELIO VIÑUELA VILLA
Ciudad: VALENCIA
Fecha: 26 Julio 2013

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del bloque de Álgebra a alumnos de 1º de ESO basado en el trabajo cooperativo y mediante el empleo de un espacio *Wiki*. La propuesta didáctica consistirá en una metodología de trabajo cooperativa aplicada a varias técnicas y herramientas concretas para trabajar en el aula.

Para todo ello se analizan primero cuáles son los objetivos mínimos establecidos en la legislación vigente, contenidos y criterios de evaluación. Se lleva a cabo una investigación bibliográfica acerca de cómo se presentan estos contenidos en los distintos recursos disponibles, cuáles son las principales dificultades con que se encuentran habitualmente los alumnos y con qué técnicas y estrategias pueden contar para el trabajo cooperativo en el aula de matemáticas. Por otro lado se realiza un estudio de campo entre docentes de matemáticas en secundaria para valorar cuáles son las dificultades que se presentan concretamente en sus aulas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de álgebra, en qué medida, con qué frecuencia y si se percibe alguna mejoría con el uso de algunos recursos específicos. Para finalizar se presentan los resultados obtenidos de la investigación mediante gráficas, se analizan posibles relaciones, se establecen conclusiones, y se desarrolla una propuesta para la enseñanza del álgebra en alumnos de 1º de ESO que elimina o reduce las dificultades habituales encontradas.

Palabras clave: álgebra, aprendizaje cooperativo, 1º ESO, dificultades aprendizaje, *Wiki*.

Abstract

This paper presents a methodological approach to teaching Algebra block students of 1st ESO based on cooperative work through the use of a *Wiki* space. The methodological approach will consist of a cooperative working methodology applied to several specific tools and techniques to work in the classroom.

For all first analyze what are the minimum targets set out in the legislation, content and evaluation criteria. It conducts a literature about how to present this content in the various resources available, what are the main difficulties usually encountered students with techniques and strategies which can count for cooperative work in the mathematics classroom. On the other hand there is a field study among secondary mathematics teachers to assess what are the difficulties that arise specifically in their classrooms in the teaching and learning of algebra, how much, how often, and if you notice any improvement with the use of some specific resources. Finally we present the results of research using graphs, we analyze possible relationships, drawing conclusions, and develop a proposal for teaching algebra 1 students of ESO which eliminates or reduces the usual difficulties encountered.

Keywords: algebra, cooperative learning, 1st ESO, learning difficulties, *Wiki*.

Índice de contenidos

Resumen.....	2
Abstract	2
Índice de contenidos	3
Índice de cuadros	5
Índice de gráficas, esquemas y figuras	6
1. Introducción	7
1.1. Presentación y justificación	7
2. Planteamiento del problema.....	9
2.1. Objetivos	9
2.2. Metodología	10
2.3. Justificación de la bibliografía utilizada.....	11
3. Fundamentación teórica	13
3.1. El currículo de matemáticas en la normativa estatal.....	13
3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE)	13
3.1.2. Real Decreto 1631/2006 del 29 de diciembre, de Educación.....	15
3.1.3. Proyecto de Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)	16
3.2. El currículo de matemáticas en la normativa autonómica de la Generalitat Valenciana.....	16
3.2.1. Decreto 112/2007	16
3.3. Recursos didácticos.....	18
3.4. Dificultades en el aprendizaje del álgebra	20
3.5. Aprendizaje cooperativo	28
4. Estudio de campo.....	35
4.1. Planteamiento.....	35
4.2. Puesta en práctica	38
4.3. Análisis de los resultados	46
5. Propuesta didáctica.....	49
5.1. Introducción y Justificación.....	49
5.2. Objetivos y competencias básicas	49

5.3. Contenidos.....	50
5.4. Metodología.....	52
5.4.1. ¿Qué has aprendido en primaria?	52
5.4.2. Juguemos a detectives	54
5.4.3. Cambio de roles.....	55
5.5. Definición de actividades	56
5.6. Evaluación.....	58
6. Aportaciones del trabajo	60
7. Discusión	61
8. Conclusiones	62
9. Limitaciones del trabajo	64
10. Líneas de investigación futuras.....	65
11. Referencias bibliográficas.....	66
11.1. Referencias	66
11.2. Bibliografía complementaria	68
12. Anexos	69
Anexo N° 1. Cuestionario para profesores.....	70
Anexo N° 2. Temario resolución ecuaciones.....	73
Anexo N° 3. Recopilación datos cuestionarios.....	77

Índice de cuadros

Cuadro N° 1. Contenidos y Criterios de evaluación del bloque de álgebra en 1º de ESO, en el Real Decreto 1631/2006.....	15
Cuadro N° 2. Criterios de evaluación de matemáticas 1º de ESO, en el Decreto 112/2007.....	17
Cuadro N° 3. Clasificación general de las TIC.....	19
Cuadro N° 4. Nuevas herramientas telemáticas para trabajar en el aula.....	19
Cuadro N° 5. Ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado.....	21
Cuadro N° 6. Organización de los errores en la pregunta 1.....	26
Cuadro N° 7. Análisis de errores para la pregunta 5.....	26
Cuadro N° 8. Teorías que justifican la eficacia del aprendizaje cooperativo.	29
Cuadro N° 9. Tipos de grupos en el aprendizaje cooperativo.....	31
Cuadro N° 10. Dificultades en el aprendizaje del álgebra.....	36
Cuadro N° 11. Posibles recursos para la mejora del aprendizaje del álgebra.	37
Cuadro N° 12. Definición de objetivos y relación con las competencias básicas.	50
Cuadro N° 13. Contenidos de la unidad y fuentes empleadas.	51
Cuadro N° 14. Definición y secuencia de actividades de la unidad.	56
Cuadro N° 15. Criterios de valoración.	58
Cuadro N° 16. Criterios de evaluación.	59

Índice de gráficas, esquemas y figuras

<i>Gráfica N° 1.</i> Resultados promedio. Competencia matemática.	7
<i>Gráfica N° 2.</i> Rendimiento del alumnado en la Competencia matemática.	8
<i>Gráfica N° 3.</i> Carácter de los centros educativos encuestados.	38
<i>Gráficas N° 4-9.</i> Cursos en que imparten clase los encuestados.	39
<i>Gráfica N° 10.</i> Años de antigüedad en la docencia de los entrevistados.....	40
<i>Gráficas N° 11-14.</i> Metodología empleada en el proceso de enseñanza.....	40
<i>Gráficas N° 15-16.</i> Uso de las TIC en educación.....	41
<i>Gráfica N° 17.</i> Dificultades en el aprendizaje de álgebra.....	42
<i>Gráfica N° 18.</i> Dificultades más significativas para los docentes.	42
<i>Gráficas N° 19-20.</i> Comparación entre dificultades de aprendizaje de álgebra en centros públicos y centros concertados.	43
<i>Gráficas N° 20-21.</i> Comparación entre dificultades más significativas para los docentes en centros públicos y centros concertados.	44
<i>Gráfica N° 22.</i> Recursos para la mejora de la comprensión del álgebra en el aula.	45
<i>Gráficas N° 23-24.</i> Comparación entre la opinión de centros públicos y concertados en cuanto al uso de recursos para mejorar la comprensión del álgebra.	46
<i>Esquema N° 1.</i> Componentes básicos del aprendizaje cooperativo.	31
<i>Esquema N° 2.</i> Distribución de alumnos en grupos heterogéneos.	33
<i>Esquema N° 3.</i> Algunas técnicas de aprendizaje cooperativo.	34
<i>Figura N° 1.</i> Página principal del <i>Wiki</i> de la asignatura.....	52
<i>Figura N° 2.</i> Vista de la actividad <i>¿Qué has aprendido en primaria?</i> en el <i>Wiki</i> de la asignatura.	53
<i>Figura N° 3.</i> Vista de la actividad <i>Juguemos a detectives</i> en el <i>Wiki</i> de la asignatura.....	54
<i>Figura N° 4.</i> Vista de la actividad <i>Cambio de roles</i> en el <i>Wiki</i> de la asignatura.....	56

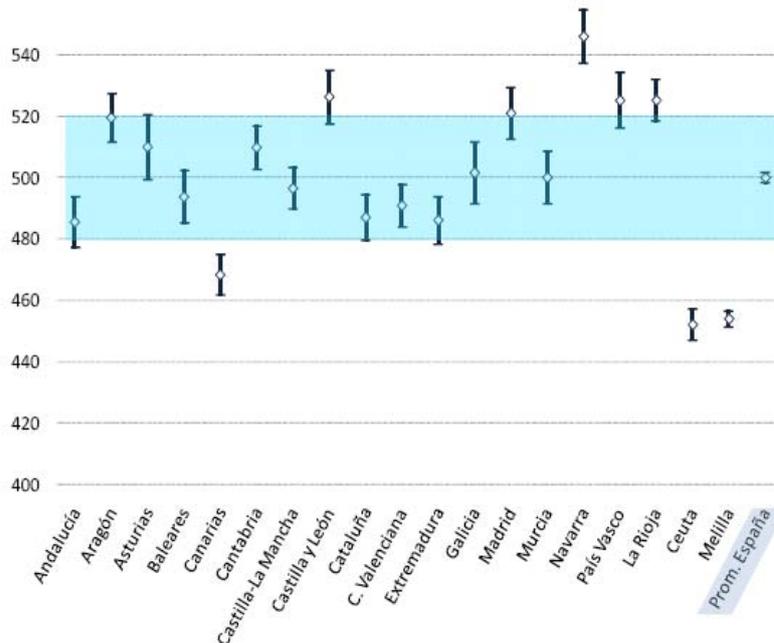
1. Introducción

1.1. Presentación y justificación

A lo largo de los últimos 20 años vienen siendo objeto de estudio e investigación las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Universidades y organizaciones nacionales, instituciones internacionales (OCDE, IEA o la UNESCO) y toda la comunidad educativa están realizando una gran labor en la mejora de la calidad educativa en todas las materias a partir de estos estudios.

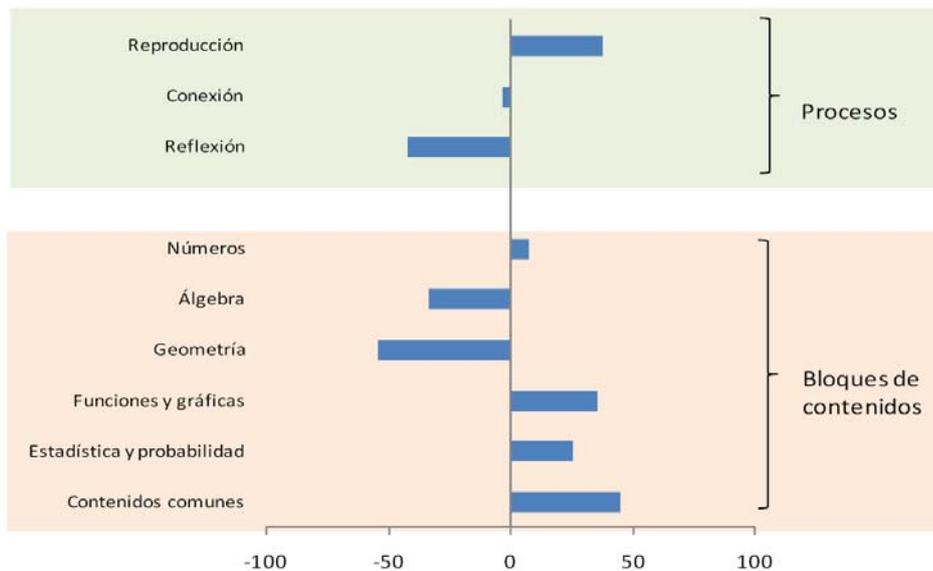
Sin embargo los informes de estas organizaciones arrojan resultados poco alentadores en cuanto a la competencia matemática para los alumnos españoles.

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa publicó en 2011 una Evaluación General de Diagnóstico de la Educación Secundaria Obligatoria en las distintas competencias básicas. En cuanto a la competencia matemática, el promedio de España se sitúa en los 500 puntos, y sólo seis comunidades autónomas difieren en menos de 20 puntos de este promedio. Únicamente Navarra presenta unos resultados promedios superiores a 520 puntos. En cambio Canarias, Ceuta y Melilla se encuentran por debajo de los 480 puntos. En el gráfico que sigue podemos ver estas diferencias por comunidades.



Gráfica Nº 1. Resultados promedio. Competencia matemática. Fuente: INEE (2011, p.70).

Según este informe, los resultados obtenidos evidencian cierto grado de dificultad cuando se trata de poner en práctica procesos para reproducir, para establecer conexiones y para reflexionar sobre cuestiones planteadas. Pero es en los bloques de contenidos correspondientes a álgebra y a geometría donde los resultados indican mayor dificultad para los estudiantes. Vemos en el siguiente gráfico el rendimiento de los alumnos en competencia matemática por procesos y por bloques.



Gráfica N° 2. Rendimiento del alumnado en la Competencia matemática. Fuente: INEE (2011, p.86).

Cuando hacemos una retrospectiva hasta el informe del INEE correspondiente a la evaluación de diagnóstico del año 2000, y que fue publicado en 2003, ya se indicaba que en cuanto a los resultados de las pruebas llevadas a cabo entre estudiantes de secundaria en la materia de matemáticas, el planteamiento de ecuaciones de primer grado se encontraba en el tercer grado de dificultad de un total de cuatro niveles de menor a mayor grado.

A la vista de estos resultados, y coincidiendo con las prácticas finales de los estudios de Máster, se presentó la oportunidad de conocer de primera mano varias aulas de distintos niveles de secundaria y constatar ciertamente estas dificultades de aprendizaje del bloque de álgebra.

Las dificultades con que se encuentran estos alumnos y alumnas de 1º de ESO ha suscitado tanto interés como para dedicar el trabajo fin de máster a este tema particular, con la finalidad de presentar una metodología didáctica que les resulte más atractiva, que les facilite la transición de la aritmética al álgebra y que les motive en su tarea de aprendizaje.

Estos resultados y las dificultades inherentes al bloque de contenidos correspondientes al álgebra de 1º de la ESO como pueden ser la aparición de letras en las matemáticas, el concepto de igualdad o la aproximación al lenguaje algebraico, apoyan la necesidad de un esfuerzo por parte de los docentes por presentar nuevas metodologías didácticas que aproximen los contenidos de este bloque a los alumnos de forma natural, relacionando conceptos con la vida real y con otros ya adquiridos.

El problema reside en que, a la vista de los resultados de evaluación de diagnóstico llevadas a cabo por el INEE en 2000 y en 2011, apenas ha mejorado el resultado de los alumnos de secundaria en la competencia matemática en los últimos 11 años. Más bien al contrario, los alumnos siguen encontrando dificultades de forma más aguda en los bloques de álgebra y geometría.

En este trabajo se busca proponer una metodología didáctica que, a través del trabajo en equipo, pueda ayudar a los alumnos de 1º de ESO en el aprendizaje de estos contenidos. No ha sido su pretensión resolver todas y cada una de las dificultades inherentes a la materia, sino presentar los contenidos de forma más atractiva y programar las actividades con una secuenciación que les facilite su aprendizaje, favorezca que ganen en confianza y les motive hacia la asignatura.

Antes de proponer una nueva metodología, se ha llevado a cabo una labor de investigación sobre los contenidos a impartir, sobre las dificultades con que se enfrentan los alumnos y sobre los recursos con que se puede contar para facilitarles el proceso de aprendizaje.

2. Planteamiento del problema

2.1. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es:

Proponer una metodología didáctica basada en el trabajo en equipo que permita introducir el bloque de álgebra a los alumnos de 1º de ESO facilitando su aprendizaje.

Adicionalmente se pretenden alcanzar los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar los contenidos del bloque de álgebra de primer curso de educación secundaria.
2. Conocer los problemas más comunes con que se enfrentan los alumnos en el aprendizaje de álgebra.
3. Exponer distintos modelos didácticos de tipo cooperativo para la enseñanza-aprendizaje del álgebra, analizando las características de cada uno de ellos y comparando las ventajas y desventajas que presentan.
4. Recoger y estudiar la opinión de algunos docentes respecto a las dificultades en el aprendizaje del álgebra y a la conveniencia del empleo de las TIC en el aula.
5. Crear un espacio virtual *Wiki* en el que quede reflejado el trabajo cooperativo de los alumnos en el aula de matemáticas.

2.2. Metodología

En este trabajo se combinan aspectos de carácter teórico con otros de carácter empírico. En el ámbito teórico se lleva a cabo una investigación bibliográfica del contenido del bloque de álgebra correspondiente al primer nivel de la ESO, de las distintas modalidades de trabajo cooperativo y de las posibles metodologías de aplicación en el aula de matemáticas. En cuanto al ámbito empírico, se realiza un estudio de campo, mediante cuestionarios y encuestas, entre docentes de la asignatura para detectar cuáles son los principales problemas con que se enfrentan los alumnos en su aprendizaje del álgebra. Esta segunda parte del trabajo combina ambos aspectos, teórico y empírico, dado que para la elaboración de las encuestas y cuestionarios se ha realizado un primer estudio bibliográfico acerca de los problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

En definitiva, podemos definir las distintas metodologías empleadas según la fase que atraviesa la redacción del trabajo en cada momento.

Fase primera (análisis del estado de la enseñanza actual): En una fase previa a la definición del trabajo, se ha llevado a cabo un análisis bibliográfico de los distintos informes publicados por organismos e instituciones que trabajan en la mejora continua de la enseñanza. A través de la lectura y profundización de estos informes se ha situado la problemática principal del presente trabajo en el marco de las dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Fase segunda (estudio del marco teórico): A partir de este momento, se definen objetivos y bibliografía, y comienza la fase de investigación bibliográfica del marco teórico, profundizando principalmente en:

1. Cuáles son los contenidos mínimos incluidos en la legislación vigente para el bloque de álgebra y de qué modo cabe evaluarlos.
2. Qué es el trabajo cooperativo, qué ventajas y desventajas aporta en la mejora del aprendizaje de matemáticas y ejemplos de metodologías de tipo cooperativo diseñadas por expertos en la materia.
3. estudio y análisis de cuáles son las dificultades más comunes en el aprendizaje específico del álgebra, como requisito previo a la elaboración de los cuestionarios a desarrollar en la fase empírica.

Se incluye también en esta fase teórica una consulta sobre cuáles son las herramientas telemáticas disponibles actualmente para su uso en el aula y cuál de ellas podría resultar de ayuda o complemento a la propuesta didáctica.

Fase tercera (empírica): Por último, en la fase empírica se ha contactado con centros educativos de secundaria para recabar información de forma directa de los docentes en matemáticas. Los cuestionarios han sido elaborados para conocer la opinión de estos docentes sobre las dificultades con que se enfrentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra, en qué medida les afectan y si el uso de algunas herramientas TIC minimiza o elimina completamente estas dificultades.

Todo este trabajo teórico y empírico sustenta finalmente la propuesta didáctica en la que se presentan diversas metodologías para trabajar el álgebra de forma cooperativa en el aula de matemáticas, incluyendo en dicho trabajo el uso de nuevas herramientas de tipo telemático con la creación de un espacio *Wiki*.

2.3. Justificación de la bibliografía utilizada

En un principio, y para conocer el estado de la cuestión, se han consultado informes y resultados oficiales sobre la situación actual de la educación en España y en comparación con otros países. Los principales informes analizados han sido los referentes a los últimos estudios llevados a cabo por el Ministerio de Educación, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) o la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).

Una vez definidos los objetivos principal y secundarios, se ha analizado cuál es la legislación vigente, tanto estatal como autonómica, que define los contenidos, los objetivos y los criterios de evaluación para el bloque de álgebra en educación secundaria. De este modo se han consultado la Ley Orgánica de Educación (LOE), el Real Decreto 1631/2006 del 29 de diciembre, de Educación y el Decreto 112/2007 del Consell de la Generalitat Valenciana, actualmente vigentes, así como el proyecto de Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) de próxima entrada en vigor.

Para conocer cuáles son las dificultades más comunes en el aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra en particular, la bibliografía consultada ha sido muy amplia. Cabe citar como principales libros de consulta los trabajos de Ortiz (2004) y Skemp (1998), pero ha habido otros estudios y artículos de apoyo como los de Ruano, Socas y Palaera (2008), Kieran y Yagüe (1989), Vergnaud y Cortés (1986) y varias publicaciones de Filloy o Rojano. Con pequeños matices y muy pocas diferencias, la mayoría de todos ellos apuntan en la misma línea. Diferencian primeramente dificultades de aprendizaje de matemáticas relacionadas con la materia misma y dificultades de otro tipo (de lenguaje, de comprensión lectora, etc.) que pueden derivar a su vez en dificultades en las matemáticas. En cuanto a las dificultades propias de la materia, todos coinciden en que la capacidad de abstracción de los alumnos recién llegados a secundaria es una de las mayores barreras con que se encuentran al iniciarse en el álgebra.

En cuanto al aprendizaje cooperativo el trabajo se ha basado principalmente en el libro de Torrego y Negro (2012) por tratarse de uno de los más recientes, aunque también se han consultado los artículos y trabajos de Coll, Mauri y Onrubia (2006), de Johnson, Jonhson y Holubec (1999), Perez (2010) o de Ortega y Melero (1999). También Torrego y Negro (2012) hacen referencia a trabajos de estos autores citados y, aunque cada uno de ellos presente técnicas variadas y específicas para el trabajo cooperativo, todos los métodos utilizados siguen los mismos criterios y presentan las mismas características basadas en el aprendizaje de habilidades sociales al tiempo que aprenden matemáticas u otras materias.

Y para finalizar, aunque no en último lugar, se han consultado a Area (2004), Bartolomé (2004) y Onrubia (2005) para conocer las últimas herramientas informáticas y su aplicación en las aulas, aunque este último punto se ha tratado de forma secundaria en este trabajo debido a su extensión y a limitaciones de tiempo. Aún así, se ha empleado un espacio *Wiki* como plataforma de trabajo para integrar las herramientas de la sociedad de la información en la propuesta didáctica.

3. Fundamentación teórica

3.1. El currículo de matemáticas en la normativa estatal

3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE)

Antes de abordar la cuestión sobre cuál es el currículo para la materia de matemáticas en secundaria, conviene conocer qué entiende por currículo la Ley Orgánica de Educación (LOE), que lo define en los siguientes términos: “A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley”. (BOE núm. 106, 2006, p. 17166).

Es competencia del gobierno estatal fijar estos objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada enseñanza para garantizar la formación común de todos los alumnos sea cual sea su ubicación geográfica dentro del territorio español.

El sistema educativo español se presenta como un modelo inclusivo, abierto, flexible, con cierta autonomía para los propios centros educativos, que garantiza una educación común y equitativa y que presta especial atención a la diversidad del alumnado.

En última instancia, la legislación contempla cierta autonomía de los propios centros educativos para concretar el currículo de las materias que componen cada curso. La Ley Orgánica de Educación incluye esta concreción curricular en los artículos 121, 125 y 129 que se reproducen a continuación:

El proyecto educativo del centro recogerá los valores, los objetivos y las prioridades de actuación. Asimismo, incorporará la concreción de los currículos establecidos por la Administración educativa que corresponde fijar y aprobar al Claustro, así como el tratamiento transversal en las áreas, materias o módulos de la educación en valores y otras enseñanzas (BOE núm. 106, 2006, p. 17189).

Los centros educativos elaborarán al principio de cada curso una programación general anual que recoja todos los aspectos relativos a la organización y funcionamiento del centro, incluidos los proyectos, el currículo, las normas, y todos los planes de actuación acordados y aprobados (BOE núm. 106, 2006, p. 17189).

El Claustro de profesores tendrá las siguientes competencias:

b) Aprobar y evaluar la concreción del currículo y todos los aspectos educativos de los proyectos y de la programación general anual. (BOE núm. 106, 2006, pp. 17190-17191).

Así como en la disposición adicional cuarta relativa a la elección de los libros de texto y demás materiales didácticos, según la cual:

Corresponde a los órganos de coordinación didáctica de los centros públicos adoptar los libros de texto y demás materiales que hayan de utilizarse en el desarrollo de las diversas enseñanzas, sin necesidad de la previa autorización de la Administración educativa (BOE núm. 106, 2006, p. 17195).

Por otro lado, una de las principales aportaciones de la LOE respecto de la anterior ley educativa ha sido la incorporación de las competencias básicas, y la organización del currículo en torno a ellas. La competencia matemática se define como:

La habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral (BOE núm. 5, 2007, pp. 686-687).

Queda implícito en la definición de la competencia matemática que el objetivo principal de las matemáticas no es simplemente aprender a sumar, restar, multiplicar o dividir, como no lo es aprender fórmulas en general. La competencia matemática hace referencia a la alfabetización matemática, al dominio del sentido numérico, a aprender a resolver problemas, a aplicar el razonamiento matemático y a adquirir bagaje matemático. Estos conceptos están relacionados con la comprensión real de los números, las operaciones algorítmicas, los procesos y lenguajes matemáticos, y su aplicación a fenómenos de diversa índole en el contexto de la vida real. No basta con conocer los algoritmos, hay que saber razonar, comprender, saber cuándo aplicarlos de forma correcta y hacerlo de forma óptima, adquiriendo el bagaje matemático al que hace referencia la legislación vigente. Si los alumnos no comprenden ni piensan, no habremos enseñado matemáticas. Debemos priorizar siempre la comprensión de significados matemáticos y el razonamiento del proceso antes de proceder con las operaciones algorítmicas propiamente dichas.

Tres son las ideas básicas: comprender y razonar los procesos matemáticos, integrar las distintas materias que componen el currículo y relacionar las matemáticas con situaciones reales de la vida diaria.

3.1.2. Real Decreto 1631/2006 del 29 de diciembre, de Educación

En su Anexo II divide la materia de matemáticas primero por cursos, y después por bloques dentro de cada curso para definir contenidos y criterios de evaluación de cada uno de ellos. Los cursos coinciden con los niveles y años académicos en que se divide la ESO, esto es, primero, segundo, tercero y cuarto. En cuanto a los bloques, no son compartimentos estancos, sino que se organizan de forma que sirven de apoyo y dan respuesta a un bloque común de tratamiento transversal que es el de resolución de problemas. Dicho bloque transversal une y da sentido a la secuenciación del resto de bloques de la materia, utilizando en todos ellos técnicas numéricas, confección de tablas y gráficas, calculadora, medios informáticos y otros recursos y herramientas comunes.

Se presentan a continuación los contenidos y criterios de evaluación incluidos en el Real Decreto 1631/2006 para el bloque de álgebra de 1º de ESO.

Cuadro N° 1. Contenidos y Criterios de evaluación del bloque de álgebra en 1º de ESO, en el Real Decreto 1631/2006.

CONTENIDOS
<p>Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.</p> <p>Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.</p> <p>Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.</p> <p>Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.</p>
CRITERIOS DE EVALUACIÓN
<p>Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.</p> <p>Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.</p>

Nota: Contenidos y Criterios de evaluación del bloque de álgebra en 1º de ESO, en el Real Decreto 1631/2006. Fuente: BOE núm. 5, 2007, p.753).

3.1.3. Proyecto de Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

En el Proyecto de Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) se introducen importantes cambios en la materia de matemáticas, aunque no afectan directamente al currículo del bloque de álgebra de 1º de ESO. Los principales cambios incluidos en la LOMCE que afectan a las matemáticas de secundaria pueden resumirse en:

1. A partir de su entrada en vigor se separan dos ciclos en la educación secundaria obligatoria: un primer ciclo que incluye los cursos 1º, 2º y 3º de la ESO y un segundo ciclo que incluye 4º de ESO y que tendrá un carácter fundamentalmente propedéutico.
2. En el tercer curso de la ESO divide la materia en dos opciones: “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” o “Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas”, cuya elección deja “en función de la regulación y de la programación de la oferta educativa que establezca cada Administración educativa y de la oferta de los centros docentes”. Esto es, los alumnos elegirán entre estas dos materias, pero serán la Administración educativa y los centros los que regulen la oferta formativa de modo que en ocasiones no tendrán opción a elegir.
3. La división de las matemáticas de tercer curso en orientadas a las enseñanzas académicas o aplicadas, responde a la revalorización que propone la LOMCE de la Formación Profesional, de modo que en función de la previsión futura de cada alumno, se oriente la materia de matemáticas en un sentido académico o más práctico.
4. Finalmente, para la obtención del título de graduado en ESO será necesaria la superación de una evaluación final, requisito que no incluía la LOE.

3.2. El currículo de matemáticas en la normativa autonómica de la Generalitat Valenciana

3.2.1. Decreto 112/2007

La normativa autonómica que hace referencia a estos contenidos es el Decreto 112/2007 de 20 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. En los artículos 1 y 2 se reiteran las indicaciones de la LOE que confieren la competencia para concretar el

currículo a las autoridades educativas de cada comunidad autónoma y a los propios centros.

El presente Decreto constituye el desarrollo para la educación secundaria obligatoria de lo dispuesto en el título I, capítulo III, de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, así como en el artículo 6 del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (DOCV núm. 5562, 2007, p. 30404).

Los centros docentes desarrollarán y completarán, en su caso, el currículo de la educación secundaria obligatoria establecido en el presente Decreto y en las normas que lo desarrollen. El resultado de esta concreción formará parte del proyecto educativo del centro (DOCV núm. 5562, 2007, p. 30405).

En cuanto a contenidos, el Decreto 112/2007 reproduce exactamente los anteriormente definidos por el Real Decreto 1631/2006. Si existen cambios en cuanto a los criterios de evaluación, los cuales modifican y amplían respecto a los establecidos en el Real Decreto 1631/2006. De este modo los criterios de evaluación definidos en el Decreto 112/2007 son los que siguen:

Cuadro Nº 2. Criterios de evaluación de matemáticas 1º de ESO, en el Decreto 112/2007.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1. Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado o la resolución de un problema más sencillo; comprobar la solución obtenida.
2. Expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución de un problema.
3. Utilizar los números naturales, los enteros, las fracciones y los decimales, sus operaciones y propiedades para recibir y producir información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.
4. Elegir, al resolver un determinado problema, el tipo de cálculo más adecuado (mental o manual) y dar significado a las operaciones y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado.
5. Calcular el valor de expresiones numéricas sencillas de números enteros, decimales y fraccionarios (basadas en las cuatro operaciones elementales, las potencias de exponente natural y las raíces cuadradas exactas, que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicando correctamente las reglas de prioridad y haciendo un uso adecuado de signos y paréntesis.
6. Utilizar las unidades del sistema métrico decimal para efectuar medidas en actividades relacionadas con la vida cotidiana o en la resolución de problemas.
7. Utilizar las unidades monetarias para las conversiones de monedas.
8. Utilizar los procedimientos básicos de la proporcionalidad numérica (como la

regla de tres o el cálculo de porcentajes) para obtener cantidades proporcionales a otras en la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana.

9. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números; utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.

10. Reconocer y describir los elementos y propiedades característicos de las figuras planas y sus configuraciones geométricas por medio de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real, o en la resolución de problemas geométricos.

11. Emplear las fórmulas adecuadas para obtener longitudes, áreas y ángulos de las figuras planas, en la resolución de problemas geométricos.

12. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.

13. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.

Nota: Criterios de evaluación de matemáticas 1º de ESO, en el Decreto 112/2007. Fuente: DOCV núm. 5562, 2007, pp. 30556-30557).

3.3. Recursos didácticos

La redacción de este apartado se ha basado en la bibliografía consultada de Area (2004), Bartolomé (2004) y Onrubia (2005).

Existen infinidad de recursos didácticos que sirven de instrumento de ayuda para el desarrollo de las programaciones de aula. Los criterios de elección de unos u otros deben responder a cuestiones del tipo:

1. Nivel educativo.
2. Número de alumnos en el aula-grupo.
3. Materia a impartir.
4. Disponibilidad de medios en el centro educativo.
5. Preparación del profesor para utilizarlos.
6. Etc.

Todos los recursos didácticos existentes se podrían clasificar a grandes rasgos en recursos tradicionales y nuevos recursos tecnológicos. En el primer grupo se incluyen libros de texto, pizarras tradicionales, material fungible escolar (libretas, lápices, etc.), laboratorios o las aulas audiovisuales entre otros, mientras que pertenecen al segundo grupo las llamadas Tecnologías de la Información y la

Comunicación (TIC) más propias de la sociedad de la información en que se haya inmersa la educación actual.

Aunque existen infinidad de TIC según el medio en que se desarrollan, sus características y funciones permitidas, pueden ser clasificadas de forma general en tres grandes grupos:

Cuadro N° 3. Clasificación general de las TIC.

Clasificación general de las TIC	Medios audiovisuales	Vídeo, radio, TV, cine, etc.	Visionado de imágenes, audición de sonido.
	Medios informáticos	Ordenadores multimedia, periféricos, software, hardware, cámaras digitales, etc.	Tratamiento de texto, hoja de cálculo, bases de datos, videojuegos, etc.
	Medios telemáticos	Redes, redes de ordenadores, Internet.	Servicios de internet: correo electrónico, chat, videoconferencias, www.

Nota: Clasificación general de las TIC. Fuente: Elaboración propia basada en Area (2004), Bartolomé (2004) y Ministerio de Educación (2003).

En este trabajo cuya finalidad principal es la de presentar una propuesta didáctica para la enseñanza del álgebra, se han analizado brevemente las posibilidades que ofrecen los medios telemáticos, y dentro de estos los llamados servicios de Internet, los que permiten interactuar en el entorno *www* (World Wide Web).

El concepto de trabajo en *www* engloba tanto la tecnología de la generación de contenidos que pueden ser visionados a través de un navegador conectado a Internet como la facilidad de uso de las herramientas de edición de contenidos por parte de los usuarios. Esta nueva metodología didáctica ha supuesto un cambio importantísimo en el uso de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje por parte de los centros educativos y de los propios docentes, tanto para la educación secundaria a la que va dirigida este trabajo, como en el resto de niveles educativos.

Las nuevas herramientas de trabajo necesitan de un ordenador y de una conexión a Internet, y sirven principalmente para comunicarse, generar y publicar contenidos y recuperar información. Entre las principales cabe destacar las que siguen:

Cuadro N° 4. Nuevas herramientas telemáticas para trabajar en el aula.

Para comunicarse	Redes sociales	Ponen en contacto a personas individuales con intereses comunes (ELGG, EduSpaces, Sociedad y Tecnología)
	Microblogging	permite enviar y publicar mensajes breves de solo texto (Twitter)

Para generar y publicar contenidos	Blogs	Permiten el diseño y producción de contenidos hipertextuales por uno o varios autores y lo clasifica cronológicamente. Los alumnos pueden interactuar y construir sus propios aprendizajes (Blogger, Wordpress).
	Wikis	Creación de conocimiento conjunto. A pesar de que los blogs también trabajan en un entorno colaborativo, los wikis son una herramienta más adecuada para la participación de un número elevado de editores (Wikispaces, Wikipedia).
	Plataformas educativas	Disponen de todo tipo de herramientas, incluyendo las colaborativas (Moodle, Blackboard, Helvia).
	Comunidades Virtuales	Pueden emplearse únicamente para mantener un contacto entre los miembros o para generar contenido de forma colectiva. Ventajas: pertenencia delimitada, identidad de grupo e intereses compartidos (Edutec, Educared, Averroes, Google groups). El principal inconveniente reside en la dificultad para su organización interna.
Para recuperar información	Etiquetas (folcsonomía)	Clasificación colaborativa por medio de etiquetas simples en que los usuarios comparten las categorizaciones.
	Suscripción (sindicación)	Permite comunicar información a cualquiera que esté interesado en un tema determinado (Syndic8).

Nota: Nuevas herramientas telemáticas para trabajar en el aula. Fuente: Elaboración propia.

Los recursos didácticos son un elemento importante del currículo. La metodología de enseñanza y aprendizaje que pone en práctica cada profesor viene definida por los recursos que utiliza en el aula. Estos recursos son los que permiten que los conceptos se transmitan de una manera más clara y accesible para el alumnado, proporcionando un aprendizaje variado y fomentando el interés y la motivación.

En la propuesta didáctica que queda redactada más adelante, se ha optado por la creación de un espacio Wiki para la asignatura de matemáticas en la que trabajarán y aportarán contenido y conocimientos tanto el profesor como los alumnos del grupo-aula. De este modo, además de trabajar de forma individual o en grupo según la programación de aula, los alumnos adquirirán destrezas y habilidades propias de la competencia básica relacionada con el tratamiento de la información y la competencia digital.

3.4. Dificultades en el aprendizaje del álgebra

La redacción de este apartado se ha basado principalmente en los trabajos y aportaciones de Ortiz (2004) y Skemp (1998), aunque también se han incluido otros como los de Ruano, Socas y Palaera (2008), Kieran y Yagüe (1989), Vergnaud y Cortés (1986) y varias publicaciones de Filloy o Rojano.

Relacionadas con las dificultades en el aprendizaje del álgebra, han ido instaurándose una serie de creencias generalizadas entre alumnos de 1º de ESO, entre las que cabe destacar:

1. Una ecuación se identifica con el procedimiento que se debe realizar para resolverla.
2. Averiguar si un número dado es solución de una ecuación dada, consiste en comparar el valor dado con el obtenido al resolver la ecuación, en lugar de reemplazar dicho valor en la ecuación.
3. Que se empleen letras en matemáticas, no tiene ningún uso específico, se emplean simplemente para dotarlas de una mayor complejidad, haciéndolas más incomprensibles.
4. Crear una ecuación que tenga como solución el número 2, es una expresión del tipo $ax + b = 2$, mezclando el concepto solución con el resultado escrito a la derecha del igual.

La primera de estas creencias hace referencia a que los estudiantes aprenden un método para resolver ecuaciones que siguen secuencialmente, y no son capaces de improvisar o aplicar el mismo método en otro orden. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$7(x + 3) = 5 - x$$

podemos seguir distintos caminos, pero el estudiante solo reconoce uno de ellos, el que queda remarcado en el siguiente cuadro:

Cuadro N° 5. Ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado.

Método genérico aprendido en el aula	2ª opción (operar con fracciones)	3ª opción (construir ecuaciones equivalentes)
Quitar paréntesis $7x + 21 = 5 - x$	$x + 3 = \frac{5 - x}{7}$	$7x + 21 = 5 - x$
Términos con x a un miembro y los términos sin x al otro $7x + x = 5 - 21$	$x + 3 = \frac{5}{7} - \frac{x}{7}$	$7x + 21 - 21 = 5 - x - 21$
Agrupar $8x = -16$	$x + \frac{x}{7} = \frac{5}{7} - 3$	$7x = -x - 16$
Despejar x $x = -16/8$	$7x + x = 5 - 21$	$7x + x = -x - 16 + x$

$x = -2$	$8x = -16$ $x = -16/8$ $x = -2$	$8x = -16$ $x = -16/8$ $x = -2$
----------	---------------------------------------	---------------------------------------

Nota: Ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado. Fuente: Elaboración propia.

Entonces, el alumno no ha aprendido a razonar y resolver ecuaciones, sino que ha sido instruido en un método al cual debe ceñirse para lograr resolver la ecuación (Vergnaud y Cortés, 1986).

Por otro lado también es cierto que el razonamiento se aprende con el bagaje matemático, en la medida que el estudiante pone en práctica sus conocimientos y resuelve más y más ecuaciones. Es de este modo como surgen ideas, alternativas, asociaciones con hechos conocidos, y en definitiva, confiere seguridad al estudiante en su trabajo.

Después de aprender a resolver ecuaciones y practicar con infinidad de actividades de la unidad didáctica, de refuerzo y de ampliación, ante un enunciado del tipo “comprueba si 8 es solución de la ecuación $24 - x = 16$ ” los alumnos se quedan totalmente bloqueados. Esta es la segunda de las creencias. No asocian que el enunciado está indicando que 8 es una posible solución de la ecuación. Los alumnos que se aventuren a resolver la actividad, procederán primeramente resolviendo la ecuación por el método descrito en el punto anterior (eliminar paréntesis, pasar los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, agrupar, despejar x), y si el resultado coincide con 8 darán por válido el enunciado de la actividad. Esto es, no se les ocurre sustituir x por el valor dado y comprobar si se cumple la igualdad $24 - 8 = 16$.

La tercera de las creencias entre alumnos en que coinciden la mayoría de los investigadores, hace referencia al sentido del álgebra, y es que aunque aprendan un método más o menos mecánico para resolver ecuaciones, no ven la utilidad del álgebra. No son capaces todavía en este nivel de enseñanza de abstraer y relativizar, de entender que lo que están aprendiendo en este momento son las claves básicas de un lenguaje nuevo y las normas para su uso y que todavía no se puede vislumbrar la necesidad real del empleo del álgebra. Por todo ello, el álgebra se presenta ante sus ojos como una traba matemática creada con tal propósito, para dificultar la resolución de operaciones aritméticas sencillas.

La cuarta creencia establecida entre estudiantes de secundaria está íntimamente ligada a la segunda. Y es que resolver una ecuación es para ellos seguir un método, y no entienden otra posibilidad. Es por ello que no tienen imaginación para elaborar una ecuación de creación propia en que la solución sea 2, porque, por la misma razón vista en el punto 2, no se les ocurre crear un algoritmo sencillo en

que intervenga el 2 (por ejemplo $7 \cdot 2 + 5 = 19$) y sustituirlo más tarde por la x ($7x + 5 = 19$).

En definitiva estas y otras creencias, ya instauradas de forma generalizada entre los alumnos de secundaria, provocan cierta animadversión hacia el álgebra que deriva en una serie de dificultades y obstáculos que retrasan la asimilación de estos contenidos específicos y que les complican la tarea de establecer relaciones cognitivas entre nuevos conceptos y los ya conocidos.

Los procesos que intervienen en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra en particular han preocupado mucho a la comunidad educativa siempre, pero es en los últimos años cuando han proliferado las investigaciones acerca de las causas que dificultan dicho aprendizaje. Si bien es cierto que las dificultades de aprendizaje en otros ámbitos (lectura, escritura, comprensión, etc.) han sido motivo de investigación desde hace muchísimo tiempo, las dificultades específicas en el aprendizaje de las matemáticas, y por consiguiente del álgebra, no han tenido especial cabida dentro de la comunidad científica hasta hace unos escasos 25 años. Es con los trabajos de Bauersfeld y Skowronek (1976), Kieran y Filloy Yagüe (1989), Vergnaud y Cortés (1986), etc., cuando ha alcanzado la importancia suficiente como para que se lleven a cabo investigaciones al respecto con la finalidad de eliminar o minimizar dichas dificultades.

Hoy todas las universidades nacionales e internacionales incluyen una línea de investigación matemática específica para el álgebra. Universidades como la de Santiago de Compostela, Murcia, Granada, País Vasco, etc. cuentan con grupos de investigación específicos para el álgebra, y se organizan congresos de forma periódica donde se exponen los resultados alcanzados. Con los primeros trabajos de hace 25 años en investigación matemática fueron conscientes de que había que abordar el tema dividiéndolo en partes, estudiando los procesos de aprendizaje específicos de un contenido.

Encontramos numerosas aportaciones al campo de las matemáticas que han estudiado su marco de referencia, las variables y expresiones que intervienen, la resolución de ecuaciones, las funciones y gráficas que las representan, etc. Pero el tema principal de las últimas investigaciones reside en la resolución de problemas. Numerosas investigaciones llevadas a cabo en el marco del *Internacional Group of the Psychology of Mathematics Education* (PME) han clasificado el modo en que los estudiantes enfocan la resolución de ecuaciones en tres tipos:

- a. Intuitivo.
- b. Sustitución por tanteo.

c. Formal.

Los métodos intuitivo y de sustitución por tanteo son los primeros acercamientos que hacen los estudiantes a la resolución de problemas, pero el aprendizaje del último, el método formal, elimina en muchos casos los dos anteriores, que hubiesen resultado su primera elección en ecuaciones más sencillas, pero que ya no ven como posible o correcto tras la instrucción en el método formal. Como explican muchos investigadores, para resolver una ecuación del tipo $7 + x = 10$ por intuición o tanteo, el estudiante llega a la conclusión de que x sólo puede ser igual a 3, porque no hay otro número que al sumarlo a 7 dé como resultado 10. Pero esta primera intuición se pierde con el aprendizaje del método llamado formal, mediante el cual solo podremos conocer el valor de x si despejamos la incógnita de la ecuación:

$$x = 10 - 7$$

$$x = 3$$

y no ven posible otra forma de resolver la ecuación. Este hecho resulta contraproducente en cuanto que reduce o elimina el razonamiento matemático. Y es que en muchas ocasiones se pierde de vista que las matemáticas no son únicamente un conjunto de algoritmos y métodos que hay que seguir de forma secuenciada, sino que son primera y principalmente una ciencia creativa, en continuo movimiento, y que se basa más en el razonamiento matemático que en la aplicación de fórmulas.

Skemp (1998) en su *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* señala otra de las dificultades principales que se ha tenido en cuenta para la realización del trabajo de campo posterior: la falta de habilidad en operaciones aritméticas. A los estudiantes de secundaria se les presuponen unos conocimientos previos, conocidos, adquiridos y superados, pero la realidad es que cuando llegan a secundaria se desconoce la trayectoria previa de cada uno de los estudiantes en primaria. En la mayoría de casos, no se conocen siquiera los estudiantes entre sí. El nivel adquirido por cada uno de ellos en etapas educativas previas es al menos distinto en cada caso, y la labor del docente consiste no solo en conocer cuál es, sino en adaptar su didáctica a todo el grupo (atención a la diversidad).

Para realizar cálculos sencillos en álgebra, con ecuaciones de primer grado, son necesarias ciertas habilidades previas en operaciones con números enteros, fraccionarios, potencias, operaciones combinadas con paréntesis, etc.

Skemp (1998) asocia las ecuaciones a igualdades existentes en la vida diaria. Y lo hace con ejemplos sencillos parecidos a estos:

- a. El primer día de la semana es lunes.
- b. La estación del año en que hace frío es invierno.
- c. El precio del pantalón es superior al de la corbata.

Lo que pretende indicar con ello es que el uso del signo “=” en matemáticas es muy habitual en la vida cotidiana, aunque no se es consciente de ello. En los enunciados de los ejemplos, el “es” es ampliado en matemáticas a un “es igual a”, pero no deja de tener el mismo significado.

En el caso de ecuaciones con variables, tales como $6x - 3 = 7 + x$, no podemos decir si son verdaderas o falsas, puesto que no sabemos qué número representa x . Resolver una ecuación significa hallar todos los valores de x para los cuales la ecuación es un enunciado verdadero. (Skemp, 1998, p.250).

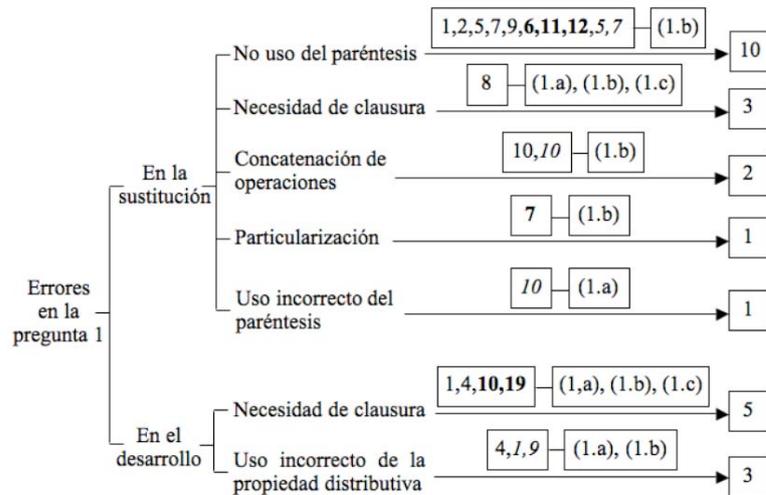
Del mismo modo, empleando el símil del lenguaje habitual, nos describe la resolución de ecuaciones mediante la construcción de otras equivalentes. Skemp (1998) nos hace notar la similitud entre “es equivalente a” e “implica y es consecuencia de” con ejemplos del tipo:

$$\text{Pasado mañana} = \text{Domingo} \Leftrightarrow \text{Hoy} = \text{Viernes}$$

donde nos hace ver la equivalencia entre dos ecuaciones con la finalidad de intentar resolver siempre la más sencilla con el mismo resultado.

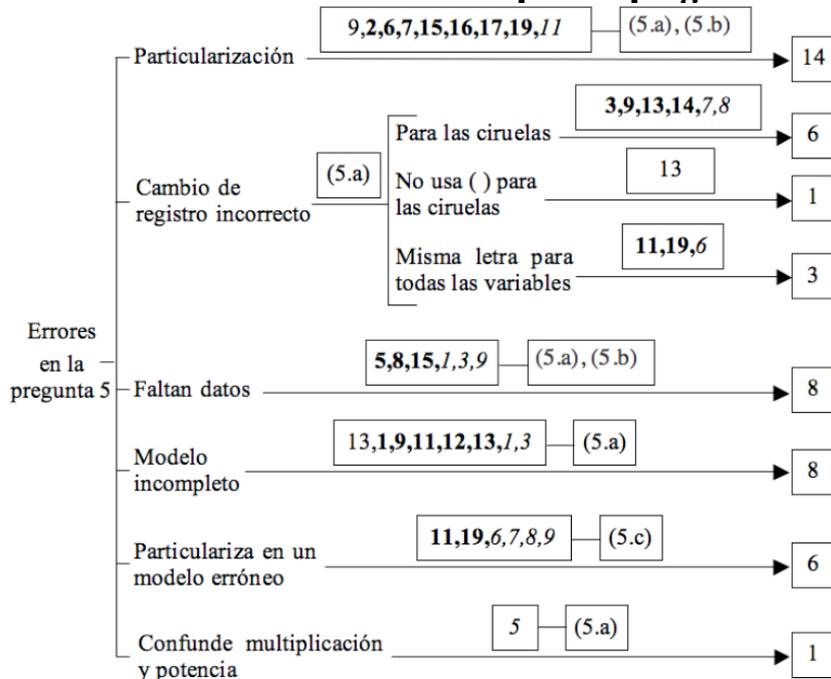
$$x + x + \frac{1}{2}x = 120 \Leftrightarrow 2x + 2x + x = 240$$

A partir de las investigaciones que han seguido a estos trabajos, han surgido diversos intentos de clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo de los últimos trabajos destacados es el de Ruano (2008), en que se analizan y clasifican los errores cometidos por 120 alumnos sometidos a una prueba algebraica. La clasificación que vemos a continuación responde a los 17 errores concretos (de 120 alumnos) cometidos en la sustitución de una expresión algebraica por otra más compleja, y a los 8 errores cometidos en el desarrollo de dichas expresiones.

Cuadro N° 6. Organización de los errores en la pregunta 1.

Nota: Organización de los errores en la pregunta 1. Fuente: Ruano (2008).

En el mismo trabajo otro ejemplo es la clasificación de errores cometidos (47 en total) en una pregunta específica consistente en la resolución de un problema mediante el uso de expresiones algebraicas.

Cuadro N° 7. Análisis de errores para la pregunta 5.

Nota: Análisis de errores para la pregunta 5. Fuente: Ruano (2008).

Con la revisión bibliográfica de este y muchos otros trabajos de investigación, se ha constatado, entre otras cosas, la presencia de numerosos errores en el

aprendizaje de álgebra. La mayoría de ellos apuntan a errores y dificultades propios del contenido o de los procesos, aunque otras se han mostrado independientes de los mismos y responden a “la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia” como los ha llamado Ruano (2008, p. 72) en su trabajo.

También Ortiz (2004), en su *Manual de dificultades de aprendizaje* dedica un apartado especial a cuál debe ser la intervención psicopedagógica para abordarlas. Explica que deben establecerse subtipos de DAM en función de su rendimiento en tareas visoespaciales o lingüísticas, esto es, si la dificultad es propia del conocimiento matemático o deriva de dificultades en el lenguaje o la lectura. Además también indica la importancia de secuenciar los objetivos de la intervención, de los procesos cognitivos propios del individuo y que tienen que ver con el almacenamiento que este hace en su memoria y con las asociaciones que se establecen entre distintos almacenamientos, y por último apuesta por un aprendizaje significativo, basado en el aprendizaje de estrategias para resolver problemas.

¿De qué modo se podrían resumir y clasificar pues las dificultades en el aprendizaje del álgebra? No existe una única forma, completa y correcta, sino que existen infinidad de modos de clasificación, tantos como dificultades podemos encontrar en el aprendizaje del álgebra, y todas son válidas según cual sea el criterio adoptado para su clasificación.

Para el trabajo de campo posterior, finalmente se han clasificado cuatro tipos generales de dificultades en el aprendizaje de álgebra.

- a. Dificultades derivadas de conocimientos previos débilmente consolidados.
- b. Dificultades derivadas de otras dificultades más propias del lenguaje o la comprensión lectora.
- c. Dificultades propias del aprendizaje de conceptos matemáticos en general y algebraicos en particular.
- d. Dificultad para establecer asociaciones entre conceptos que van siendo almacenados en la memoria del alumno.

3.5. Aprendizaje cooperativo

La introducción de la escuela inclusiva desde la entrada en vigor de la LOE necesita de una redefinición del concepto tradicional de escuela en todos sus ámbitos para dar respuesta a la diversidad de sus aulas. Uno de los aspectos principales que se ha convertido en tema de investigación es la metodología empleada en el proceso de enseñanza. Lejos queda ya el tiempo en que la definición de enseñanza iba asociada invariablemente a una metodología tradicional basada en la transmisión de conceptos por parte de un emisor (docente) a uno o varios receptores pasivos (alumnos). Incluso ha cambiado la creencia sobre los procesos cognitivos propios de cada alumno relacionados con el aprendizaje.

Es importante señalar en este punto el trabajo llevado a cabo por Matropieri, Scruggs y Shiah (1991) que demuestra la eficacia de la introducción de nuevas metodologías en el aprendizaje específico de las matemáticas. Su trabajo consistió en recopilar investigaciones de otros autores validadas por la práctica que constatasen la eficacia de la introducción de nuevas técnicas en la enseñanza de las matemáticas. Encontraron una serie de coincidencias en todos aquellos trabajos que presentaban técnicas que demostraban experimentalmente su eficacia frente a la metodología tradicional. Se enumeran a continuación sus conclusiones respecto a qué rasgos debe incluir una metodología de enseñanza en matemáticas para ser eficaz:

1. Implementar procedimientos que incluyen demostración, modelado y retroalimentación.
2. Proporcionar refuerzos para llegar a ser experto.
3. Usar una secuencia de enseñanza que vaya de lo concreto a lo abstracto.
4. Contextualizar las metas.
5. Combinar demostración con un modelo permanente.
6. Usar verbalizaciones durante la resolución de problemas.
7. Enseñar estrategias de cálculo y de resolución de problemas.
8. Usar sistemas de presentación alternativos, por ejemplo ordenadores o que participen los propios compañeros.

Pero, ¿cuáles son, desde el punto de vista psicopedagógico, las teorías que justifican la eficacia del aprendizaje cooperativo? Basándonos en los trabajos de Coll y otros (1991), Jonhson y Jonhson (1999), Johnson y otros (1999), Duran y Vidal (2004), Papalia (1988) y Pujolàs (2004) citados en Torrego y Negro (2012) se ha

elaborado el siguiente cuadro para resumir las teorías que justifican los principios de esta nueva escuela, la del aprendizaje cooperativo.

Cuadro N° 8. Teorías que justifican la eficacia del aprendizaje cooperativo.

Teoría genética de Piaget
<p>El alumno actúa como sujeto activo y conoce el mundo actuando sobre él. El desarrollo del alumno consiste en la construcción de su estructura intelectual según el proceso:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La estructura cognitiva existente se abre para incorporar nueva información. ▪ La nueva información crea desequilibrio entre el esquema disponible y el propio conocimiento. ▪ El sistema cognitivo modifica y regula el esquema previo para incorporar la nueva información y lograr de nuevo el equilibrio. <p>El aprendizaje cooperativo fomenta el aprendizaje del alumno en cuanto que genera conflictos sociocognitivos con facilidad.</p>
Teoría sociocultural
<p>El desarrollo psicológico del individuo es el resultado de su interacción constante con el contexto histórico en que vive. La educación entendida en un sentido amplio, no únicamente la que proporciona el sistema educativo en alumnos dentro de la edad escolar, es la principal responsable del desarrollo humano.</p> <p>El aprendizaje cooperativo establece múltiples canales de interacción social en el grupo.</p>
Teoría de la interdependencia social
<p>La interdependencia entre los miembros de un equipo determina la manera en que los individuos interactúan y de ello dependen los resultados que el grupo obtiene de la tarea. Tres tipos de interdependencia: positiva (cooperación), negativa (competencia), ausencia de interdependencia (esfuerzos individualistas). Es en el primer tipo donde se hace necesaria la colaboración de todos para alcanzar el objetivo y son los mismos miembros del equipo los que estimulan y facilitan el esfuerzo de los otros por aprender. Uno alcanza su objetivo si, y sólo si, los otros logran el suyo.</p> <p>En el aprendizaje cooperativo los alumnos trabajan juntos buscando un objetivo común.</p> <p>Esta teoría también señala que la interdependencia positiva favorece:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La responsabilidad individual y grupal. ▪ Las interacciones personales para lograr la meta del grupo. ▪ Democratización de oportunidades de éxito. ▪ Desarrollo de habilidades sociales.
Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel
<p>Un aprendizaje es significativo cuando la nueva información se relaciona de manera no arbitraria y dotándose de significado con los conocimientos previos de la persona que aprende.</p>
Teoría de las inteligencias múltiples de Gardner
<p>Considera ocho inteligencias distintas con características y evolución propias. Según esta teoría el aprendizaje cooperativo asegura el desarrollo de más tipos de inteligencias que un aprendizaje convencional, creando condiciones necesarias para estimular dicho desarrollo.</p>
Psicología humanista de Rogers

Basada en los conceptos del yo individual y las necesidades básicas (pirámide de Maslow), asegura que el aprendizaje cooperativo permite el surgimiento del yo auténtico al favorecer la motivación y las necesidades básicas de reconocimiento, afecto, valoración y estima.

Nota: Teorías que justifican la eficacia del aprendizaje cooperativo. Fuente: Elaboración propia basada en Torrego y Negro (2012).

Según los autores arriba mencionados, éstas son algunas de las teorías que justificarían la necesidad del aprendizaje cooperativo para que el aprendizaje sea efectivamente de calidad y para que considere todos los aspectos del ser humano.

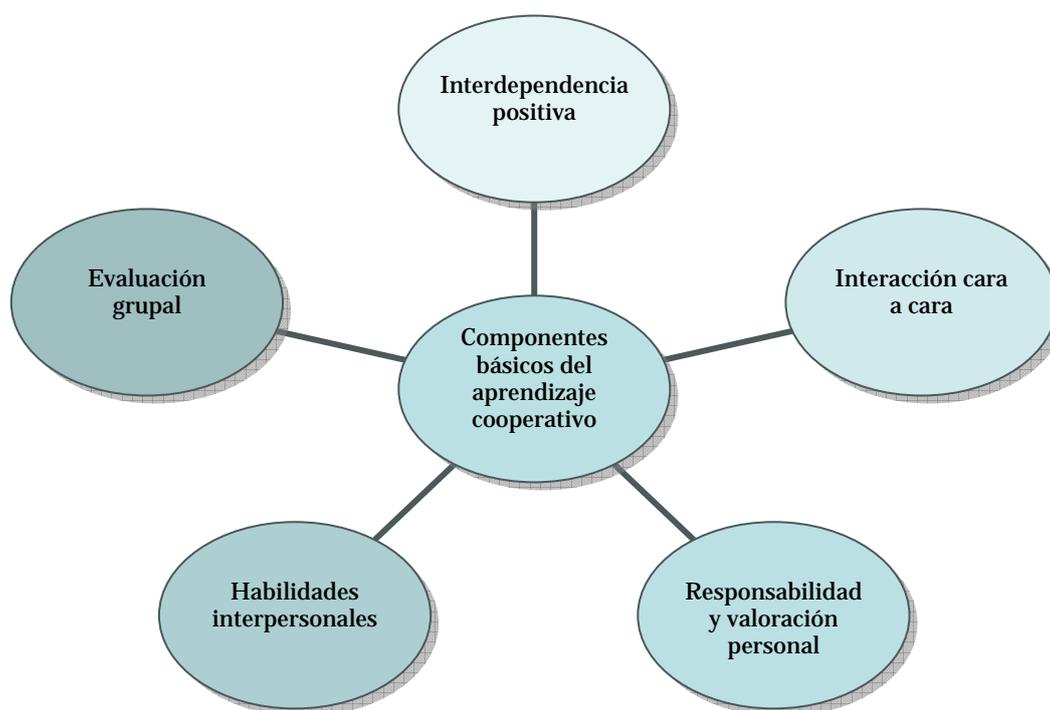
Por otro lado la teoría constructivista de la enseñanza, más propia de la sociedad actual, introduce el término de aprendizaje significativo y señala que son los alumnos los que deben recorrer el proceso de construcción de su propio aprendizaje. Según Pérez Alarcón (2010) la calidad educativa que proporciona un centro se encuentra relacionada con la capacidad del mismo para dar respuesta a la diversidad de alumnos que atiende, y esto exige inevitablemente dar respuesta a necesidades diferentes. Señala igualmente la relevancia del aprendizaje en grupo para que la construcción del conocimiento no parta únicamente del educador y tenga en cuenta la aportación de los alumnos, incidiendo sobre la pertenencia de estos alumnos a una sociedad que demanda cada vez más habilidades sociales y comunicativas, participación y convivencia en un futuro entorno profesional. Apoyando la misma teoría Torrego y Negro (2012) señalan que no hay mejor método para que los alumnos aprendan a aceptar la diversidad, a respetarla y a ayudar a los demás, que implicándolos en actividades conjuntas significativas, trabajando de forma cooperativa.

El aprendizaje cooperativo se encuentra por tanto ligado a la globalización y difiere de sociedad de los siglos XIX y XX en que ésta demandaba especialización de los individuos que la componían, mientras que la sociedad del siglo XXI apuesta por la heterogeneidad de equipos multidisciplinares para acometer conjuntamente proyectos profesionales de cualquier índole.

Es imprescindible enseñar los valores y las estrategias que permitan acrecentar esta capacidad de trabajar con otros de forma interdependiente y con fines positivos, pues resultarán determinantes para la inserción satisfactoria de nuestros jóvenes en la dinámica y cambiante sociedad que les tocará vivir (Torrego y Negro, 2012, p.22).

Pérez Alarcón (2010) define además la diferencia entre trabajar en grupo y trabajar en equipo. El primer término responde más a una división del trabajo inicial y unión posterior de diferentes partes de elaboración individual para dar un resultado único, mientras que el segundo término lleva implícitas características de

heterogeneidad, sentido de pertenencia, estabilidad, organización e interdependencia para que resulte funcional.



Esquema N° 1. Componentes básicos del aprendizaje cooperativo. Fuente: Elaboración propia basada en Johnson, Johnson y Holubec (1999).

Nuevas metodologías de trabajo en el aula demandan a su vez un nuevo papel de los docentes, puesto que la responsabilidad del aprendizaje de los alumnos ya no reside únicamente en los profesores como ocurría en la metodología tradicional, sino que al tratarse de nuevas metodologías en que los alumnos son parte activa en la construcción de su propio conocimiento, la responsabilidad es compartida por ambos. De este modo el profesor se convierte en un mediador del proceso, pero no de forma pasiva, sino que interviene conduciendo y motivando a los alumnos, mediando entre los contenidos y la actividad constructivista de los alumnos y seleccionando estímulos y refuerzos convenientes según la actividad.

En cuanto a los tipos de grupos en el aprendizaje cooperativo dentro del aula, Johnson, Johnson y Holubec (1999) distinguen tres.

Cuadro N° 9. Tipos de grupos en el aprendizaje cooperativo.

TIPOS DE GRUPOS	
Formal	Son estables en el tiempo (varias sesiones o un proyecto completo) y esto permite que los alumnos se involucren de forma activa organizando material, resolviendo actividades, comprobando soluciones y evaluando su propio proceso.

Informal	Son de corta duración (a veces minutos) y sirven mantener alerta la atención y motivación dentro del aula.
Grupos de base	Son de mayor duración que los anteriores (generalmente un trimestre) y con miembros estables. Su objetivo es que los alumnos se ofrezcan apoyo y ayuda entre sí, ofreciendo relaciones comprometidas a largo plazo.

Nota: Tipos de grupos en el aprendizaje cooperativo. Fuente: Elaboración propia basada en Johnson, Johnson y Holubec (1999).

La disposición de mesas y alumnos en el aula también variará de la propia al tipo de enseñanza tradicional. Para facilitar el aprendizaje cooperativo es más conveniente disponer las mesas en círculos de trabajo con roles complementarios interconectados y rotativos. La disposición del aula debe tener en cuenta, entre otros, que los miembros de un mismo grupo deben sentarse juntos, que todos los alumnos deben poder ver sin esfuerzo al profesor, que los grupos deben estar lo suficientemente separados como para no interferir el trabajo de unos con otros y que permita el intercambio entre la composición de los grupos con rapidez.

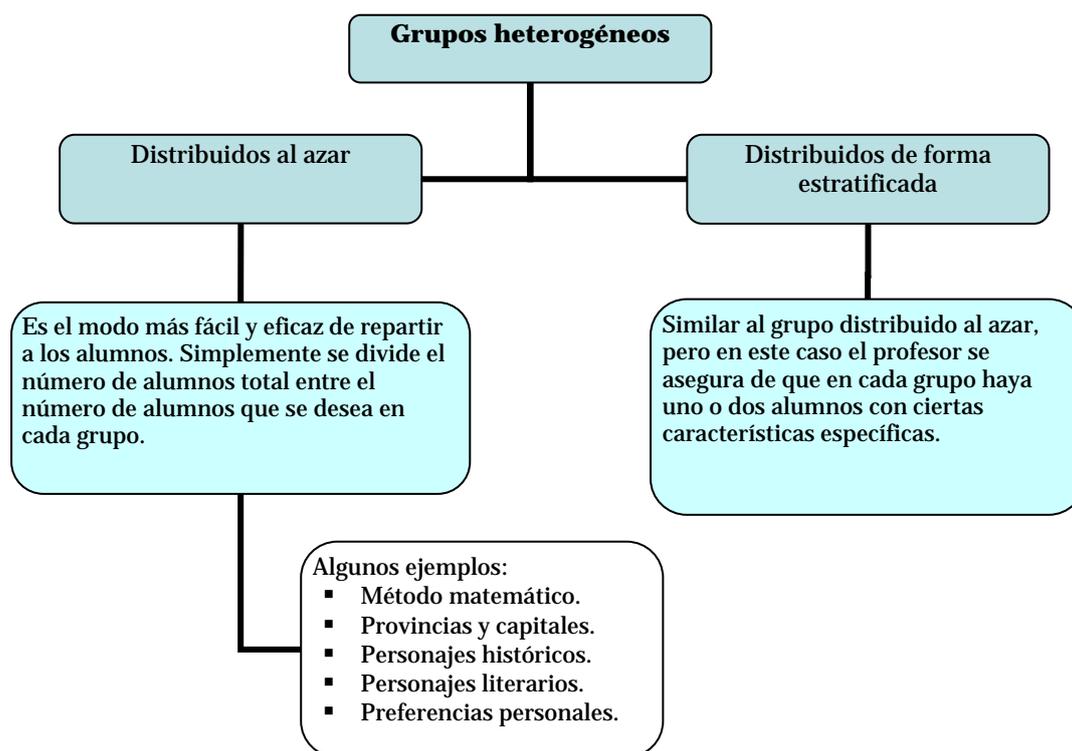
Los miembros de un equipo pueden alternar los roles establecidos para cada uno de ellos en función de la actividad a desarrollar y del tamaño del grupo. Es el docente el que debe presentar los roles apropiados a los alumnos según la situación de aprendizaje, aunque sean los propios alumnos los que distribuyan estos roles entre los miembros del equipo. Existen infinidad de roles adaptables a cada situación. De este modo los alumnos pueden ejercer el papel de compendiador (resume principales conclusiones e ideas del grupo), inspector (asegura la participación e intervención de todo el equipo), entrenador (corrige los errores en las explicaciones de otros), investigador (consigue materiales, se comunica con otros grupos y con el profesor), animador (refuerza las contribuciones del resto del equipo), etc.

La programación de aula en un aprendizaje cooperativo debe incluir los materiales didácticos necesarios igual que lo haría en un aprendizaje competitivo o en otro individualista. Aunque básicamente los materiales son los mismos, hay ciertas variaciones en el modo de distribuirlos que pueden incrementar la cooperación entre los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1999). La opción de dar un solo folio y un solo bolígrafo al equipo, puede hacer que piensen juntos y detenidamente qué deben anotar.

En esta misma programación de aula, el docente debe tomar ciertas decisiones previas referidas a cuántos miembros deben componer el grupo de aprendizaje, cómo se distribuirán los alumnos en los distintos grupos o cuánto tiempo durará el grupo. En cuanto al número de miembros por equipo en el aprendizaje cooperativo es conveniente que los grupos sean pequeños, que estén

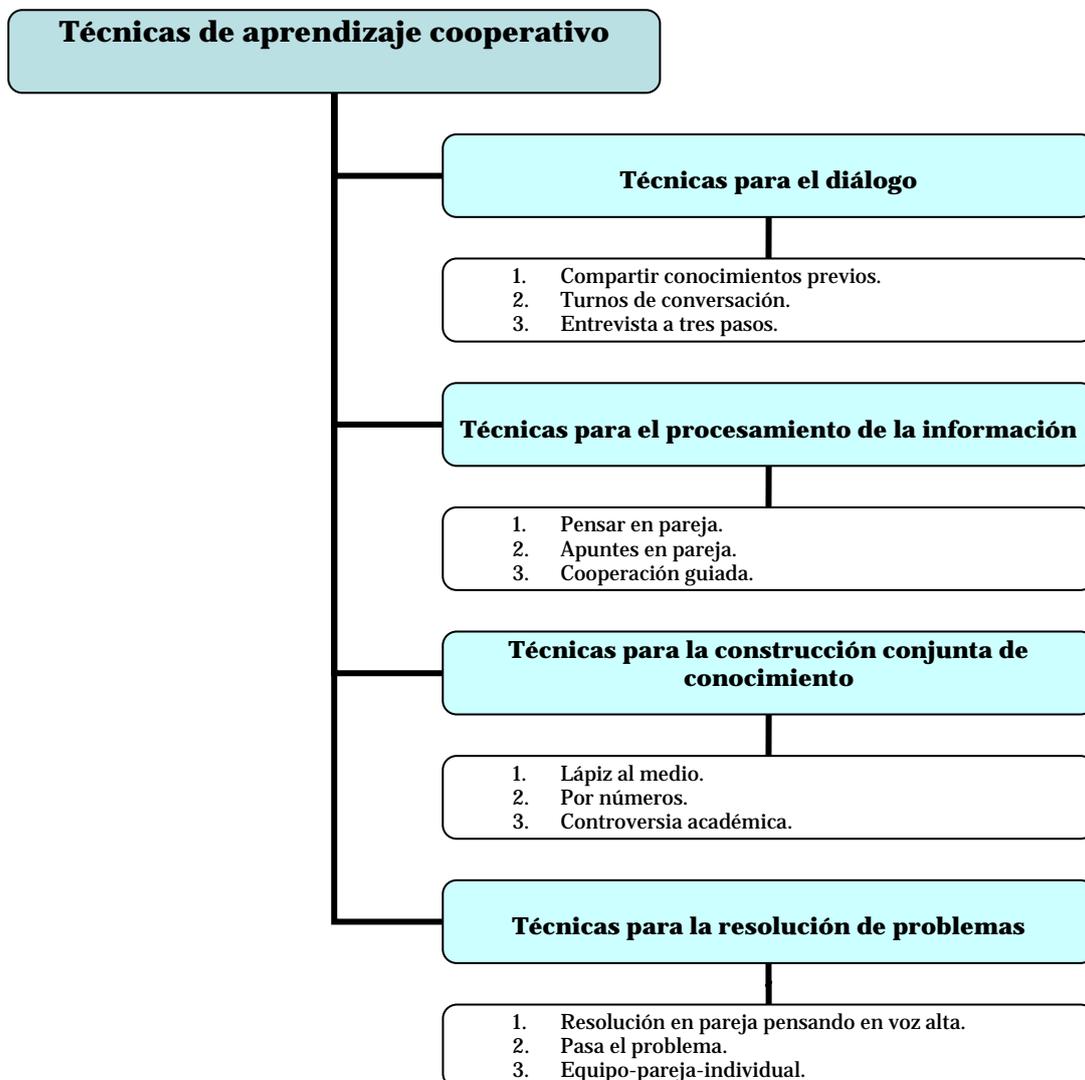
formados por parejas de alumnos o por seis alumnos máximo, pero no existe ninguna regla al respecto. Deberá ser el docente el que sopesa las ventajas e inconvenientes de variar el tamaño de los grupos. En este sentido Johnson, Johnson y Holubec (1999) apuntan algunas ideas a tener en cuenta, como que al aumentar el número de miembros de un grupo de aprendizaje también se amplían las destrezas y capacidades del conjunto pero disminuyen las interacciones personales y la cohesión del grupo.

Para la distribución de alumnos en grupos se debe decidir primeramente si los grupos van a ser homogéneos o heterogéneos. Aunque en momentos puntuales sea conveniente formar grupos homogéneos, por lo general son preferibles los grupos heterogéneos en cuanto que producen mayor desequilibrio cognitivo, necesario para estimular el aprendizaje como se ha visto anteriormente en las teorías que justifican la eficacia del aprendizaje cooperativo. A su vez los grupos heterogéneos pueden distribuirse al azar o de forma estratificada como vemos en algunos ejemplos del esquema que sigue.



Esquema N° 2. Distribución de alumnos en grupos heterogéneos. Fuente: Elaboración propia basada en Johnson, Johnson y Holubec (1999).

Por último, la búsqueda de técnicas concretas para aplicar el aprendizaje cooperativo en las aulas arroja numerosos y variados resultados. Cada investigador aporta su punto de vista particular y su experiencia para elaborar una serie de técnicas aplicables en el aula. Por citar algunos ejemplos, Torrego y Negro (2012) presentan una selección de técnicas sencillas que no vamos a desarrollar en este trabajo puesto que no es su objetivo, pero que enumeraremos a título informativo. Al mismo tiempo todas las técnicas que presentamos no son propias de Torrego y Negro, sino que han sido recopiladas por ellos y expuestas en su trabajo *Aprendizaje cooperativo en las aulas* (Torrego y Negro, 2012) para sintetizar brevemente cuáles son los principales tipos de técnicas utilizadas. Estas técnicas que enumeramos a continuación son originarias de Silberman, Kagan, Lyman, Johnson, O'Donnell o Cuseo entre otros.



Esquema N° 3. Algunas técnicas de aprendizaje cooperativo. Fuente: Elaboración propia basada en Torrego y Negro (2012, pp.155-163).

4. Estudio de campo

4.1. Planteamiento

Ya se ha visto en puntos anteriores el análisis de bibliografía existente llevado a cabo en cuanto a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, por lo que nos centraremos ahora en el aspecto propiamente empírico del presente trabajo.

Se ha elaborado un cuestionario sencillo (Anexo N° 1), con respuestas cerradas y otras abiertas, con la intención de evaluar la opinión de los docentes de matemáticas en secundaria. De este modo se analizará la relación entre investigaciones acerca de las dificultades de aprendizaje y la percepción real de los docentes en las aulas de secundaria.

La técnica de recogida de datos elegida, el cuestionario, responde a motivos de fácil gestión posterior de los resultados obtenidos, aunque en el momento de su elaboración se ha tenido especial cuidado en contemplar todas las alternativas posibles y previsibles, e incluir todos los aspectos importantes que se pretende investigar. Por otro lado se ha elaborado un cuestionario corto, atractivo y sin preguntas embarazosas para facilitar su respuesta y la colaboración de los docentes.

El cuestionario se ha remitido a un total de 50 profesores de matemáticas de secundaria que se encuentran actualmente en activo en centros públicos, privados y concertados de la Comunidad Valenciana. Aunque el cuestionario se ha planteado con preguntas cerradas, se ha dejado alguna posibilidad abierta para contar con aportaciones valiosas desde su experiencia.

La elección de la muestra para la parte empírica del presente trabajo, trata de ser lo más heterogénea posible y obedece a distintos criterios, entre los cuales cabe enumerar:

- a. Proximidad geográfica (abarca un radio de aproximadamente 50km).
- b. Carácter del centro: público, privado o concertado, de modo que queden reflejados todos ellos en la muestra.
- c. Distintos tipos de poblaciones (de carácter industrial, de ámbito rural, con distinto número de habitantes, etc.).
- d. Centros educativos que imparten educación secundaria.

En cada caso se ha contactado primero telefónicamente con el Jefe de Estudios y después se han realizado visitas previamente concertadas para recabar

información de todos los profesores de matemáticas con que cuentan los centros educativos de Xátiva, Aielo de Malferit, Ontinyent y Bocairent (Valencia), hasta completar un total de 50 cuestionarios.

En la elaboración del cuestionario se han tenido en cuenta dos partes diferenciadas. Una primera parte con datos generales a rellenar para facilitar la gestión de la información posterior, su clasificación y elaboración de estadísticas. Y una segunda parte con preguntas específicas relativas las dificultades de aprendizaje del álgebra en secundaria más orientadas a la redacción de la propuesta didáctica objeto del trabajo.

En cuanto a la segunda parte del cuestionario, encontramos un primer ítem en que se analiza la existencia en cada aula particular de dificultades en el aprendizaje del álgebra, ofreciendo un total de 10 posibilidades:

Cuadro N° 10. Dificultades en el aprendizaje del álgebra.

A	Falta de habilidad en operaciones con números enteros.	
B	Falta de habilidad en operaciones con potencias.	
C	Falta de habilidad en operaciones con fracciones.	
D	Falta de habilidad en operaciones combinadas con paréntesis.	
E	Comprensión del concepto de igualdad.	
F	Comprensión del resultado de la ecuación.	
G	Dificultad para interpretar enunciados verbales.	
H	Dificultad para identificar las variables / la incógnita.	
I	Traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico.	
J	Dificultad para establecer relaciones entre enunciados.	

Nota: Dificultades en el aprendizaje del álgebra. Fuente: Elaboración propia extraída del cuestionario para el trabajo empírico, en Anexo N°1.

Las 10 posibles respuestas no han sido elegidas al azar, sino que responden a un esfuerzo por reflejar los distintos tipos de dificultades de aprendizaje en matemáticas conocidos a través de la investigación bibliográfica previa, a saber:

- a. Dificultades derivadas de conocimientos previos débilmente consolidados (respuestas 1, 2, 3 y 4).
- b. Dificultades derivadas de otras dificultades más propias del lenguaje o la comprensión lectora (respuestas 7, 9 y 10).

- c. Dificultades propias del aprendizaje de conceptos matemáticos en general y algebraicos en particular (respuestas 5, 6, 8, 9 y 10).
- d. Dificultad para establecer asociaciones entre conceptos que van siendo almacenados en la memoria del alumno (respuestas 7 y 10).

Se ha pretendido dar con ello cabida a todo tipo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que pueden verse reflejados en las aulas de secundaria para posteriormente contar con cada uno de ellos antes de elaborar la propuesta didáctica objeto del presente trabajo.

La segunda pregunta del cuestionario se ha incluido para acotar más la respuesta al primer ítem. En ella se limita la elección de las dificultades presentes en el aula a 3, según criterios de importancia, porcentaje de casos, relevancia de los mismos o persistencia en el tiempo. Se pide además ordenar las 3 opciones elegidas según su importancia desde la visión totalmente subjetiva del docente en cuestión.

Y en una última pregunta se evalúa la posible eficacia del uso de distintos recursos en la eliminación o disminución de dichas dificultades de aprendizaje. Para ello se han enumerado recursos relativamente sencillos y que se encuentran ya de forma habitual en todos los centros educativos:

Cuadro N° 11. Posibles recursos para la mejora del aprendizaje del álgebra.

	SI	NO	NS/NC
Libro digital con proyector			
Vídeos didácticos			
Aula informática (actividades mediante el uso del ordenador)			
Videojuegos didácticos			
Trabajo en equipo			
Una clase inicial de repaso de operaciones con números enteros, potencias y fracciones.			

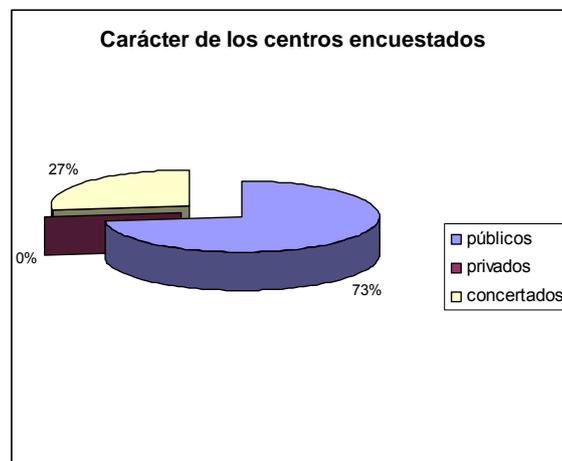
Nota: Posibles recursos para la mejora del aprendizaje del álgebra. Fuente: Elaboración propia extraída del cuestionario para el trabajo empírico, en Anexo N°1.

Con este último ítem del cuestionario se orientará la propuesta didáctica hacia el uso de algún tipo de recurso que ayude a minimizar las dificultades de los alumnos en su aprendizaje de álgebra.

4.2. Puesta en práctica

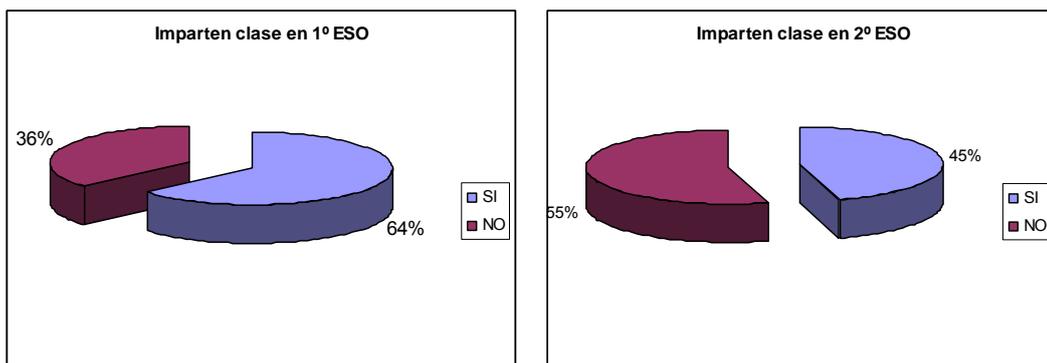
Después de contactar con todos los centros educativos mentados anteriormente, se han podido recopilar un total de 22 cuestionarios de los distintos profesores de matemáticas que en ellos ejercen su labor docente. Se presentan seguidamente los resultados obtenidos en forma de gráficos y referenciados a los porcentajes correspondientes a cada respuesta. En el Anexo N°3 se adjunta una recopilación de todas las respuestas obtenidas en los 22 cuestionarios, y los gráficos que siguen nos muestran estos mismos datos analizados para cada pregunta.

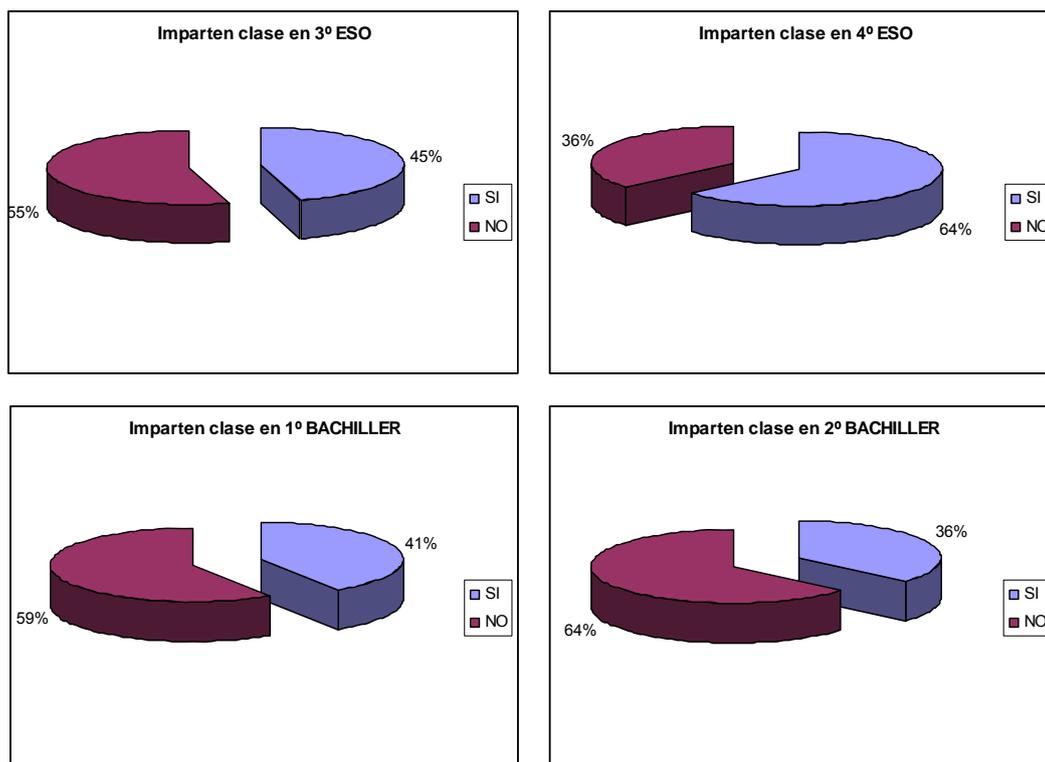
El primer dato obtenido del cuestionario es sobre el carácter público, privado o concertado del centro, y arroja los siguientes resultados:



Gráfica N° 3. Carácter de los centros educativos encuestados. Fuente: Elaboración propia.

El segundo hace referencia a los cursos o niveles de educación secundaria en que imparte clase cada uno de los profesores encuestados. Por lo general, cada profesor imparte clase en más de un curso, por lo que los porcentajes han sido analizados individualmente para cada curso y están referenciados al total de profesores encuestados.

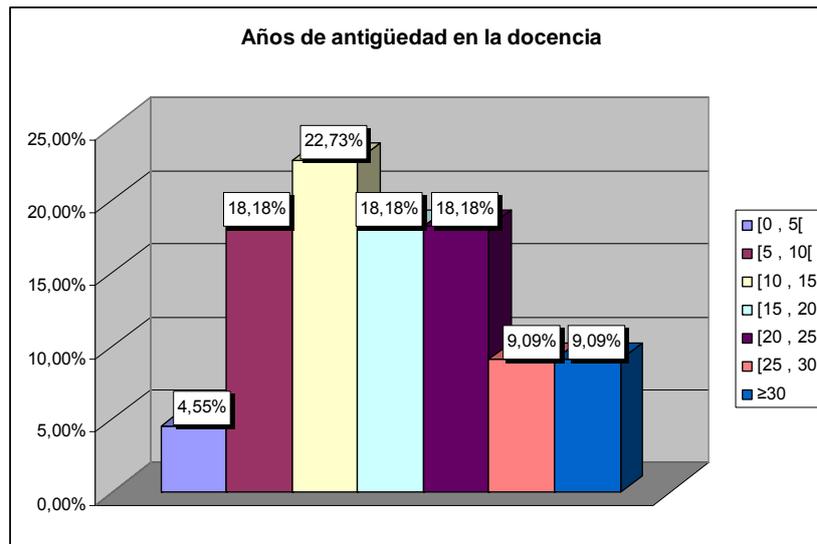




Gráficas N° 4-9. Cursos en que imparten clase los encuestados. Fuente: Elaboración propia.

De momento en la gráfica anterior ya se aprecia que para los cuatro cursos correspondientes a la ESO la mayoría de profesores encuestados imparten clase, mientras que en los dos cursos de Bachillerato la mayoría no imparte clase. Este hecho puede deberse a la disminución del número de alumnos en estos cursos, y por tanto la disminución de la necesidad de profesorado. Aunque también podría deberse a que no todos los centros educativos que imparten clase en ESO lo hacen también en Bachillerato, pero esta segunda posible causa responde igualmente a la primera, dado que no son necesarios tantos centros educativos que impartan nivel de Bachillerato si el número de alumnos (demanda) es inferior.

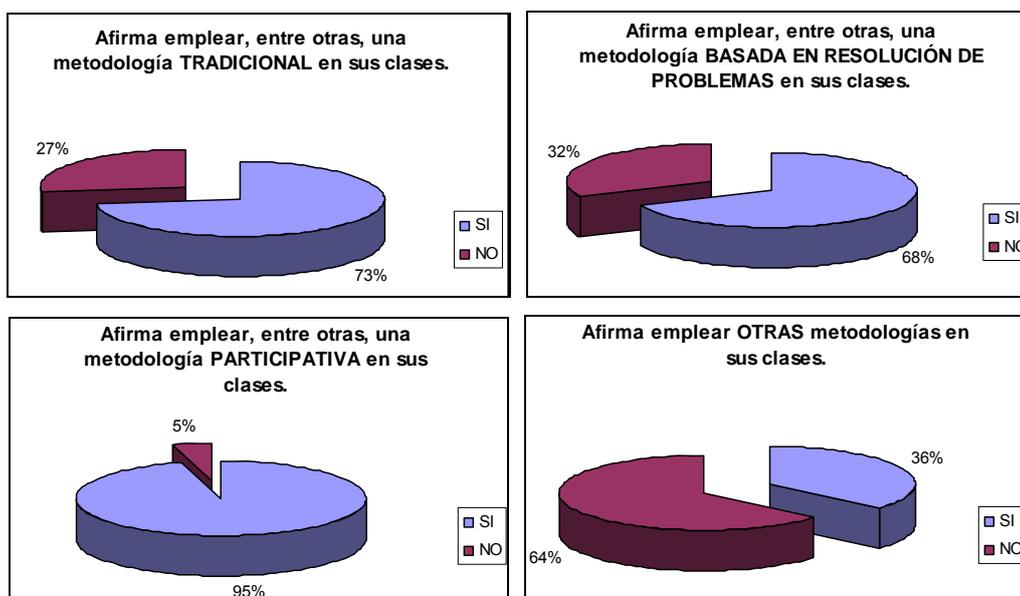
El tercer dato se ha obtenido a través de la pregunta abierta que pretendía conocer los años de antigüedad con que contaba cada uno de los encuestados en la docencia de matemáticas. Estos han sido los resultados obtenidos:



Gráfica N° 10. Años de antigüedad en la docencia de los entrevistados. Fuente: Elaboración propia.

Esta gráfica muestra que más del 77% de los profesores entrevistados se encuentran dentro del intervalo de 5 a 25 años de antigüedad. Sólo un 4,55% tiene menos de 5 años de experiencia, y un 18% sigue impartiendo clase después de 25 años de experiencia.

En cuanto a la metodología empleada en sus clases, en la pregunta número 4 del cuestionario se ofrecieron tres opciones y se dejó una más abierta. Estas han sido las respuestas:

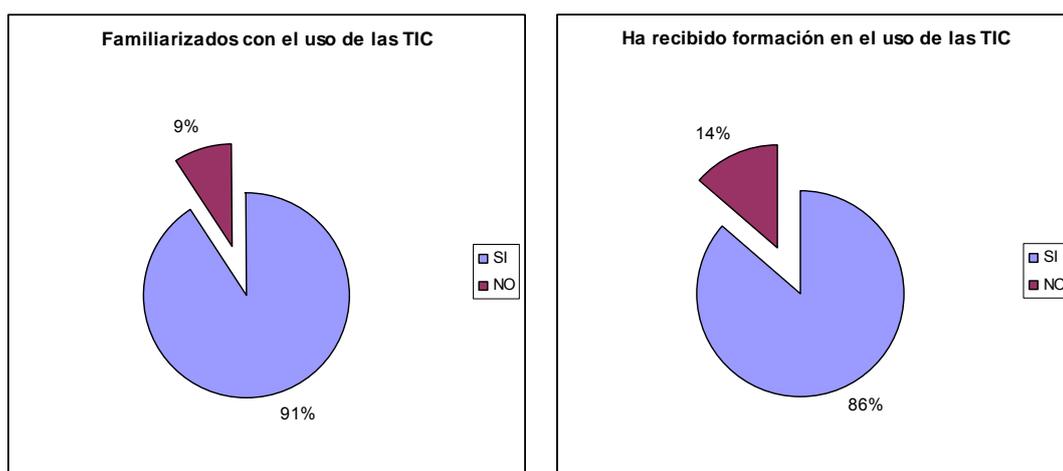


Gráficas N° 11-14. Metodología empleada en el proceso de enseñanza. Fuente: Elaboración propia.

Más de la mitad de los profesores afirma emplear metodologías tradicionales o basadas en la resolución de problemas, pero llama la atención que el 95% de ellos dice emplear además una metodología participativa, lo que puede sugerir que quizá algo esté cambiando en la educación, que ya no se conciba ésta como una mera transmisión de contenidos sino que el alumno haya pasado a ser parte activa en su proceso de aprendizaje.

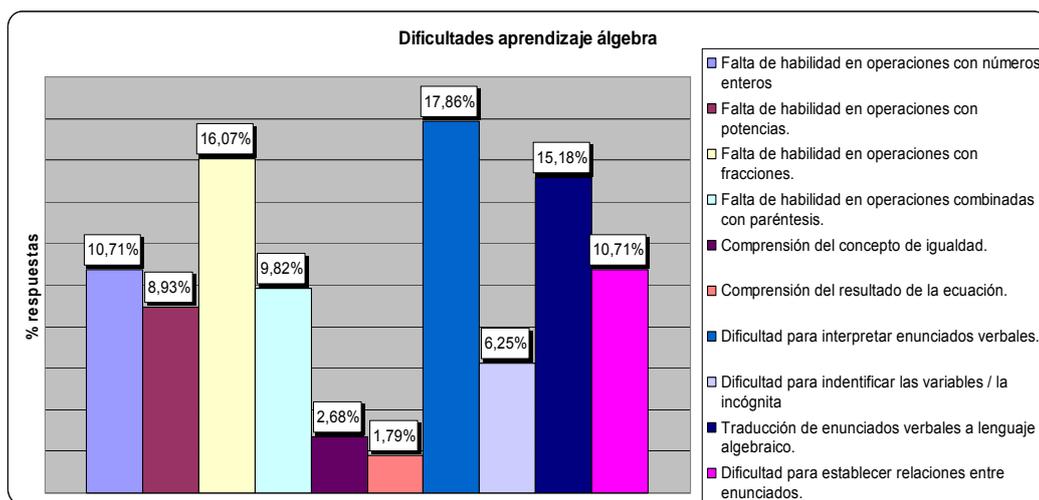
En cuanto al 36% de profesores que indicó que también incluía otro tipo de metodologías en sus clases, la mayoría de respuestas referían el uso de las TIC en el aula y al aprendizaje cooperativo.

Las preguntas números 5 y 6 se encuentran relacionadas con el uso de las TIC en educación, sobre si los docentes se sienten familiarizados con su uso y si han recibido formación al respecto. Los resultados son muy positivos en ambos casos.



Gráficas N° 15-16. Uso de las TIC en educación. Fuente: Elaboración propia.

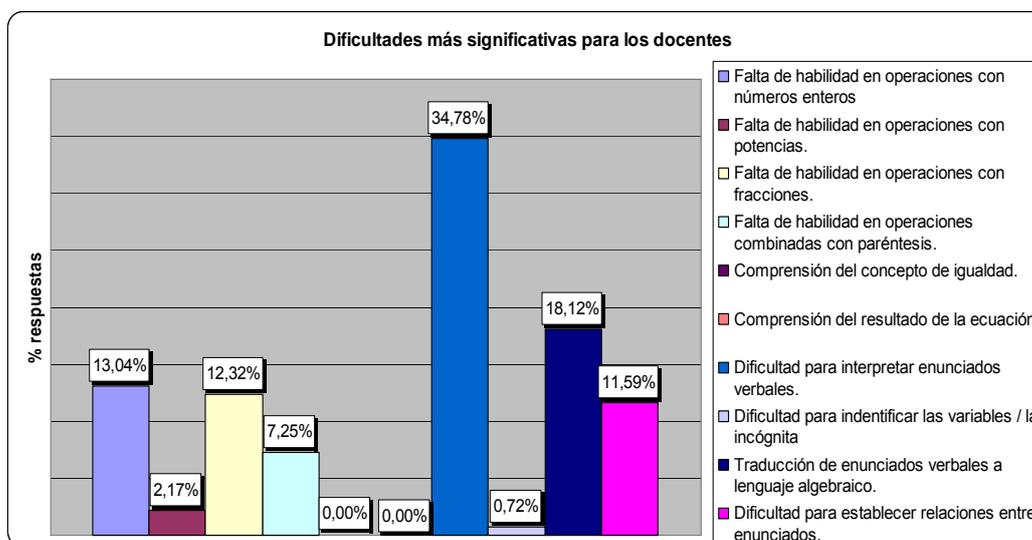
Es ya en la pregunta número 8 del cuestionario donde entramos en materia específica relativa a las dificultades en el aprendizaje de álgebra. Como se ha visto en puntos anteriores, el cuestionario ofrecía diez posibles respuestas y estos han sido los resultados obtenidos.



Gráfica N° 17. Dificultades en el aprendizaje de álgebra. Fuente: Elaboración propia.

A la vista de los resultados de la gráfica anterior, cabe destacar como respuestas más frecuentes, la falta de habilidad en operaciones con fracciones, la dificultad para interpretar enunciados verbales y la traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico. En el caso contrario también es importante destacar que las respuestas menos frecuentes (apenas un 4% del total) corresponden a la comprensión del concepto de igualdad y a la comprensión del resultado de la ecuación.

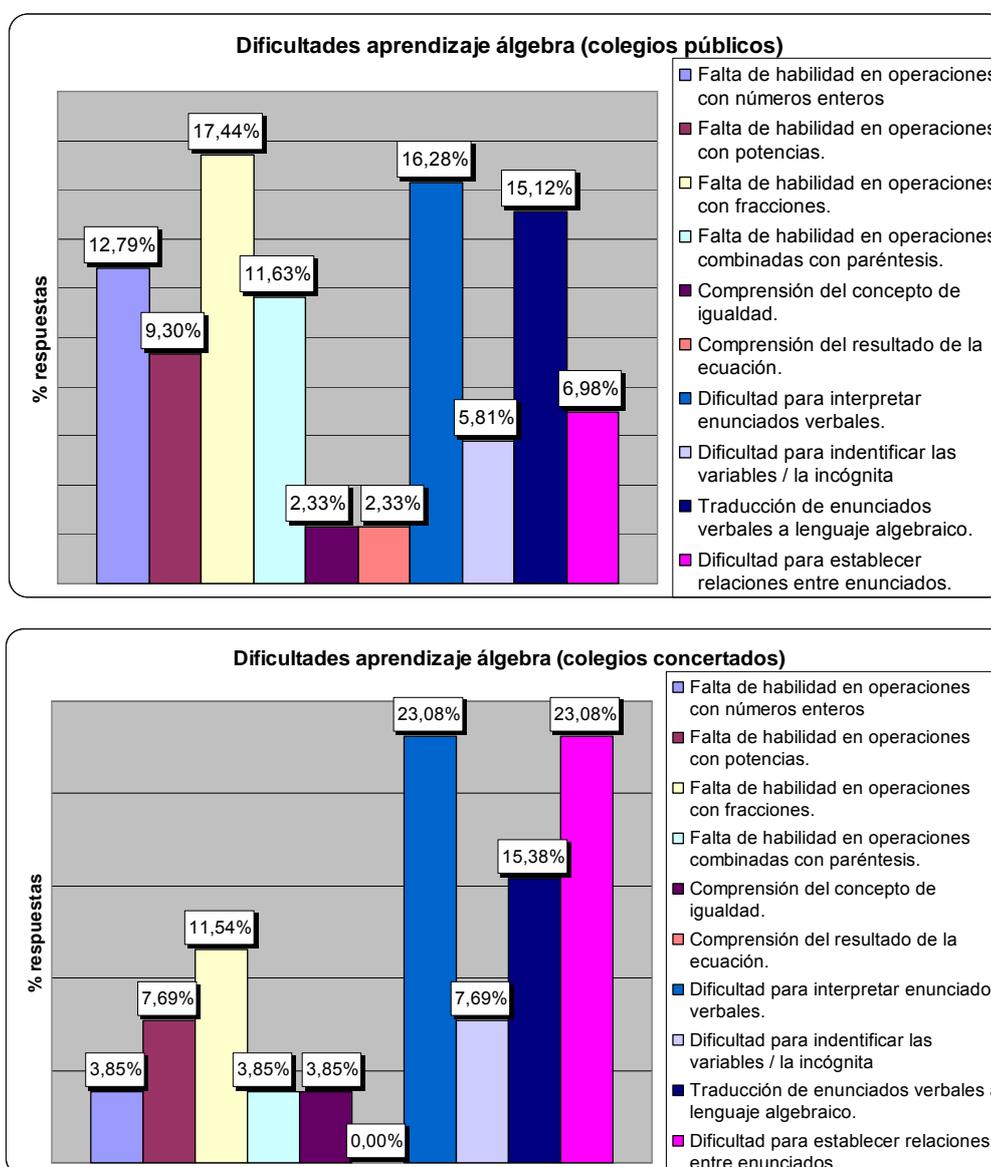
En la pregunta siguiente, la número 9 del cuestionario, se le pidió a cada profesor que eligiese tres de las dificultades señaladas y lo hiciese por orden de mayor a menor importancia según su criterio. Para la elaboración de la siguiente gráfica se le ha otorgado un total de tres puntos a la primera elección de cada docente, dos puntos la segunda elección y un punto a la tercera, y se ha vuelto a analizar la gráfica anterior, que en este caso ha quedado como sigue:



Gráfica N° 18. Dificultades más significativas para los docentes. Fuente: Elaboración propia.

Tras esta elección de las dificultades más significativas se ha incrementado la distancia entre cada una de ellas, aunque el orden de importancia apenas ha variado. Definitivamente es la dificultad para interpretar enunciados verbales la que todos los profesores señalan como más frecuente y más difícil para sus alumnos.

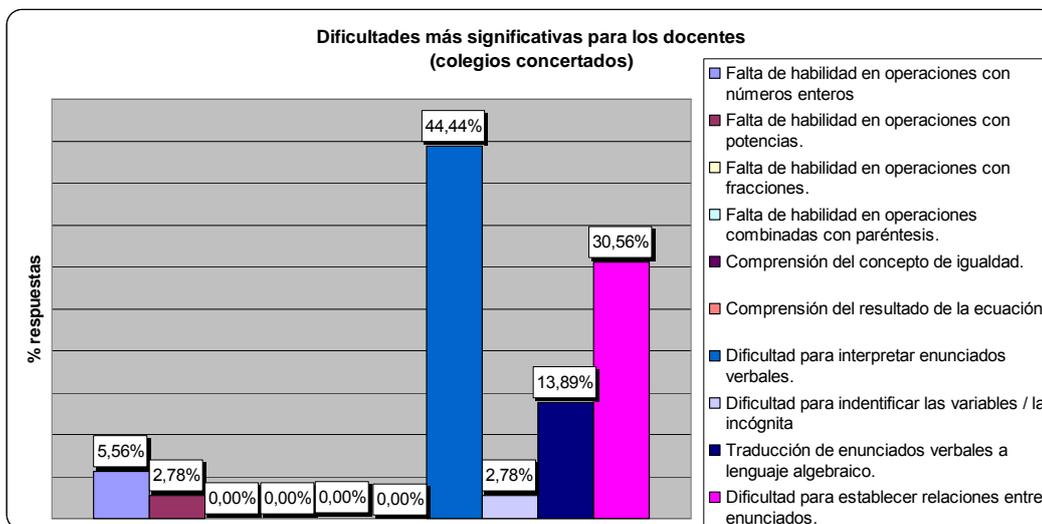
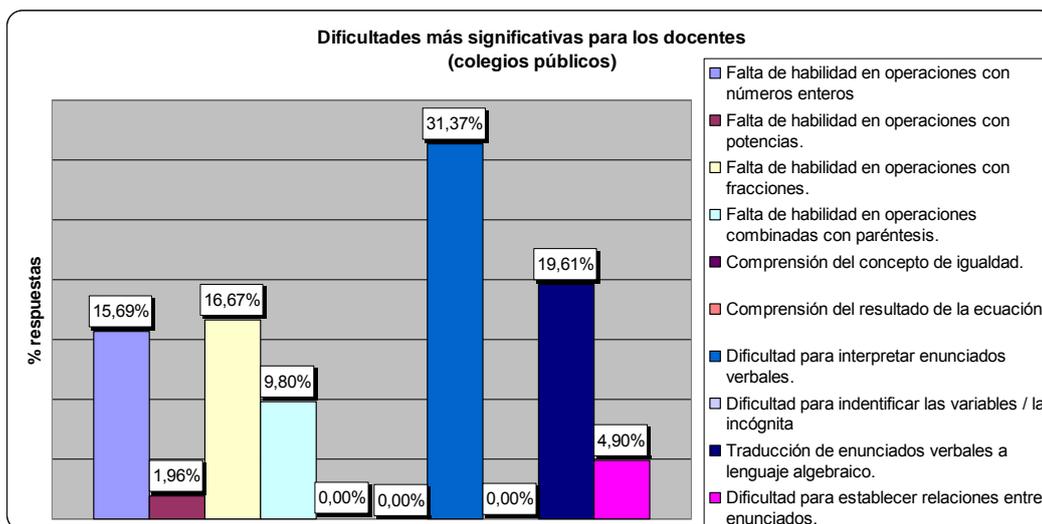
Hacemos un paréntesis en este punto, y antes de pasar a mostrar gráficamente los resultados de la siguiente pregunta, para observar si en el análisis de las dificultades en el aprendizaje de álgebra hay diferencias significativas según el carácter del centro educativo. De este modo se han separado las respuestas según si proceden de profesores que ejercen la docencia en centros públicos o en centros privados. Sorprende ver los siguientes resultados:



Gráficas N° 19-20. Comparación entre dificultades de aprendizaje de álgebra en centros públicos y centros concertados. Fuente: Elaboración propia.

Aunque la dificultad para interpretar enunciados verbales sigue siendo una de las respuestas más frecuente, empieza a haber diferencias entre un tipo de centros y otros. En los centros públicos de la muestra preocupan mucho más las dificultades relacionadas con conceptos adquiridos anteriormente y que deben estar ya consolidados que en los centros concertados, que si bien también son motivo de preocupación, no los son con la misma importancia. En cambio, en los centros concertados preocupa mucho más la dificultad para establecer relaciones entre enunciados, respuesta que se encuentra en séptimo lugar en el caso de los centros públicos. Aún así, con el tamaño de la muestra del presente trabajo, no se pueden llegar a generalizar estos resultados.

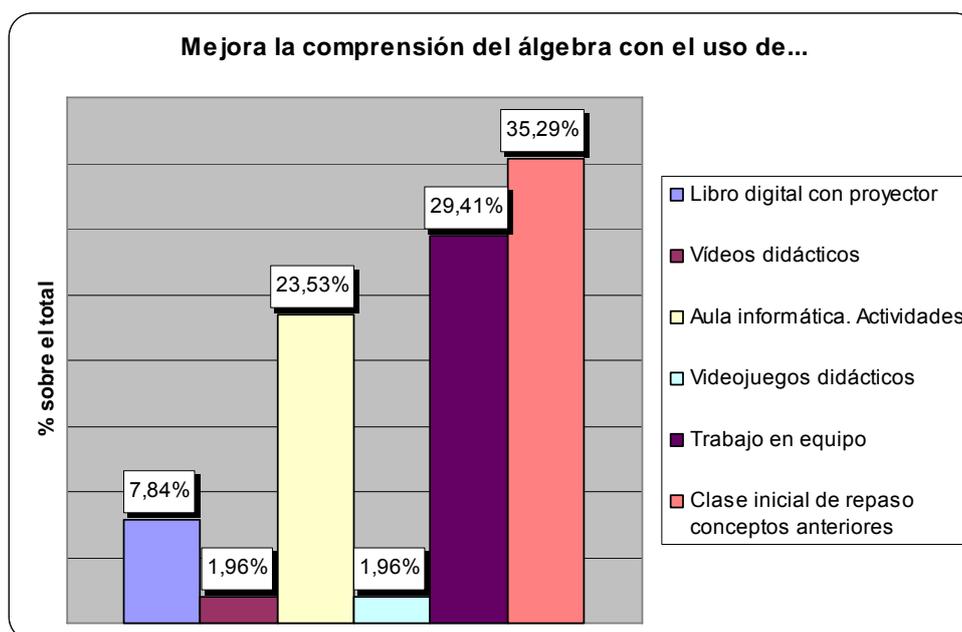
Visto lo anterior, hemos retrocedido a analizar también la Gráfica N° 18 relativa a las dificultades más significativas para los docentes y los resultados por separado para centros públicos y centros concertados han sido los que siguen:



Gráficas N° 21-22. Comparación entre dificultades más significativas para los docentes en centros públicos y centros concertados. Fuente: Elaboración propia.

Efectivamente quedan más pronunciadas las diferencias apuntadas en la gráfica anterior, y es que en los centros públicos analizados preocupan mucho más los conceptos que deberían estar ya consolidados y parece que no lo están, frente a la preocupación en los centros concertados por la dificultad en establecer relaciones entre enunciados, concepto más avanzado en el aprendizaje del álgebra.

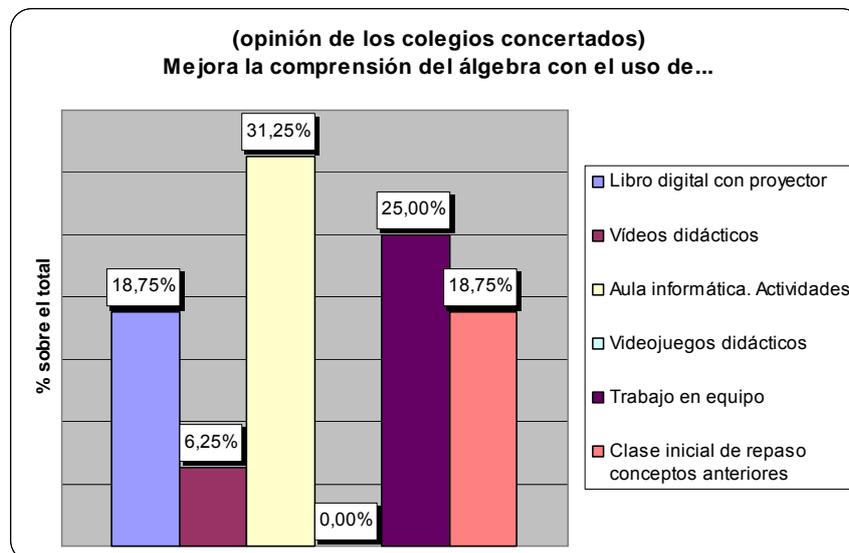
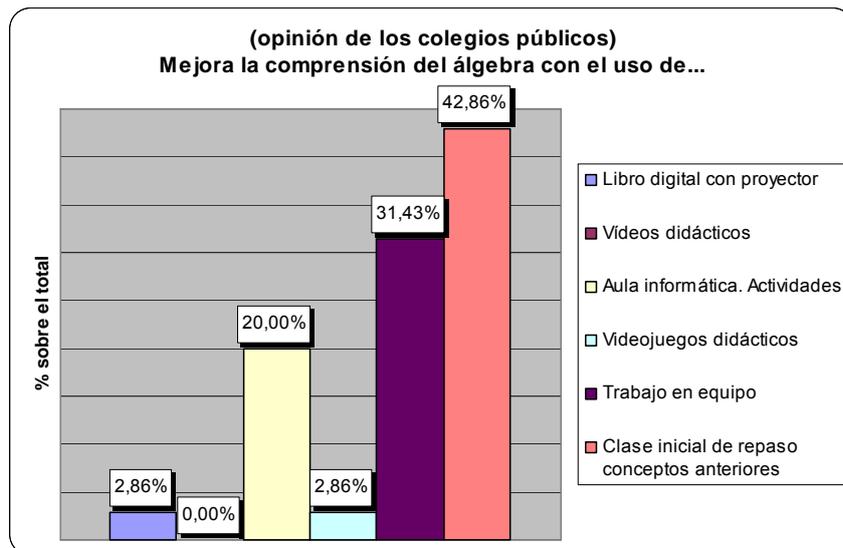
Por último en la pregunta número 10 les preguntamos si notaban alguna mejoría en el aprendizaje del álgebra con el uso de algunas herramientas o recursos específicos. Los resultados obtenidos se muestran en la gráfica que sigue.



Gráfica N° 23. Recursos para la mejora de la comprensión del álgebra en el aula. Fuente: Elaboración propia.

Si retrocedemos a los resultados obtenidos en las preguntas números 5 y 6, resulta que más del 90% de los profesores encuestados estaba familiarizado con el uso de las TIC en el aula y había recibido formación específica para ello, sin embargo vemos ahora en la Gráfica N° 22 que no parece que aprecien mucha eficacia en ello. Apuestan mucho más, casi todos ellos, por el trabajo en equipo o por una clase inicial de retroalimentación en que se repasen contenidos anteriores necesarios para llevar a cabo operaciones básicas tanto en aritmética como en álgebra.

Y visto lo sucedido en resultados anteriores, hemos vuelto a analizar estos resultados por separado en el caso de centros públicos y centros concertados.



Gráficas N° 24-25. Comparación entre la opinión de centros públicos y concertados en cuanto al uso de recursos para mejorar la comprensión del álgebra. Fuente: Elaboración propia.

De nuevo se aprecian diferencias significativas. Aunque el trabajo en equipo y una clase inicial de repaso de contenidos siguen estando bien valorados en ambos casos, es evidente que los centros educativos concertados pertenecientes a la muestra del estudio apuestan mucho más por llevar a cabo actividades y clases en el aula de informática que los centros públicos.

4.3. Análisis de los resultados

Algunas de las gráficas presentadas en el apartado anterior se han ido comentando brevemente, pero ya finalizada la presentación de resultados pasamos a analizar datos y extraer conclusiones de tipo general del trabajo llevado a cabo.

Primeramente cabe mencionar que la mayoría de los centros educativos encuestados son de carácter público frente a un total de seis centros concertados (27% del total), pero no localizamos ninguno completamente privado. Se tomará la muestra como representativa dentro del ámbito geográfico en que se ha desarrollado el trabajo dado que se acerca bastante a la realidad, donde la mayoría de los alumnos asisten a clase en centros públicos, una pequeña parte de la población matricula a sus hijos en centros concertados y muy pocos de estos centros mantienen su carácter totalmente privado, dado que los que inicialmente son privados, finalmente acuerdan un concierto con las autoridades educativas para subvencionar la educación de sus alumnos.

Por otro lado, todos los profesores encuestados imparten clases en más de un curso. Algunos de ellos no lo hacen en 1º de ESO que es donde va dirigida principalmente la propuesta educativa objeto de este trabajo, pero se ha tomado la muestra como válida puesto que el bloque de álgebra se encuentra presente en el currículo de todos los cursos de secundaria, y los profesores son, por tanto, conocedores de las dificultades con que se encuentran sus alumnos en su aprendizaje.

Ya se mencionó al presentar la Gráfica N° 10 que más del 77% de los profesores entrevistados se encuentran dentro del intervalo de 5 a 25 años de antigüedad y que únicamente el 4,55% (1 de la muestra total de 22) tiene menos de 5 años de experiencia.

Los datos presentados en las Gráficas N° 15 y 16 muestran un panorama muy alentador para la educación de la sociedad de la información. Por un lado la inmensa mayoría de los profesores encuestados conoce el uso de las TIC en educación y se encuentra familiarizado con ellas, y por otro lado, surgen nuevas metodologías de enseñanza dentro del aula que sustituyen o complementan a la metodología tradicional. Este dato no contradice el obtenido en las Gráficas N° 11 a 14, puesto que aunque se encuentren relacionados, no lo son de forma directa y proporcional. La diferencia entre centros públicos y concertados detectada en las Gráficas N° 24 y 25 responde, quizá, a que el uso del ordenador en las aulas todavía no está del todo generalizado en el caso de los centros públicos. Por otro lado, el uso de las TIC en educación sigue siendo un poco tímido y seguramente, como apunta Onrubia (2005), el uso de las TIC en el aula empezará a obtener resultados eficaces a largo plazo, dado que inicialmente ocurre lo contrario, que hace más lento el ritmo de las clases antes de empezar a ver resultados.

En cuanto a dificultades en el aprendizaje del álgebra, ya se ha mencionado anteriormente que los resultados obtenidos con mayor frecuencia han sido por orden de importancia:

1. La dificultad para interpretar enunciados verbales.
2. La falta de habilidad en operaciones con fracciones.
3. La traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico.

No sorprenden en absoluto la primera y la última de las dificultades, dado que coinciden con la mayoría de estudios e investigaciones mencionados en el marco teórico que apuntaban a éstas como las principales dificultades que se presentaban en el aprendizaje del álgebra. Es importante, sin embargo, detectar un problema añadido en la segunda puesto que debería estar solucionado en la educación primaria. Lejos de ello, es frecuente que la enseñanza secundaria arrastre problemas derivados de la falta de comprensión o habilidad en el manejo de operaciones básicas de primaria.

El resultado obtenido en las Gráficas N° 21 y 22 que reflejan la percepción de los profesores sobre estas dificultades comparando resultados obtenidos de los centros públicos con los de los centros concertados, puede inducir a pensar en una posible diferencia de nivel alcanzado por sus alumnos. En los centros públicos pertenecientes a la muestra preocupa que los alumnos no hayan adquirido habilidad con las operaciones aritméticas básicas en su etapa primaria, mientras que en los seis centros concertados estudiados preocupa que los alumnos, después de haber traducido al lenguaje algebraico el enunciado de un problema, presenten dificultades para establecer relaciones entre ellos que les lleven a formular la ecuación. Estos resultados pueden indicar una diferencia en el nivel de alfabetización matemática entre alumnos de distintos centros o quizá responda al tipo de alumnos matriculados en cada centro, pero este es otro tema de debate distinto al que aquí se propone.

Por último se presenta la Gráfica N° 23 con la que se pretendía orientar la propuesta didáctica objeto del presente trabajo. En este punto sí que ha sorprendido bastante el resultado obtenido, dado que en un principio se pensaba que los profesores valorarían mejor el uso del libro digital, de los vídeos didácticos o los videojuegos. En cambio el trabajo en equipo y la clase inicial de repaso han sido los claros ganadores. Este resultado apoya el objetivo de presentar una propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo, y corrobora las teorías vistas a tal efecto en el marco teórico.

5. Propuesta didáctica

5.1. Introducción y Justificación

Presentar la propuesta didáctica para la enseñanza de álgebra en 1º de ESO es la razón principal de todo este trabajo.

En este apartado se especifica cuál es la propuesta didáctica, qué estructura tiene, qué objetivos y competencias se pretenden alcanzar, qué contenidos se van a impartir, cuál va a ser la metodología empleada, qué actividades se realizarán de forma individual y cuáles en grupo, qué recursos son necesarios y cuáles van a ser los criterios de valoración y evaluación a aplicar, de qué modo y en qué momento.

El objetivo general del bloque de álgebra es que los alumnos conozcan: qué es el lenguaje algebraico, cuál es la traducción de enunciados sencillos a lenguaje algebraico, qué es un monomio y en qué partes se divide, operaciones con monomios, expresiones algebraicas (diferenciando entre identidades y ecuaciones), ecuaciones de primer grado y resolución de problemas mediante la aplicación del álgebra.

Ya se ha visto en apartados anteriores que en el Anexo II del Real Decreto 1631/2006 se desarrollan los objetivos, contenidos y contribución a la adquisición de competencias básicas de cada una de las asignaturas de la ESO. En materia de matemáticas se establecen los contenidos mínimos obligatorios para el primer curso de la ESO, entre los cuales es el bloque 3 el correspondiente al álgebra.

El grupo al que puede ir dirigida la propuesta didáctica en cuestión es de tipo general y heterogéneo, compuesto por alrededor de 25 alumnos de características distintas (procedencia social, sexo, religión, aptitudes, etc.), todos ellos pertenecientes al curso escolar de 1º de ESO.

5.2. Objetivos y competencias básicas

Teniendo en cuenta que las competencias básicas de que habla el Real Decreto 1631/2006 son ocho:

- C1. Competencia en comunicación lingüística.
- C2. Competencia matemática.
- C3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- C4. Tratamiento de la información y competencia digital.

- C5. Competencia social y ciudadana.
- C6. Competencia cultural y artística.
- C7. Competencia para aprender a aprender.
- C8. Autonomía e iniciativa personal.

La definición de objetivos que se pretende alcanzar en el bloque de álgebra y su relación con la adquisición de competencias básicas queda del siguiente modo:

Cuadro N° 12. Definición de objetivos y relación con las competencias básicas.

OBJETIVOS	COMPETENCIAS
Establecer una relación del álgebra con conocimientos ya adquiridos.	C2, C3 y C7
Distinguir álgebra de aritmética.	C2
Saber interpretar el lenguaje algebraico.	C1, C2, C4 y C8
Distinguir entre coeficientes conocidos e incógnitas desconocidas.	C2
Reconocer el grado de un monomio.	C2
Reconocer monomios semejantes.	C1 y C2
Saber operar monomios.	C2
Distinguir entre ecuación e identidad.	C1, C2, C4 y C7
Comprender el resultado de una ecuación.	C1, C2, C4, C7 y C8
Saber calcular ecuaciones equivalentes.	C2
Resolver ecuaciones de primer grado.	C2 y C7
Saber interpretar enunciados.	C1, C2 y C8
Traducir expresiones a lenguaje algebraico.	C1 y C2
Establecer relaciones entre expresiones algebraicas.	C1, C2, C7 y C8
Resolver problemas.	C1, C2, C7 y C8
Comprobar la solución.	C2 y C7

Nota: Definición de objetivos y relación con las competencias básicas. Fuente: Elaboración propia.

5.3. Contenidos

Los contenidos correspondientes al bloque de álgebra para 1º de ESO y en los que se ha basado la propuesta didáctica que se define en apartados sucesivos, se han obtenido de forma general y principal del libro de texto Anaya.

No obstante, algunos de los contenidos han sido desarrollados utilizando preferiblemente material auxiliar de otras fuentes de Internet, en concreto de la aplicación educativa *Descartes* creada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Los contenidos a impartir a lo largo de toda la unidad didáctica quedan definidos del siguiente modo:

Cuadro Nº 13. Contenidos de la unidad y fuentes empleadas.

CONTENIDO	FUENTE	OBSERVACIONES
Introducción histórica al álgebra. Recordatorio de conceptos adquiridos con anterioridad y necesarios para operar en álgebra. Relación del álgebra con problemas resueltos anteriormente por otros métodos.	Libro de texto Anaya. Refuerzo de contenidos previos. Ampliación de contenidos.	Se ampliarán contenidos con operaciones diversas con fracciones, números enteros y paréntesis como recordatorio de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)
Letras en vez de números: representar números clave, generalizar relaciones, ver equivalencias, codificar con números desconocidos,...	Libro de texto Anaya. Ampliación de contenidos.	Se ampliarán contenidos con actividades de ampliación para practicar la traducción al lenguaje algebraico.
Expresiones algebraicas: monomios y operaciones con monomios.	Libro de texto Anaya.	
Ecuaciones: concepto, igualdades algebraicas (ecuaciones e identidades), elementos de una ecuación y ecuaciones equivalentes.	Libro de texto Anaya. Ampliación de contenidos.	Se indicará de forma simplemente informativa cuáles son las ecuaciones de grado 2, 3, 4... y la relación con el número de soluciones que pueden tener.
Resolución de ecuaciones.	NO se han utilizado los contenidos del libro Anaya (pág. 194-197). http://recursostic.educacion.es/descartes/web/	Estos contenidos han sido desarrollados a partir de la web del MEC. Programa DESCARTES.
Resolución de problemas con ayuda de ecuaciones.	Libro de texto Anaya.	Ampliación de actividades del contenido digital de Anaya.

Nota: Contenidos de la unidad y fuentes empleadas. Fuente: Elaboración propia.

Como el uso de otras fuentes se ha dado básicamente en el punto de “Resolución de ecuaciones” se adjunta en el Anexo Nº 2 el contenido elaborado para este apartado del temario basado en el programa Descartes del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

5.4. Metodología

La metodología principal empleada en el aula es el aprendizaje cooperativo. Es el principio fundamental en que se ha basado el trabajo de elaboración de la propuesta didáctica. Independientemente de que se dedique parte del tiempo disponible a la transmisión de contenidos de forma tradicional, o al trabajo individual, el trabajo cooperativo será el predominante durante todo el bloque de álgebra.

Como plataforma de trabajo se ha incluido la creación de un *Wiki* en el servidor de *Wikispace*. La dirección de enlace es <http://moniwiki-matematicas.wikispaces.com> y en la figura que sigue vemos su página principal en la que ya se han incluido las actividades que se proponen más adelante.

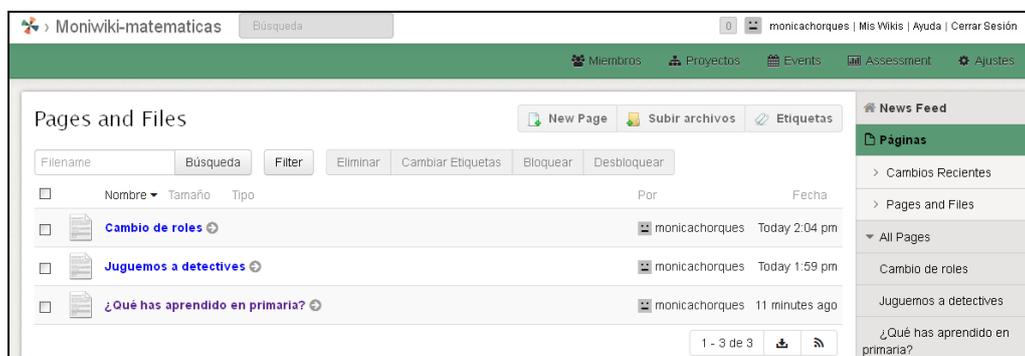


Figura N^o 1. Página principal del *Wiki* de la asignatura. Fuente: Elaboración propia.

Se proponen tres nuevos métodos para el trabajo cooperativo del álgebra en el aula de 1^o de ESO. La sugerencia es que se trabaje el primero al inicio de la unidad didáctica, el segundo a mitad del temario para practicar la traducción al lenguaje algebraico y el tercero al final, con la resolución de problemas.

Se explican a continuación sendos métodos, a los que se ha llamado *¿Qué has aprendido en primaria?*, *Juguemos a detectives* y *Cambio de roles*.

5.4.1. ¿Qué has aprendido en primaria?

Se trata de una actividad cooperativa para trabajar dentro del aula en grupos de 4-6 alumnos. Los temas para los trabajos por equipos son:

- a. Operaciones con números enteros.
- b. Operaciones con números decimales.
- c. Operaciones con potencias.

- d. Operaciones con fracciones.
- e. Operaciones combinadas con paréntesis.
- f. Cálculo de porcentajes.
- g. Aumentar y disminuir porcentajes a una cantidad fija.

Al inicio de la sesión, se reparten los distintos temas entre los equipos que se han formado en el aula. Cada uno de los equipos debe dedicar los primeros 15 minutos de la clase a debatir cuáles son las operaciones básicas que conocen relativas al tema asignado al equipo, cómo funcionan, qué propiedades tienen, etc. El resto de la sesión se empleará para que cada uno de los equipos realice un resumen en no más de 2 folios en el que quede reflejado qué ha aprendido en primaria sobre el tema que le ha sido asignado, cómo se llevan a cabo las operaciones y que incluya algún ejemplo. Al final de la sesión los resúmenes de cada equipo quedarán colgados en el *Wiki* de la asignatura para que puedan ser consultados por el resto de equipos.

The screenshot shows a Moniwiki page with the following content:

¿Qué has aprendido en primaria?

Instrucciones de la actividad

Formar grupos de 4-6 alumnos. Los temas para los trabajos por equipos son:

- Operaciones con números enteros.
- Operaciones con números decimales.
- Operaciones con potencias.
- Operaciones con fracciones.
- Operaciones combinadas con paréntesis.
- Cálculo de porcentajes.
- Aumentar y disminuir porcentajes a una cantidad fija.

Al inicio de la sesión, se reparten los distintos temas entre los equipos que se han formado en el aula. Cada uno de los equipos debe dedicar los primeros 15 minutos de la clase a debatir cuáles son las operaciones básicas que conocen relativas al tema asignado al equipo, cómo funcionan, qué propiedades tienen, etc. El resto de la sesión se empleará para que cada uno de los equipos realice un resumen en no más de 2 folios en el que quede reflejado qué ha aprendido en primaria sobre el tema que le ha sido asignado, cómo se llevan a cabo las operaciones y que incluya algún ejemplo. Al final de la sesión los resúmenes de cada equipo quedarán colgados en la Wiki de la asignatura para que puedan ser consultados por el resto de equipos.

Opcionalmente, puede incluirse la elaboración de un mural (en una cartulina por ejemplo) por parte de cada equipo para fijarlo a la pared del aula de forma que quede visible para todos los alumnos.

Plantilla para anotar datos

Tema asignado al equipo	RESPUESTA	EJEMPLOS
¿Cómo se suma?		
¿Cómo se resta?		
¿Cómo se multiplica?		
¿Cómo se divide?		
Otras consideraciones		

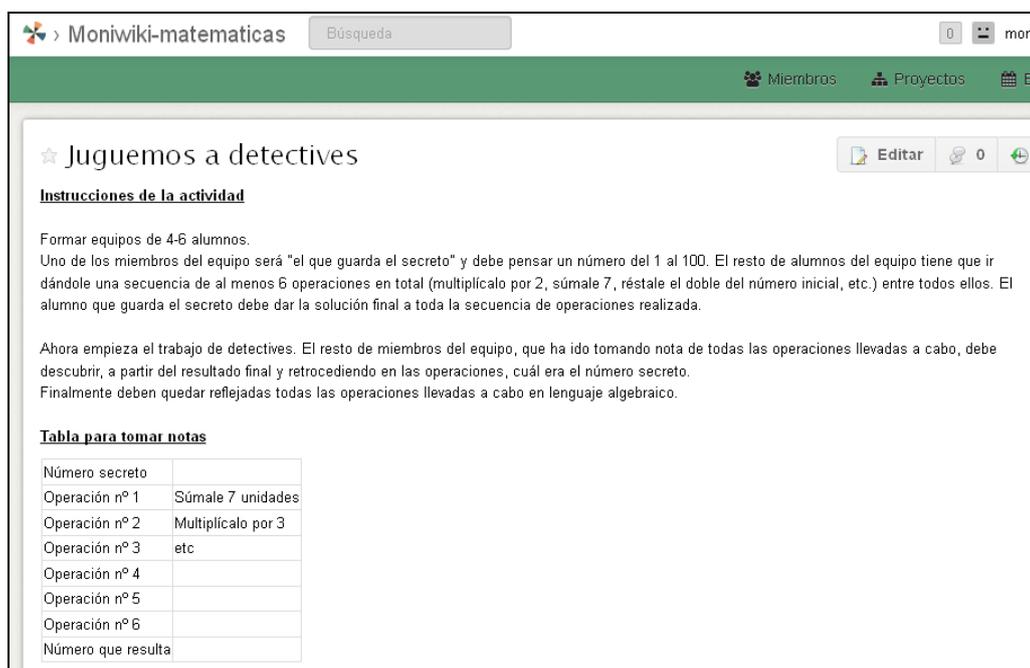
Figura N^o 2. Vista de la actividad *¿Qué has aprendido en primaria?* en el Wiki de la asignatura. Fuente: Elaboración propia.

Opcionalmente, puede incluirse la elaboración de un mural (en una cartulina por ejemplo) por parte de cada equipo para fijarlo a la pared del aula de forma que quede visible para todos los alumnos.

5.4.2. Juguemos a detectives

El objetivo principal de esta actividad es que conozcan la utilidad del lenguaje algebraico y lo empleen correctamente. Está pensado para trabajar por equipos de 4-6 alumnos, pero puede adaptarse para trabajar por parejas o en una competición de unos equipos contra otros.

Se trata de que un alumno del equipo (el que guarda el secreto) piense un número del 1 al 100. El resto de alumnos del equipo tiene que ir dándole una secuencia de por lo menos 6 operaciones (multiplícalo por 2, súmale 7, réstale el doble del primer número que has pensado, etc.) entre todos ellos. El alumno que inicialmente había pensado el número secreto debe dar la solución final a toda la secuencia de operaciones realizada.



Moniwiki-matematicas Búsqueda

Miembros Proyectos

☆ Juguemos a detectives

Editar 0

Instrucciones de la actividad

Formar equipos de 4-6 alumnos.
Uno de los miembros del equipo será "el que guarda el secreto" y debe pensar un número del 1 al 100. El resto de alumnos del equipo tiene que ir dándole una secuencia de al menos 6 operaciones en total (multiplícalo por 2, súmale 7, réstale el doble del número inicial, etc.) entre todos ellos. El alumno que guarda el secreto debe dar la solución final a toda la secuencia de operaciones realizada.

Ahora empieza el trabajo de detectives. El resto de miembros del equipo, que ha ido tomando nota de todas las operaciones llevadas a cabo, debe descubrir, a partir del resultado final y retrocediendo en las operaciones, cuál era el número secreto. Finalmente deben quedar reflejadas todas las operaciones llevadas a cabo en lenguaje algebraico.

Tabla para tomar notas

Número secreto	
Operación nº 1	Súmale 7 unidades
Operación nº 2	Multiplícalo por 3
Operación nº 3	etc
Operación nº 4	
Operación nº 5	
Operación nº 6	
Número que resulta	

Figura Nº 3. Vista de la actividad *Juguemos a detectives* en el Wiki de la asignatura. Fuente: Elaboración propia.

Ahora empieza el trabajo de detectives. El resto de miembros del equipo, que ha ido tomando nota de todas las operaciones llevadas a cabo, debe descubrir, a partir del resultado final, cuál era el número secreto.

Finalmente deben quedar reflejadas todas las operaciones llevadas a cabo en lenguaje algebraico.

5.4.3. Cambio de roles

Para esta actividad los grupos pueden ser los mismos que ya se han formado para las anteriores. El tema principal a trabajar en esta actividad cooperativa es la resolución de problemas en la unidad didáctica de álgebra. Cada equipo debe primero consultar en la *Wiki* de la asignatura qué problema le ha sido asignado. Se dedicarán entonces 10 minutos al debate en equipo sobre cuál es la incógnita del problema, cómo anotar los datos del enunciado, cuál o cuáles son las relaciones que se establecen, cómo debe plantearse la ecuación, etc. Los siguientes 15 minutos servirán para que cada uno de los equipos redacte, resuelva y compruebe la solución del problema que le ha sido asignado, y lo cuelgue en la *Wiki* de la asignatura, con el mayor nivel de detalle posible, incluso redactando en letra cuál ha sido el procedimiento utilizado.

Los problemas ya resueltos serán asignados de nuevo a otro equipo distinto, de modo que ahora cada equipo será el encargado de corregir el problema de sus compañeros. Pasados 10 minutos, las correcciones correspondientes deben colgarse de nuevo en la *Wiki*.

El resto de la sesión, el grupo-aula completo debatirá sobre cada una de las actividades realizadas y sobre sus correcciones, evaluando, sobre una plantilla previamente establecida por el profesor, el trabajo de sus compañeros. La evaluación será individual. Cada uno de los alumnos contará con la plantilla correspondiente en la que irá anotando sus puntuaciones para cada equipo a medida que se debate en grupo la idoneidad de los trabajos.

Para la resolución de problemas, tanto si se hace de forma individual como por equipos, se recordará y hará hincapié en el proceso que debe seguir el orden:

- (1) Leer atentamente el enunciado e identificar qué se nos pregunta, cuál es la incógnita.
- (2) Traducir al lenguaje algebraico los enunciados que nos plantean. Tantas expresiones algebraicas como se indiquen en el enunciado (la edad del hijo dentro de cuatro años, el doble de la edad del padre, la cuarta parte de la edad del hijo, etc.).
- (3) Establecer relaciones entre los enunciados que hemos escrito en el punto anterior (es igual al doble de, será la tercera parte de, es el resultado de sumarle cinco unidades a, etc.).
- (4) Resolver la ecuación planteada.

- (5) Analizar si el resultado de resolver la ecuación es viable y se adecua a lo que pide el problema (no puede ser un resultado decimal si nos pide la edad de un padre y un hijo, por ejemplo).
- (6) Comprobar que la solución cumple con la relación establecida en el enunciado.
- (7) Finalmente analizar si el camino para la resolución del problema era el adecuado o si conocemos otro más corto o sencillo.

Moniwiki-matematicas

Miembros Proyectos

☆ Cambio de roles

[Editar](#) 0

Instrucciones de la actividad

Para esta actividad los grupos pueden ser los mismos que ya se han formado para las anteriores.

En esta actividad vamos a resolver problemas por equipos. Cada equipo debe primero consultar en la Wiki de la asignatura qué problema le ha sido asignado. Se dedicarán entonces 10 minutos al debate en equipo sobre cuál es la incógnita del problema, cómo anotar los datos del enunciado, cuál o cuáles son [\[\[#las relaciones\]\]](#) que se establecen, cómo debe plantearse la ecuación, etc. Los siguientes 15 minutos servirán para que cada uno de los equipos redacte, resuelva y compruebe la solución del problema que le ha sido asignado, y lo cuelgue en la Wiki de la asignatura, con el mayor nivel de detalle posible, incluso redactando en letra cuál ha sido el procedimiento utilizado.

Los problemas ya resueltos serán asignados de nuevo a otro equipo distinto, de modo que ahora cada equipo será el encargado de corregir el problema de sus compañeros. Pasados 10 minutos, las correcciones correspondientes deben colgarse de nuevo en la Wiki.

El resto de la sesión, el grupo-aula completo debatirá sobre cada una de las actividades realizadas y sobre sus correcciones, evaluando, sobre una [\[\[#plantilla\]\]](#) previamente establecida por el profesor, el trabajo de sus compañeros. La evaluación será individual. Cada uno de los alumnos contará con la [\[\[#plantilla\]\]](#) correspondiente en la que irá anotando sus puntuaciones para cada equipo a medida que se debate en grupo la idoneidad de los trabajos.

RECUERDA los pasos para resolver problemas:

1. Leer atentamente el enunciado e identificar qué se nos pregunta, cuál es la incógnita.
2. Traducir al lenguaje algebraico los enunciados que nos plantean. Tantas expresiones algebraicas como se indiquen en el enunciado (la edad del hijo dentro de cuatro años, el doble de la edad del padre, la cuarta parte de la edad del hijo, etc.).
3. Establecer relaciones entre los enunciados que hemos escrito en el punto anterior (es igual al doble de, será la tercera parte de, es el resultado de sumarle cinco unidades a, etc.).
4. Resolver la ecuación planteada.
5. Analizar si el resultado de resolver la ecuación es viable y se adecua a lo que pide el problema (no puede ser un resultado decimal si nos pide la edad de un padre y un hijo, por ejemplo).
6. Comprobar que la solución cumple con la relación establecida en el enunciado.
7. Finalmente analizar si el camino para la resolución del problema era el adecuado o si conocemos otro más corto o sencillo.

Asignación de problemas por equipos

Abra el siguiente archivo para ver los problemas a resolver:

[problemas para el wiki.pdf](#)
[Details](#) [Download](#) 171 KB

Figura N^o 4. Vista de la actividad *Cambio de roles* en el Wiki de la asignatura. Fuente: Elaboración propia.

5.5. Definición de actividades

El número de sesiones previsto para impartir la unidad temática de álgebra completa es de 12, de 55 minutos de duración cada una de ellas, y está programada en 3 semanas, organizadas del siguiente modo:

Cuadro N^o 14. Definición y secuencia de actividades de la unidad.

SESIÓN	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	ESPECIFICACIONES
1	Repaso conceptos ya adquiridos (operaciones con	Elaboración del contenido del tema asignado a cada	Trabajo en equipo: ¿Qué has aprendido

	números enteros, potencias, fracciones, paréntesis, etc.)	equipo basándose en los conocimientos ya adquiridos en etapas anteriores.	en primaria? El resultado se grabará en la Wiki de la asignatura.
2	Establecer una relación del álgebra con conocimientos ya adquiridos. Distinguir álgebra de aritmética.	Actividades resueltas de la página 185. Act. complementarias de ampliación: expresar números en clave.	
3	Saber interpretar el lenguaje algebraico.	Serán los propios alumnos los que van elaborando las actividades a medida que avanza el juego.	Trabajo en equipo: Juguemos a detectives.
4	Distinguir entre coeficientes conocidos e incógnitas desconocidas. Reconocer el grado de un monomio. Reconocer monomios semejantes. Saber sumar y restar monomios semejantes.	Act. 2 y 3 p. 188 Act. 4, 5 y 6 p. 189	
5	Saber operar monomios.	Act. complementarias de refuerzo: operaciones con potencias. Act. 11, 13, 17 y 19 p.191	
6	Diferenciar ecuación e identidad. Comprender cuál es el resultado de una ecuación. Calcular ecuaciones equivalentes.	Act. 1 y 2 p. 193	
7	Resolver ecuaciones de primer grado.	Act. 1 y 2 p. 197 Act. 20 y 21 p. 201	
8	Resolver ecuaciones de primer grado.	Act. 22, 23, 24, 25 y 26 p.202 Act. complementarias de refuerzo: resolver ecuaciones de primer grado.	
9	Traducir expresiones a lenguaje algebraico. Establecer relaciones entre expresiones algebraicas. Resolver problemas. Comprobar la solución.	Act. 1, 2 y p.198 y 199 Act. 30, 31, 32 y 33 p.202 Act. 34, 35, 36 y 37 p. 203	
10	Resolver problemas. Comprobar la solución.	Actividades complementarias de ampliación.	Trabajo en equipo: Cambio de roles. El resultado se grabará en la Wiki de la asignatura.
11	Resolver problemas. Comprobar la solución.	Actividades complementarias de ampliación.	Trabajo en equipo: Cambio de roles. El resultado se grabará en la Wiki de la asignatura.
12	Examen final.	Prueba individual de 5 preguntas máximo.	Prueba individual de evaluación de la unidad didáctica.

Nota: Definición y secuencia de actividades de la unidad. Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro N° 14 vemos un ejemplo de inclusión de la metodología cooperativa propuesta en la programación general de aula. No deja de ser un ejemplo, por lo que quedará a criterio de cada docente la programación del trabajo en equipo en unas sesiones u otras.

5.6. Evaluación

Se ha visto en puntos anteriores que en el Anexo II del Real Decreto 1631/2006 se definen cuáles deben ser los criterios generales de evaluación, aunque se delega en las administraciones educativas y en la autonomía de los propios centros educativos, el desarrollo y complemento de estos criterios, adaptándolos a las características del alumnado.

Distinguiremos entre los criterios de valoración y los de evaluación, siendo los primeros los relativos al modo en que van a ser evaluados los alumnos, el número de pruebas que realizarán, el porcentaje de cada una de ellas sobre la nota final, si habrá una prueba final o no, si se valorará el trabajo continuo, etc. En cuanto a los criterios de evaluación serán los que deriven de los objetivos que deben alcanzar para ser calificados como aptos en la materia.

Los criterios de valoración establecidos para la unidad didáctica completa del bloque de álgebra se descomponen según el peso de cada uno de ellos sobre la nota final y son los que siguen:

Cuadro N° 15. Criterios de valoración.

TIPO DE TRABAJO	PORCENTAJE SOBRE EL TOTAL	CRITERIOS DE VALORACIÓN
En equipo	5%	Resultado del trabajo en equipo sesión 1 (¿Qué has aprendido en primaria?)
	5%	Resultado del trabajo en equipo sesión 3 (Juguemos a detectives)
	5%	Resultado del trabajo en equipo sesiones 10 y 11 (Cambio de roles)
	5%	Valoración de los compañeros en el trabajo en equipo.
Individual	20%	Trabajo individual del resto de sesiones en la Wiki de la asignatura.
Individual + En equipo	10%	Actitud en el trabajo en equipo.
Prueba final	50%	Examen final de la unidad.
TOTAL	100%	

Nota: Criterios de valoración. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a los criterios de evaluación quedan fijados del siguiente modo:

Cuadro N° 16. Criterios de evaluación.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Introducción, repaso a la resolución de ecuaciones en cursos anteriores y letras en vez de números. Traducción de enunciados a lenguaje algebraico.	Saber interpretar el lenguaje algebraico escrito. Traducir el lenguaje verbal al lenguaje algebraico y establecer relaciones sencillas, de acuerdo a su nivel.
Concepto de monomio.	Reconocer y distinguir monomios, sus partes y grado.
Suma y resta de monomios. Multiplicación y división de monomios.	Saber operar monomios.
Igualdades algebraicas. Conceptos de ecuación e identidad. Ecuaciones equivalentes.	Distinguir ecuación de identidad. Escribir ecuaciones equivalentes a una ecuación sencilla dada. Reconocer si un valor dado es solución de una ecuación o no.
Resolución de ecuaciones sencillas. Operaciones para despejar la incógnita.	Resolver ecuaciones sencillas de primer grado.
Resolución de problemas con ayuda de las ecuaciones.	Interpretar enunciados en lenguaje verbal. Reconocer la incógnita. Traducir a lenguaje algebraico y establecer relaciones. Resolver las ecuaciones planteadas. Reconocer si la solución a la que se ha llegado es solución al problema dado.
ACTITUD -TRABAJO EN GRUPO	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Colaboración y nivel de cohesión del grupo.	Escuchar con atención a los compañeros, respetando los turnos de intervención. Repartir el trabajo de forma equilibrada. Ayudar a los compañeros que tengan dificultad en alguna de las tareas.
Razonamiento de las actividades.	Argumentar de forma correcta el razonamiento propio. Razonar positivamente las ideas de los compañeros.
Cumplimiento de tareas.	Cumplir plazos y exigencias acordadas en cada actividad. Presentar las actividades de forma limpia, clara y ordenada.

Nota: Criterios de evaluación. Fuente: Elaboración propia.

6. Aportaciones del trabajo

El presente trabajo aporta principalmente una metodología didáctica basada en el aprendizaje cooperativo para la enseñanza del álgebra en alumnos de 1º de ESO, y que se apoya en el uso de las herramientas multimedia dentro del aula. Aunque existen infinidad de técnicas para el trabajo en equipo, y muchas de ellas han sido probadas empíricamente, se han aportado tres técnicas nuevas, que si bien se han empleado para unas actividades concretas, pueden extrapolarse a otro tipo de actividades, tanto de matemáticas como de otras materias.

Asimismo, y como plataforma de trabajo, se ha creado un espacio *Wiki* para la asignatura y el grupo específicos de modo que todo el trabajo, tanto individual como por equipos, ha quedado reflejado en Internet durante todo el curso para poder ser consultado por todos los alumnos y ofrecer así una posibilidad de retroalimentación inmediata y al alcance de todos ellos.

La metodología didáctica que aquí se presenta se encuentra en la línea de las últimas investigaciones de las organizaciones que trabajan para la mejora de la calidad en la educación. Señalan Torrego y Negro (2012) que:

El aprendizaje cooperativo no es una moda pasajera, sino que responde a una necesidad pedagógica y social, y es de gran actualidad y urgencia, ya que los sistemas educativos y los profesionales de la educación están demandando con insistencia propuestas y materiales concretos en el campo de las metodologías cooperativas de enseñanza para responder a tan creciente diversidad (Torrego y Negro, 2012, p.16).

Se encuentra, además, en consonancia con las Metas Educativas 2021 de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) que demandan, entre otros, un currículo significativo que asegure la adquisición de competencias básicas para el desarrollo personal, incrementar la participación de los jóvenes en la educación o favorecer la conexión entre la educación y el empleo.

Aporta, en definitiva, tres nuevas técnicas para el aprendizaje cooperativo en el aula de matemáticas, aplicadas al bloque de álgebra.

7. Discusión

Ya finalizado el trabajo teórico, el empírico y la propuesta didáctica, se puede realizar una tarea de comparación entre los objetivos y pretensiones iniciales del trabajo y el resultado final.

De forma esencial se ha mantenido durante todo el trabajo el objetivo principal marcado, que ha derivado finalmente en la elaboración de una propuesta didáctica novedosa y propia del autor. Puede quedar para futuros trabajos la propuesta de extrapolar a otros bloques del currículo de matemáticas las técnicas aquí presentadas, o realizar la puesta en práctica de forma empírica dentro de un aula dichas técnicas.

Aunque en la metodología aportada se han incluido brevemente indicaciones sobre cuál debe ser la línea de valoración y evaluación de un aula que pretende trabajar el aprendizaje cooperativo, no se ha podido localizar una bibliografía extensa al respecto. Hay infinidad de trabajos de investigación que ofrecen técnicas para el trabajo en equipo, e incluso algunos de ellos las han probado empíricamente, pero no todos incluyen indicaciones para su evaluación. Si la metodología de aprendizaje está cambiando en la actualidad, también deben hacerlo en consonancia las programaciones de aula, los recursos didácticos empleados, la formación de los docentes, y evidentemente, la forma de evaluar dicho trabajo.

A la luz de los resultados obtenidos en el estudio de campo, podemos mostrarnos totalmente de acuerdo con los trabajos de Torrego y Negro (2012) o Johnson, Johnson y Holubec (1999) que evidenciaban los múltiples beneficios del aprendizaje cooperativo. Es evidente que estas ventajas también son percibidas por los docentes en el aula, que apuestan más por el trabajo en equipo que por otras metodologías más tradicionales.

Por otro lado, cabe mencionar que es mucha y muy variada la bibliografía encontrada que apuesta por esta metodología, que se apunta al cambio propuesto desde las autoridades educativas, y que trabajan para mejorar la calidad de nuestra enseñanza y favorecer el progreso de nuestros alumnos en un mundo global y diverso.

En cambio no podemos concluir que las nuevas herramientas telemáticas estén siendo percibidas en el aula como una ayuda eficaz para la mejora del aprendizaje del álgebra como pueden mostrar algunos autores como Area (2004), Bartolomé (2004) y Onrubia (2005).

8. Conclusiones

El primero de los objetivos específicos era *analizar los contenidos del bloque de álgebra de primer curso de educación secundaria*, y ha sido alcanzado mediante el estudio y análisis de la legislación vigente estatal y autonómica, así como la legislación de próxima entrada en vigor. Se ha tomado contacto con cuáles son los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación del bloque específico de álgebra para alumnos de 1º de ESO, requisito previo a elaborar la propuesta didáctica final.

El segundo objetivo era *conocer los problemas más comunes con que se enfrentan los alumnos en el aprendizaje de álgebra* y a través del estudio de los trabajos de Ortiz (2004) y Skemp (1998) se ha podido superar el objetivo propuesto. De este modo, no sólo se han conocido cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje de álgebra, sino que se han utilizado para la definición del trabajo empírico llevado a cabo entre profesores de matemáticas en activo.

En cuanto al tercer objetivo específico, *exponer distintos modelos didácticos de tipo cooperativo para la enseñanza-aprendizaje del álgebra, analizando las características de cada uno de ellos y comparando las ventajas y desventajas que presentan* nos ha permitido profundizar más en esta nueva metodología de aplicación relativamente reciente, conocer los principios en que se basa y los objetivos que se pretenden. Mediante el estudio y análisis de las obras de Torrego y Negro (2012) y Johnson, Johnson y Holubec (1999), principalmente, se ha alcanzado este objetivo y se ha presentado la metodología cooperativa, sus principios y sus componentes esenciales.

El cuarto objetivo era *recoger y estudiar la opinión de algunos docentes respecto a las dificultades en el aprendizaje del álgebra y a la conveniencia del empleo de las TIC en el aula* y ha sido superado en el estudio de campo a través de las encuestas realizadas a 22 docentes de matemáticas de secundaria. Aunque las encuestas llegaron a una muestra mayor, finalmente sólo se han podido recoger estas 22 respuestas, pero el objetivo se ha cumplido puesto que hemos conocido cuál es la percepción de estos docentes respecto a las dificultades en el aprendizaje del álgebra que apuntaban los investigadores analizados, y si consideran que el empleo de algunas TIC en el aula reducía estas dificultades.

El quinto y último de los objetivos específicos era *crear un espacio virtual Wiki en el que quede reflejado el trabajo cooperativo de los alumnos en el aula de matemáticas* y también ha sido superado, aunque de forma incipiente, dado que el

contenido del *Wiki* creado ha de ampliarse con la puesta en práctica de la propuesta didáctica, trabajo que queda para investigaciones futuras.

Para finalizar, el objetivo principal de *proponer una metodología didáctica basada en el trabajo en equipo que permita introducir el bloque de álgebra a los alumnos de 1º de ESO facilitando su aprendizaje* también ha sido alcanzado con la elaboración final de una propuesta didáctica de tipo cooperativo para el aula de matemáticas, aunque, como se ha comentado en el punto anterior, queda para futuros trabajos la constatación empírica de su eficacia.

En cuanto a otras consideraciones cabe mencionar que a lo largo del trabajo y las consultas bibliográficas llevadas a cabo sorprende que los libros de texto para la didáctica de las matemáticas en el aula no hayan incluido actividades en grupo. Los últimos años se ha realizado una gran labor para la adaptación del currículo de los libros de texto a la diversidad, incluyendo en todo caso actividades de repaso, de refuerzo o de ampliación, pero no se han encontrado muestras con actividades para el trabajo cooperativo.

Por otro lado, también ha resultado sorprendente que aún estando la mayoría de los profesores pertenecientes a la muestra familiarizados con el uso de las TIC en enseñanza y habiendo recibido formación al respecto, no opinan que el uso de libros digitales, vídeos didácticos o videojuegos en el aula incida mucho en la disminución de las dificultades en el aprendizaje del álgebra. Apuestan sin embargo, por una clase inicial de repaso de contenidos ya adquiridos en etapas anteriores (operaciones con números enteros, potencias o fracciones) y por el trabajo en equipo, como herramientas para ayudar a los alumnos en el aprendizaje del álgebra.

9. Limitaciones del trabajo

Ha habido varios tipos de limitaciones que pueden ser clasificadas del siguiente modo:

1. *Temporales*: primeramente el tiempo disponible y requerido para el trabajo crea unas limitaciones objetivas y reales de las que difícilmente se puede escapar. Aún tratándose de un trabajo de investigación, el propio trabajo debe ser acotado inicialmente para que resulte realista y factible. De lo contrario no se hubiese podido trabajar en profundidad.
2. *Propias del objetivo principal del trabajo*: para la definición de objetivos del trabajo, ya se han establecido ciertas limitaciones de contenido de la materia y de nivel académico, de modo que únicamente se ha trabajado sobre el bloque de álgebra en 1º de la ESO y se ha centrado la propuesta didáctica en el aprendizaje cooperativo.
3. *Derivadas del trabajo de terceros*: el trabajo de campo depende en todo momento de la colaboración de profesores de centros educativos, si bien es cierto que también ha sido labor del investigador acercar el cuestionario al máximo número posible de centros y motivar su participación. El momento específico en que se ha elaborado el trabajo ha coincidido con el final del curso académico, con exámenes finales, evaluaciones, pruebas de selectividad, etc. y no todos los profesores han podido disponer del tiempo necesario para poder colaborar en el estudio de campo.
4. *De acceso a la información*: sobre todo en el trabajo de investigación bibliográfica. No siempre se puede tener acceso con facilidad a todos los documentos, artículos y escritos que sobre la materia en cuestión se conocen, aunque sí a una gran parte de ellos, suficiente como para poder redactar un marco teórico representativo.
5. *Atención a la diversidad*: el trabajo ha sido enfocado a un grupo general y diverso, pero no se dispone del tiempo necesario ni de datos específicos de alumnos concretos para poder elaborar las adaptaciones curriculares individuales.

10. Líneas de investigación futuras

Ya se ha apuntado alguna idea en apartados anteriores. Investigaciones futuras podrían ampliar este trabajo en dos líneas principales.

Una primera línea de investigación futura podría ser extrapolar las técnicas aquí propuestas a otros contenidos de la materia de matemáticas o incluso a otras materias del currículo de secundaria. Podría, incluso, adaptar estas técnicas para la enseñanza en educación primaria.

Por otro lado, una segunda línea de investigación futura, no excluyente de la anterior, es la constatación empírica de su posible eficacia. Podría ponerse en práctica en un solo centro y analizar resultados, o en varios centros de forma simultánea y comparar resultados obtenidos, por ejemplo, en algún tipo de prueba final objetiva e idéntica para todos ellos.

Además de lo expuesto anteriormente, el trabajo se ha apoyado en un espacio *Wiki* para la comunicación virtual entre todos los miembros del grupo general. Este espacio *Wiki* también puede ser desarrollado y ampliado en futuras investigaciones, aunque también puede ser sustituido por otra herramienta telemática, comparar su facilidad de manejo y la eficacia de sus resultados.

11. Referencias bibliográficas

11.1. Referencias

Anteproyecto de Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) (2012). Texto borrador presentado en la Conferencia Sectorial de Educación (3 de diciembre de 2012). Disponible en: <http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/dms/mecd/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/lomce/20121219-borrador-lomce.pdf>

Area, M. (2004). *Los medios y las tecnologías en la educación*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Area, M. (2005). Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 11 (1), pp. 3-25. Disponible en: http://www.uv.es/RELIEVE/v11n1/RELIEVEv11n1_1.htm

Bartolomé, A. (2004). *Nuevas tecnologías en el aula*. Barcelona: Editorial Graó.

Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process, in. *Athen and Kunle*, (eds.), pp.231-245.

COLERA, J. y GAZTELU, I. (2011). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Grupo Anaya S.A.

Coll, C.; Mauri, T. y Onrubia, J. (2006). Análisis y resolución de casos-problema mediante el aprendizaje colaborativo. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 3 (2), pp.29-41.

Filloy, E.; Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias*, 26 (3), 327-342.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado 18 de junio de 2013. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/godino/>.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2003). *Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000*. Madrid: Ministerio de Educación.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2011). *Evaluación general de Diagnóstico 2010. Educación Secundaria Obligatoria. Segundo curso. Informe de Resultados*. Madrid: Ministerio de Educación.

Johnson, D.; Jonhson, R. y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Kieran, C. y Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229–240.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Matropieri, M.A., Scruggs, T.E. y Shiah, S. (1991). Mathematics instruction for learning disabled students: A review of research. *Learning Disabilities Research and Practice*, 6, 89-98.

Ministerio de Educación (2003). *La integración de las nuevas tecnologías en los centros. Una aproximación multivariada*. Madrid: Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Onrubia, J. (2005). Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento. *RED. Revista de Educación a Distancia, número monográfico II*. Consultado el 9 de Febrero de 2005 en: <http://www.um.es/ead/red/M2/>

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2008). *Metas educativas 2021. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Madrid: Gráficas Ceyde.

Ortega, M. y Melero, M. (coords.) (1999). *El aprendizaje cooperativo*. Pamplona: Fondo de publicaciones del Gobierno de Navarra.

Ortiz González, María del Rosario (2004). *Manual de dificultades de aprendizaje*. Madrid: Pirámide.

Pérez Alarcón, S. (2010). El aprendizaje cooperativo. *Temas para la educación*, 8, art.45. Disponible en: <http://www2.fe.ccoo.es/andalucia/docupdf.aspx?d=7194&s=>

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>

Ruano, R.M., Socas, M.M. y Palarea, M.M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.

Skemp, R. (1998). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (3ª edición). Madrid: Editorial Morata.

Torrego, J.C. y Negro, A. (2012). *Aprendizaje cooperativo en las aulas: fundamentos y recursos para su implantación*. Madrid: Alianza Editorial.

Vergnaud, G. y Cortés, A. (1986). Introducing algebra to “low level” eighth and ninth graders. *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, 1, pp. 319–324.

11.2. Bibliografía complementaria

Beltrán, J. (2001). La nueva pedagogía a través de Internet: Mitos, promesas y realidades de las nuevas tecnologías. *Conferencia inaugural del I Congreso Internacional EDUCARED*, Madrid.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Madrid: Labor.

García Hoz, Víctor (1995). *Enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*. Madrid: Rialp.

Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J. D. (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 7-154). Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Goñi, Jesús María (coord.) (2011). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Graó.

Puig, L. (2003). *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos*. En E. Filloy (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV. Consultado el 17 de julio de 2012. Disponible en: <http://www.uv.es/puigl/mexico00.pdf>.

Ramboll Management (2006). *E-learning Nordic 2006. Impact of ICT in Education*. Document en línea. En: <http://www.ramboll-management.com/eng/sites/pubarr/archive/elearningnordic20061.htm>

Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Revista Números*, volumen 75, 5-20. Accedido el 29 de junio de 2012. Disponible en: www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Volumen_75.pdf.

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (2012). *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: Ediciones SEIEM. Disponible en: <https://dl.dropbox.com/u/104572257/Actas/Actas16SEIEM.pdf>.

Strogatz, S. (2012). *El placer de la X*. Madrid: Taurus.

12. Anexos

ANEXO N° 1. CUESTIONARIO PARA PROFESORES

CUESTIONARIO PARA DOCENTES EN MATEMÁTICAS

PARTE I: preguntas de carácter general

(1) Tipo de centro:

Público	<input type="checkbox"/>
Privado	<input type="checkbox"/>
Concertado	<input type="checkbox"/>

(marque con una X la casilla correspondiente)

(2) ¿En qué niveles imparte clases de matemáticas?

1° ESO	<input type="checkbox"/>	4° ESO	<input type="checkbox"/>
2° ESO	<input type="checkbox"/>	1° Bachillerato	<input type="checkbox"/>
3° ESO	<input type="checkbox"/>	2° Bachillerato	<input type="checkbox"/>

(marque con una X la/s casilla/s correspondiente/s)

(3) ¿Cuánto tiempo lleva en la enseñanza de matemáticas para secundaria?

<input type="text"/>	Años
----------------------	------

(indique la cantidad de forma aproximada)

(4) ¿Qué metodología emplea en sus clases?

Tradicional (clases magistrales)	<input type="checkbox"/>
Basada en la resolución de problemas	<input type="checkbox"/>
Participativa	<input type="checkbox"/>
Otras. Especificar	<input type="checkbox"/>

(marque con una X tantas casillas como crea conveniente)

(5) ¿Está familiarizado con el uso de las TIC en la enseñanza?

SI	<input type="checkbox"/>	NO	<input type="checkbox"/>
----	--------------------------	----	--------------------------

(6) ¿Ha recibido formación al respecto?

SI	<input type="checkbox"/>	NO	<input type="checkbox"/>
----	--------------------------	----	--------------------------

(7) Comente brevemente qué ventajas e inconvenientes tienen para usted.

PARTE II: preguntas específicas sobre dificultades en el aprendizaje de álgebra

- (8) Señale cuáles de estas dificultades percibe en los alumnos de secundaria frente a la enseñanza-aprendizaje del álgebra:

A	Falta de habilidad en operaciones con números enteros.	
B	Falta de habilidad en operaciones con potencias.	
C	Falta de habilidad en operaciones con fracciones.	
D	Falta de habilidad en operaciones combinadas con paréntesis.	
E	Comprensión del concepto de igualdad.	
F	Comprensión del resultado de la ecuación.	
G	Dificultad para interpretar enunciados verbales.	
H	Dificultad para identificar las variables / la incógnita.	
I	Traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico.	
J	Dificultad para establecer relaciones entre enunciados.	

(marque con una X tantas casillas como crea conveniente)

- (9) De las dificultades señaladas anteriormente, destaque tres por orden de mayor a menor importancia.

1ª dificultad destacada	
2ª dificultad destacada	
3ª dificultad destacada	

(escriba únicamente A, B, C,... en la casilla correspondiente)

- (10) Indique si percibe alguna mejoría en cuanto a la comprensión del álgebra cuando utiliza...

	SI	NO	NS/NC
Libro digital con proyector			
Videos didácticos			
Aula informática (actividades mediante el uso del ordenador)			
Videojuegos didácticos			
Trabajo en equipo			
Una clase inicial de repaso de operaciones con números enteros, potencias y fracciones.			

(marque con una X la casilla correspondiente)

ANEXO N° 2. TEMARIO RESOLUCIÓN ECUACIONES

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ecuación es una igualdad literal (letras además de números) que sólo es cierta para algunos valores de las letras.

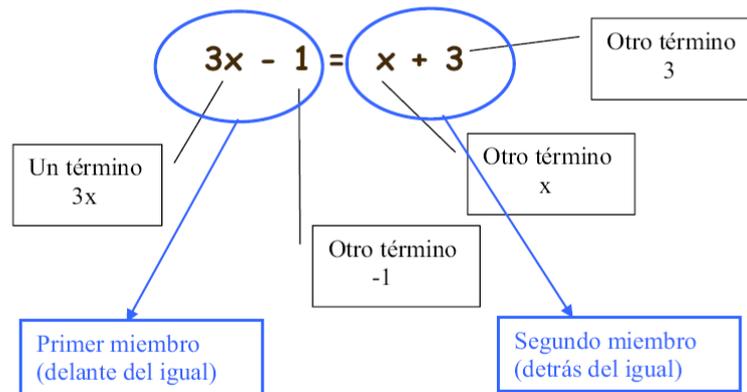
Soluciones de una ecuación son los números que la verifican, es decir, los números que convierten la ecuación en una igualdad de números cierta.

Resolver una ecuación es hallar sus soluciones:

En la ecuación $x + 4 = 12$ la igualdad sólo se verifica si $x = 8$. Se dice que **8** es la solución de la ecuación, en ningún caso 12

En la ecuación $x + 2 = 9$ la igualdad se verifica si $x = 7$. La solución de la ecuación es 7.

Términos de una ecuación son los sumandos que tienen cada miembro de la ecuación, pueden ser **términos en x**, y **términos independientes** (sólo números, sin parte literal).



Transposición de términos: Pasar términos de un miembro a otro de una igualdad según las siguientes reglas:

El término que está sumando en un miembro, pasa al otro restando, y viceversa. Si está multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo, o viceversa. Ejemplos:

$x - 9 = 3$	$x = 3 + 9$	$\frac{2x}{3} = 4$	$2x = 3 \cdot 4$	$x = \frac{3 \cdot 4}{2}$
-------------	-------------	--------------------	------------------	---------------------------

ECUACIONES CON INCÓGNITA EN UN SOLO MIEMBRO

Para resolver la ecuación: $2x + 7 = 13$

1) Se deja el término en x en uno de los miembros de la igualdad (a un lado del igual) y los términos independientes se pasan al otro miembro: $2x = 13 - 7$

2) Se reducen los términos semejantes (se suman, restan,...): $2x = 6$

3) Se despeja la incógnita: $x = 6/2$ $x=3$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 8 = 18$

b) $3x - 7 = 13$

c) $4x - 12 = 8$

d) $-5x - 20 = 10$

e) $8x - 40 = 0$

f) $-4x + 30 = 18$

g) $3x - 6 = 0$

h) $-3x - 2 = 4$

ECUACIONES CON INCÓGNITA EN AMBOS MIEMBROS DE LA IGUALDAD

Para resolver esta ecuación $6x - 4 = 3x + 2$

1) Se pasan todos los términos en x a uno de los miembros de la ecuación (a uno de los lados del igual), y se pasan los términos independientes al otro miembro: $6x - 3x = 2 + 4$

2) Seguir desde el punto anterior (reducir términos semejantes y despejar incógnita):

$$3x = 6 \quad x = 6/3 \quad x = 2$$

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 3 = 4x - 7$

b) $5x + 4 = 6x + 3$

c) $6x - 1 = 8x - 5$

d) $3x + 10 = 5x - 6$

e) $4x + 1 = 9x - 64$

f) $7x + 6 = 9x - 2$

g) $-3x + 2 = x + 10$

h) $-6x + 3 = -2x + 1$

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Para resolver esta ecuación $2(7 - x) + 7x = 8 - 5(x - 1) + 8x + 4$

1) Se suprimen los paréntesis aplicando las propiedades conocidas (distributiva, asociativa,..)

$$14 - 2x + 7x = 8 - 5x + 5 + 8x + 4$$

2) Seguir desde el punto anterior (pasar términos en x a un miembro y términos independientes al otro, reducir términos semejantes y despejar la incógnita):

$$-2x + 7x + 5x - 8x = 8 + 5 + 4 - 14 \quad 2x = 3 \quad x = 3/2$$

Resuelve las ecuaciones:

a) $3(x + 6) = 2(x - 5)$

b) $9(x - 1) = 6(x + 3)$

c) $8(x - 2) = 12(x - 3)$

d) $-3(2x + 5) = -4(-x + 2)$

e) $5(-2x + 6) = -3(-x + 3)$

f) $-2(x + 7) = 2(3x + 9)$

ECUACIONES CON DENOMINADORES

Para resolver esta ecuación: $\frac{3x}{4} + 1 = 7 \cdot \frac{(x-2)}{6}$

1) Se reduce a común denominador, calculando el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$\frac{9x}{12} + \frac{12}{12} = \frac{14(x-2)}{12}$$

$$9x + 12 = 14(x - 2)$$

2) Seguir desde el punto anterior (suprimir denominadores, pasar términos en x a un miembro y términos independientes al otro, reducir términos semejantes y despejar la incógnita):

$$9x + 12 = 14x - 28$$

$$9x - 14x = -28 - 12$$

$$-5x = -40$$

$$x = -40/-5$$

$$x = 8$$

Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{-x-5}{2} - 7 = 2x + 8$

b) $\frac{3x+8}{5} - 7 = -x + 9$

c) $\frac{4x-1}{3} + 4 = 2x - 5$

d) $\frac{5x-1}{7} + 2 = x + 9$

e) $\frac{-4x+5}{5} + 6 = -2x + 4$

f) $\frac{-2x+1}{2} - 4 = -3x + 6$

g) $\frac{x-2}{2} + 5 = 2x - 7$

h) $\frac{-x+8}{10} - 3 = -x - 4$

ANEXO N° 3. RECOPIACIÓN DATOS CUESTIONARIOS

