

Universidad Internacional de La Rioja
Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación

**Simulador / integrador digital del sistema
solar para el cálculo de trayectorias de
cuerpos con masa negligible**

Trabajo fin de estudio presentado por:	Óscar Javier Sánchez Ruiz
Tipo de trabajo:	Tipo 2: Aplicación práctica real
Directores:	Doctor Marc Jorba Cusco Doctor Daniel Pérez Palau
Fecha:	9 de febrero de 2022

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo modelar las fuerzas gravitacionales entre cuerpos del sistema solar para el desarrollo e implementación de un simulador que mediante la solución numérica de las ecuaciones permita calcular la trayectoria de un cuerpo con masa negligible utilizando como insumo la información generada por la NASA disponible en SPICE.

El código fue desarrollado en Python mediante el uso de las librerías de análisis de datos y análisis científico y de la librería Spiceypy, obteniendo, además de los vectores de estado (posición y velocidad) del cuerpo con masa negligible, el vector de las fuerzas que afectan al cuerpo desde los demás cuerpos del sistema y las gráficas que representan el comportamiento. El código permite la selección de los cuerpos, periodos de tiempo y marcos de referencia.

Finalmente, se aplicó el simulador para determinar la trayectoria del cometa Halley en los escenarios perihelio-perihelio y afelio-afelio, comparando los resultados del simulador con los datos reales del cometa.

Palabras clave:

SPICE, Spiceypy, Halley, simulador, N cuerpos

Abstract

The aim of this project is to model the gravitational forces between bodies of the solar system for the development and implementation of a simulator that, through the numerical solution of the equations, allows calculating the trajectory of a body with negligible mass used as input the information generated by NASA, available from SPICE.

The programming code was developed in Python using the data analysis and scientific analysis libraries and the Spiceypy library, obtaining, in addition to the state vectors (position and velocity) of the body with negligible mass, the vector of the forces affects the body from other bodies of the system and the graphs that represent the behavior. The programming code allows the selection of bodies, time periods (epochs) and reference frames.

Finally, the simulator was applied to determine the trajectory of Halley's Comet in the perihelion-perihelion and aphelion-aphelion scenarios, comparing the results of the simulator with the real data of the comet.

Keywords:

SPICE, Spiceypy, Halley, simulator, N-body problem

Índice de contenidos

1.	Introducción	1
1.1.	Justificación.....	1
1.2.	Planteamiento del trabajo	2
1.3.	Estructura del trabajo	2
2.	Contexto y estado del arte.....	4
2.1.	Descripción breve del sistema solar	4
2.2.	La evolución del entendimiento de los cuerpos celestes.....	8
2.2.1.	El concepto en los cuerpos celestes.....	8
2.2.2.	Entendimiento del movimiento de los cuerpos celestes	10
2.3.	El movimiento de los cuerpos.....	14
2.3.1.	Las leyes de Kepler	14
2.3.2.	Las leyes del movimiento	15
2.3.3.	Marcos de referencia inerciales y no inerciales	17
2.3.4.	La Ley de Gravitación Universal.....	21
2.3.5.	El problema de los N cuerpos	21
2.3.6.	Teoría de la Perturbaciones.....	24
2.4.	Información técnica complementaria.....	26
2.4.1.	JPL	26
2.4.2.	NAIF y SPICE	27
2.4.3.	Usos de SPICE	28
2.4.4.	Arquitectura con SPICE.....	30
3.	Objetivos	33
3.1.	Objetivo general.....	33
3.2.	Objetivos específicos	33

4. Metodología del trabajo	34
4.1. El modelo del simulador	34
4.2. El funcionamiento de SPICE	35
4.2.1. Objetos de las efemérides	35
4.2.2. Archivos <i>kernel</i> requeridos	36
4.2.3. Sistemas coordenados	38
4.3. Desarrollo del código de programación	40
4.3.1. Lenguaje de programación	40
4.3.2. Hardware utilizado	41
4.3.3. Estrategia de desarrollo	42
4.4. Selección del método de solución de los sistemas de EDO	42
4.4.1. Método de solución	42
4.4.2. Métodos numéricos evaluados	42
4.4.3. Criterios de evaluación	44
4.4.4. Resultados	45
4.4.5. Impacto de la disminución de la tolerancia	47
5. Descripción del modelo.....	51
5.1. Premisas.....	51
5.1.1. Baricentro	51
5.1.2. SSB	51
5.1.3. Masa negligible.....	52
5.1.4. Sistema de medidas.....	52
5.1.5. Masa de los cuerpos	54
5.1.6. Otras premisas.....	55
5.2. Modelamiento	55

5.2.1. Marco de referencia inercial	55
5.3. Efemérides	58
5.4. Descripción del código desarrollado.....	59
6. Resultados obtenidos.....	61
6.1. Cometa Halley.....	61
6.1.1. Datos generales	61
6.1.1. Sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales.....	61
6.1.2. Simulación de la trayectoria	64
6.1.3. Simulación del escenario perihelio - perihelio	65
6.1.4. Simulación del escenario afelio-afelio.....	68
6.1.5. Efecto de cuerpos más pequeños	71
7. Conclusiones y trabajo futuro	72
7.1. Conclusiones	72
7.2. Líneas de trabajo futuro.....	73
Referencias bibliográficas.....	75
Anexo A. Cuerpos del sistema solar	80
Anexo B. Datos relevantes de los cuerpos del sistema solar	86
Anexo C. Mecánica Hamiltoniana	95
Anexo D. Jacobiano del sistema de ecuaciones	102
Anexo E. Resultados de pruebas de PVI.....	103

Índice de figuras

Figura 1. <i>Esquema del sistema solar</i>	4
Figura 2. <i>Zonas del Sol</i>	5
Figura 3. <i>Geometría para un sistema coordinado móvil en traslación y rotación</i>	17
Figura 4. <i>Fuerza gravitacional entre 2 cuerpos en \mathbb{R}^3</i>	21
Figura 5. <i>Fuerza gravitacional entre n cuerpos en \mathbb{R}^3</i>	23
Figura 6. <i>Información técnica complementaria en SPICE</i>	27
Figura 7. <i>Ejemplos de eventos geométricos</i>	29
Figura 8. <i>Arquitectura general para el uso de SPICE</i>	30
Figura 9. <i>Etapas de un estudio de simulación</i>	34
Figura 10. <i>Objetos disponibles en SPICE</i>	36
Figura 11. <i>Estructura de un segmento en un archivo SPK</i>	37
Figura 12. <i>Estructura general de un archivo SPK</i>	38
Figura 13. <i>Encadenamiento y transformación de frames (marcos de referencia)</i>	39
Figura 14. <i>Búsqueda y encadenamiento de archivos en SPICE</i>	39
Figura 15. <i>Comportamiento del error vs tiempo vs desviación estándar (consolidado)</i>	46
Figura 16. <i>Estructura del código desarrollado</i>	60
Figura 17. <i>Cambios del vector de estado y efecto en el error, escenario perihelio-perihelio</i> ...	62
Figura 18. <i>Error detallado, variación en la componente x, escenario perihelio-perihelio</i>	62
Figura 19. <i>Error detallado, variación en la componente y, escenario perihelio-perihelio</i>	62
Figura 20. <i>Efecto de variación en las componentes en el error, escenario afelio-afelio</i>	63
Figura 21. <i>Error detallado, variación en la componente vy, escenario afelio-afelio</i>	64
Figura 22. <i>Efecto de variación en las componentes en el error, método Radau</i>	64
Figura 23. <i>Comportamiento del error vs número de intervalos</i>	65
Figura 24. <i>Distancia al Sol con condiciones iniciales originales (perihelio-perihelio)</i>	66

Figura 25. *Proyección yz de la órbita (perihelio-perihelio)* 66

Figura 26. *Distancia al Sol (perihelio-perihelio)* 67

Figura 27. *Perfil de velocidad del Halley (perihelio-perihelio)* 67

Figura 28. *Fuerzas sobre el cometa Halley (perihelio-perihelio)* 68

Figura 29. *Efecto de cada cuerpo en el cálculo de la distancia* 68

Figura 30. *Distancia al Sol con condiciones iniciales originales (afelio-afelio)* 69

Figura 31. *Proyección yz de la órbita (afelio-afelio)* 69

Figura 32. *Distancia al Sol (afelio-afelio)* 69

Figura 33. *Perfil de velocidad del Halley (afelio-afelio)* 70

Figura 34. *Fuerzas sobre el cometa Halley (afelio-afelio)*..... 70

Figura 35. *Efecto de cuerpos más pequeños en el cometa* 71

Índice de tablas

Tabla 1. <i>Componentes lógicos y kernels de SPICE</i>	32
Tabla 2. <i>Desarrollo de las etapas de simulación</i>	34
Tabla 3. <i>Elementos de la simulación</i>	35
Tabla 4. <i>Especificaciones del hardware utilizado</i>	41
Tabla 5. <i>Sprints para desarrollo del código</i>	42
Tabla 6. <i>Métodos numéricos por evaluar</i>	43
Tabla 7. <i>Valores por defecto de tolerancia para los métodos numéricos evaluados</i>	44
Tabla 8. <i>Resultados de la evaluación de los métodos numéricos</i>	46
Tabla 9. <i>Conclusiones de la evaluación de los métodos numéricos</i>	46
Tabla 10. <i>Comportamiento de la tolerancia</i>	49
Tabla 11. <i>Unidades de medida</i>	53
Tabla 12. <i>Archivos SPK utilizados</i>	58
Tabla 13. <i>Datos de simulación para los escenarios</i>	65
Tabla 14. <i>Cuerpos del sistema solar y kernel SPK</i>	80
Tabla 15. <i>Masas de los cuerpos del sistema solar</i>	86
Tabla 16. <i>Datos relevantes de los planetas del sistema solar</i>	94
Tabla 17. <i>PVI utilizados para la selección del método numérico</i>	103
Tabla 18. <i>Conversiones de las EDO tipo PVI de orden superior a 1</i>	103
Tabla 19. <i>Comportamiento del error en cada PVI</i>	104
Tabla 20. <i>Comportamiento de los métodos en cada PVI</i>	107
Tabla 21. <i>Resultados de la evaluación de los métodos numéricos</i>	110
Tabla 22. <i>Efecto de la disminución de tolerancia en el error para cada PVI</i>	111
Tabla 23. <i>Comportamiento de la tolerancia (error vs t.procesamiento) para cada PVI</i>	126

1. Introducción

1.1. Justificación

La aparición y el rápido avance tecnológico que han mostrado los procesadores en los últimos 50 años han generado una revolución en todo nivel. Se puede asegurar que actualmente no existe un área del conocimiento que no utilice la potencialidad de los ordenadores para facilitar las actividades y que, por tanto, la gran mayoría de la humanidad conoce algo de computación.

Esta potencialidad ha abierto puertas a la solución de problemas que antes tenían altos grados de dificultad al requerir una solución manual, demorada y susceptible de errores; un ejemplo de estos problemas es el cálculo de miles de datos que se encuentran afectados por ecuaciones derivadas de la aplicación de la ciencia. Así, hoy en día es posible realizar cálculos en segundos que antes tardarían días; ello ha permitido el avance en la investigación científica de muchos fenómenos.

Uno de los fenómenos que el ser humano siempre ha querido resolver se relaciona con el entendimiento del Universo, no solamente por la innata curiosidad de entender aquello que nos rodea, sino por el evidente impacto que tiene en nuestra vida, nuestra existencia y nuestra continuidad todo lo que en el Universo sucede, especialmente en nuestro contexto cercano: el sistema solar.

Las teorías sobre el funcionamiento de nuestro sistema solar datan de siglos atrás y tales teorías se han depurado y mejorado a tal punto que hemos viajado y enviado emisarios para conocer más de nuestro Universo. No obstante, estas teorías han encontrado muchas veces la barrera de la complejidad de soluciones analíticas o de la necesidad de realizar complejos, numerosos y lentos cálculos.

La construcción de un simulador del sistema solar que recoja estas teorías e implemente una solución numérica, utilizando información de alta calidad recolectada y generada durante años por las agencias espaciales, genera una herramienta para conocer y experimentar con el sistema solar sin necesidad de las costosas misiones espaciales y con la ventaja adicional de poder acelerar el tiempo a grandes escalas de tal forma que se pueda conocer el resultado de años en apenas unos minutos.

El presente trabajo presenta el diseño e implementación de un simulador del sistema solar para el cálculo de trayectorias de masas muy pequeñas, mediante el modelamiento de las fuerzas de atracción entre los cuerpos celestes, de tal forma que sirva para profundizar en el conocimiento del sistema solar ya sea por medio de la experimentación con el simulador o mediante la revisión, ajuste y actualización del modelamiento de los fenómenos físicos; esta última es una ventaja adicional e importante, pues permite que no solamente se pueda utilizar el simulador en su alcance inicial, sino que sea posible comprender sus bases y aumentar su alcance.

1.2. Planteamiento del trabajo

Uno de los retos matemáticos existentes es la solución analítica al problema de los N cuerpos, entendiendo como solución analítica aquella que presenta ecuaciones que relacionan posición y tiempo. Esta solución se busca pues es la base para determinar la posición de los cuerpos celestes y por tanto permite predecirlos.

Si bien la solución analítica sigue siendo un reto, la solución numérica es posible mediante el uso de los métodos numéricos; y si bien existen muchas investigaciones sobre nuevos y mejores métodos numéricos, es posible lograr una solución suficientemente exacta con los métodos existentes y disponibles.

Este trabajo tiene como finalidad el desarrollo de un código que implemente el modelamiento de las fuerzas de atracción entre los cuerpos celestes con el fin de calcular la trayectoria de una masa negligible, utilizando los datos o efemérides generados por las agencias espaciales.

1.3. Estructura del trabajo

Con el fin de presentar el desarrollo realizado, el presente documento se ha dividido en 7 capítulos. En el Capítulo 1 se exponen elementos preliminares como la justificación del trabajo, el planteamiento del desarrollo realizado y la forma en la cual se encuentra estructurado el documento.

Comenzando la explicación del desarrollo realizado y bajo la guía de los pasos que rigen el método científico, en el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo, iniciando por una descripción breve del sistema solar, pasando por una revisión de la evolución histórica del entendimiento del movimiento de los cuerpos celestes y

llegando a la explicación de las teorías aplicables. Fundamentándose en estas bases, en el Capítulo 3 se presentan los objetivos del presente trabajo, tanto generales como específicos.

A continuación, en el Capítulo 4 se describe la metodología aplicada para lograr los objetivos propuestos, tanto a nivel de métodos numéricos como a nivel de arquitectura del código desarrollado. Con base en ello, en el Capítulo 5 se expone el modelamiento realizado con base en las teorías físicas aplicables para obtener el sistema de ecuaciones a resolver numéricamente.

Posteriormente, en el Capítulo 6 se presentan los resultados obtenidos de la implementación del modelamiento realizado, los métodos numéricos aplicados y el código desarrollado, aplicados a una masa negligible conocida: el cometa Halley.

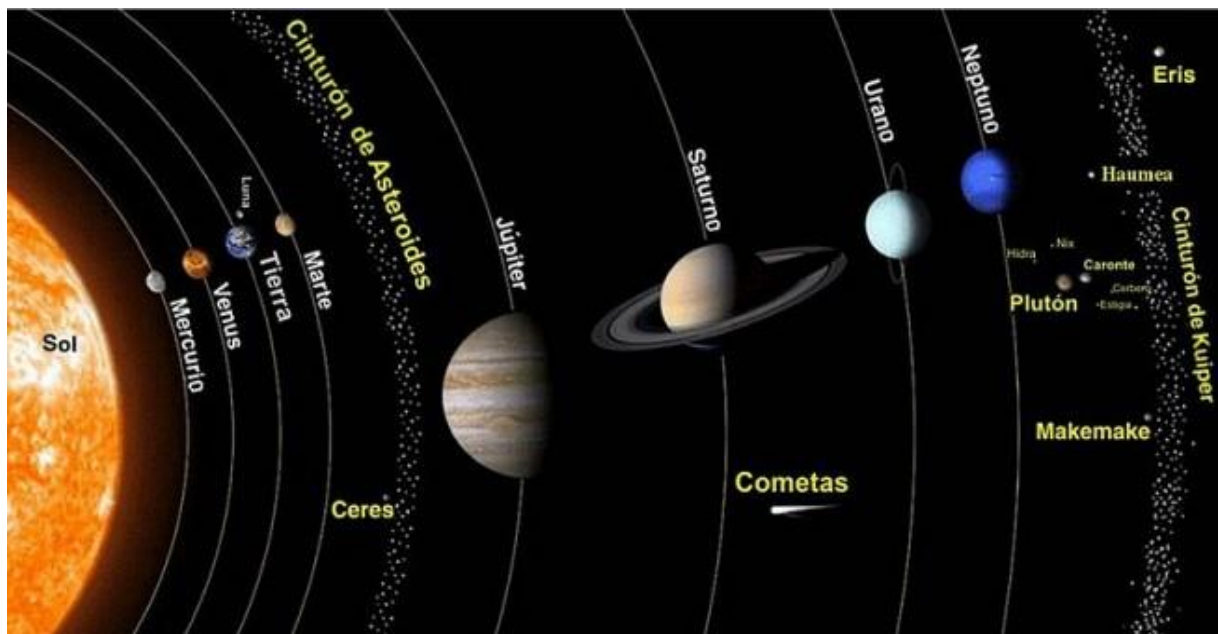
Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones del desarrollo realizado y las líneas de trabajo futuro para el simulador.

2. Contexto y estado del arte

2.1. Descripción breve del sistema solar

Describir completamente el sistema solar¹ requiere un profundo análisis que escapa del alcance del presente trabajo; no obstante, tiene alta relevancia realizar una breve descripción resaltando detalles que permiten entender el conjunto que se ha modelado y simulado.

Figura 1. Esquema del sistema solar



Fuente: ¿Cuáles son los Elementos del Sistema solar? (Aular, 2020)

El sistema solar se encuentra ubicado en el brazo en espiral llamado Espuela de Orión, un brazo exterior de la galaxia Vía Láctea (*Milky Way*)² (NASA, s.f.-a)³. Su formación se estima hace cerca de 4.5 billones de años a partir de una densa nube de polvo y gas interestelar; esta nube colapsó formando una nebulosa solar (un disco de material que gira y se arremolina). Debido a la gravedad, el material se fue concentrando en el centro de la nebulosa, aumentando la presión a tal punto que los átomos de hidrógeno empezaron a combinarse y formar átomos de helio, liberando gran cantidad de energía; así nació el Sol (NASA, s.f.-a).

¹ Relativo al sol, proviene del latín “solis”; término utilizado en muchos idiomas; en otros idiomas tienen una palabra diferente, aunque en algunos se mantiene como sistema solar (por ejemplo, en inglés el término es “sun” pero el conjunto es “solar system”)

² Nombre dado por los griegos debido al gran parecido con una mancha lechosa en el firmamento, por lo cual la denominaron *galaxia kyklos* que se traduce como *círculo lechoso* (Online Etymology Dictionary, 2021).

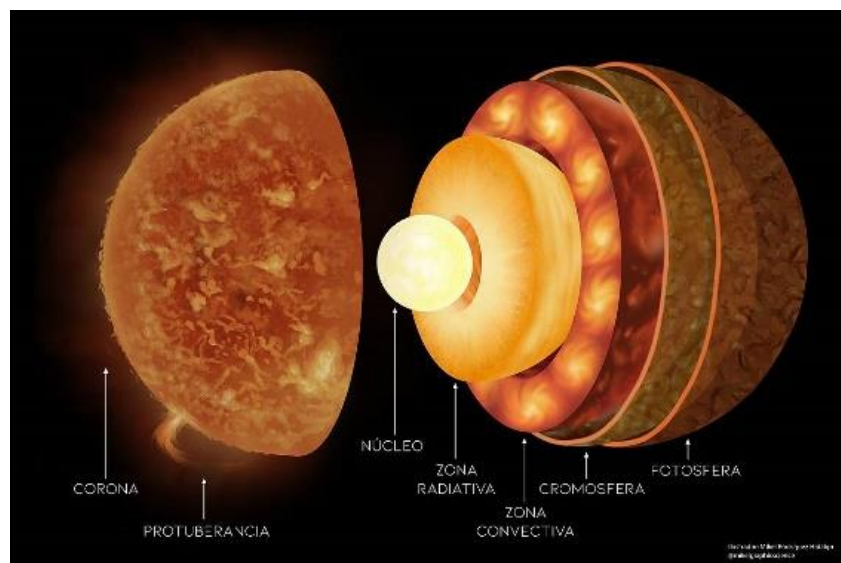
³ NASA: National Aeronautics and Space Administration. Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio.

La materia que se encontraba más alejada en el disco también empezó a agruparse, formando objetos cada vez más grandes; algunos de ellos crecieron lo suficiente para generar gravedad y tomar forma esférica, convirtiéndose así en planetas, planetas enanos y las lunas más grandes. Algunas otras se convirtieron en cuerpos más pequeños e irregulares como asteroides, cometas y lunas pequeñas. Y otros no lograron agruparse lo suficiente, como el caso del cinturón de asteroides, que está formado de trozos y piezas del sistema solar primitivo que no se lograron agrupar (NASA, s.f.-a). En la Figura 1 se observa la configuración esquemática del sistema solar.

Según la clasificación avalada por la Unión Astronómica Internacional (UAI - *International Astronomical Union IAU*), los cuerpos en el sistema solar se clasifican así (NASA, s.f.-b):

- **Sol:** es una estrella enana amarilla, cuya gravedad mantiene juntos a todos los cuerpos del sistema solar; concentra el 99.86% de la masa del sistema solar. El Sol orbita el centro de la galaxia a una velocidad promedio de 720,000 km/h; aun así, le toma 230 millones de años completar su órbita. Así mismo, el Sol rota sobre su propio eje, inclinado 7.25° con respecto al plano de las órbitas de los planetas. Ya que el Sol no es sólido, diferentes partes giran a diferentes velocidades; el giro toma 25 días terrestres en el ecuador y 36 días terrestres en los polos. El Sol tiene un movimiento de traslación con respecto al Baricentro del sistema solar (SSB - *Solar System Barycenter* – ver numeral 5.1.1).

Figura 2. Zonas del Sol



Fuente: (Observatorio Científico Tecnológico y de Innovación, 2021)

El Sol tiene 6 regiones: en el interior, el *núcleo*, la *zona radiactiva* y la *zona convectiva*; la *superficie visible* o *fotósfera*, la *cromosfera* y la *corona* (ver Figura 2) (NASA, s.f.-c).

- **Planetas:** en general, son los cuerpos más grandes después del Sol; de acuerdo con la definición aceptada por la UAI (IAU, 2006):

“Un planeta es un cuerpo celestial que:

- a) Se encuentra en órbita alrededor del Sol⁴
- b) Tiene masa suficiente para que su auto gravedad supere las fuerzas de cuerpo rígido de modo que adopte una forma de equilibrio hidrostático (casi redonda)
- c) Ha despejado el vecindario alrededor de su órbita”

Así, el sistema solar tiene actualmente 8 planetas, divididos en 2 grupos (NASA, s.f.-d):

- Planetas interiores, rocosos o terrestres⁵ (*rocky planets*): *Mercurio, Venus, Tierra y Marte*. Son los planetas más cercanos al Sol, pequeños y formados principalmente por materiales rocosos y transparentes.
- Planetas exteriores, que se pueden dividir en gigantes gaseosos (*Júpiter y Saturno*) y gigantes de hielo (*Urano y Neptuno*). En general, estos planetas tienen anillos.

En la Tabla 16 se presentan las características más importantes de los planetas.

- **Planetas enanos:** de acuerdo con la definición aceptada por la UAI (IAU, 2006), un planeta enano, a diferencia de un planeta no ha despejado el vecindario alrededor de su órbita y no es un satélite. En esta categoría clasifican: *Plutón*⁶, *Makemake, Eris y Haumea*, ubicados en el cinturón de Kuiper y *Ceres*, ubicado en el cinturón de asteroides.
- **Satélites:** son cuerpos que orbitan a los planetas, de diferentes tamaños. Por ejemplo, la Luna en la Tierra, Ganímedes en Júpiter o Titán en Saturno
- **Cuerpos menores:** Son los demás cuerpos del sistema solar, que se subdividen en:
 - Asteroides: su tamaño oscila entre los 50 m y los 10,000 Km de diámetro equivalente.
 - Objetos transneptunianos: se ubican en la zona exterior del sistema solar, en regiones como el cinturón de Kuiper, el disco disperso y la nube de Oort.

⁴ En general, debe orbitar alrededor de una estrella; la definición se generó inicialmente para el sistema solar

⁵ Por su similitud con la Tierra

⁶ Considerado un planeta hasta el año 2006

Simulador / integrador digital del sistema solar para el cálculo de trayectorias de cuerpos con masa negligible

- Cometas: son cuerpos helados, compuestos por hielo, polvo y rocas, con órbitas muy excéntricas; su origen se encuentra en el cinturón de Kuiper y la nube de Oort.
- Meteoroides: son cuerpos con diámetros equivalentes menores a 50 m, pero más grandes que el polvo cósmico. Suelen ser fragmentos de cuerpos más grandes, como cometas y asteroides.

Existen varias zonas importantes por mencionar:

El cinturón de asteroides, ubicado entre Marte y Júpiter, está compuesto por trozos y piezas del sistema solar que no se lograron agrupar.

Ello mismo sucede en el **cinturón de Kuiper** (NASA, s.f.-e), una región en forma de dona ubicada más allá de la órbita de Neptuno, la cual está conformada por millones de objetos helados, conocidos como objetos del cinturón de Kuiper (KBOs – *Kuiper Belt Objects*) o como objetos transneptunianos (TNOs – *Trans-Neptunian Objects*), la cual se extiende desde las 30 UA⁷ del Sol (órbita de Neptuno) hasta las 50 UA del Sol en la parte principal, pero llegando hasta las 1,000 UA para una segunda región denominada el cinturón disperso, convirtiéndola en una de las zonas más grandes del sistema solar.

Más allá del cinturón de Kuiper se encuentra la **nube de Oort**, la región más distante del sistema solar y considerada como el límite exterior del sistema solar (NASA, s.f.-f); se cree que su forma es como un escudo esférico gigante conformado por millones de piezas heladas de tamaño de montañas o mayores, convirtiéndose en una gran burbuja de paredes gruesas; se cree que el borde interno de la nube de Oort se encuentra entre las 2,000 y las 5,000 UA del Sol y que el borde exterior se encuentra entre las 10,000 y las 100,000 UA del Sol.

Como se indicó atrás, el sistema solar es la región del espacio bajo la influencia del Sol, región que es llamada *heliosfera* (NASA, s.f.-g); esta región se crea por el flujo del viento solar desde el Sol, actuando como una burbuja que obliga al material interestelar (aquel que llena la región local de nuestra galaxia) a fluir alrededor de la heliosfera, generando una perturbación del viento solar que crea una burbuja secundaria llamada *heliovaina* (*heliosheath*), compuesta por viento solar caliente y más lento.

⁷ Unidad Astronómica, ver numeral 5.1.4

2.2. La evolución del entendimiento de los cuerpos celestes

2.2.1. El concepto en los cuerpos celestes

Nuestra inquietud de cómo funciona el movimiento de los cuerpos celestiales se remonta a la antigüedad. Como lo expresa (Guerrero Pino, 2004, pág. 100): “la impresión que se lleva una persona al observar la noche estrellada por un tiempo prolongado” generó las primeras teorías entre los griegos, teniendo como principales representantes a Platón (427 a. c – 347 a. c) y Aristóteles (384 a. c – 322 a. c), quienes trabajaron sobre el modelo formulado por Eudoxo de Cnido (408 a. c – 355 a. c), según el cual las estrellas y planetas⁸ giraban alrededor de la Tierra en círculos celestiales, conocido como geocentrismo (Artigue & Pollio, 2013). No obstante, este modelo no lograba explicar el movimiento retrógrado de los planetas, pues la observación mostraba que los planetas a veces parecían retroceder en su ubicación con relación en la Tierra y algunas veces se observaban más brillantes. El modelo fue popularizado por Claudio Ptolomeo (100 d. c – 170 d. c) quien a través de epiciclos (círculos alrededor sobre un deferente) logra explicar el movimiento retrógrado y el aumento de brillo de los planetas (Guerrero Pino, 2004), logrando comunión con las ideologías religiosas imperantes.

Filolao de Tarento (siglo V a. c) formuló un modelo en el cual la Tierra, el Sol, la Luna y los planetas giran alrededor de un fuego central oculto (Artigue & Pollio, 2013); por su parte, luego de realizar mediciones que determinaron que el Sol es mayor que la Tierra, Aristarco de Samos (310 a. c – 230 a. c) propuso un modelo heliocéntrico del sistema solar, en el cual el Sol se encuentra en el centro del Universo (Guerrero Pino, 2004). Esta teoría fue rechazada pues, además de reducir la posición privilegiada del hombre en el Universo, no explicaba porque los objetos en la Tierra no escapaban con el movimiento, o porque al lanzar un objeto al aire volvía al mismo punto (debería llegar a otro punto dado el movimiento) (Guerrero Pino, 2004).

La teoría heliocéntrica fue retomada por Nicolás Copérnico (1473-1543), al observar que el modelo de Copérnico requería de varios epiciclos para el mismo planeta mientras que el modelo heliocéntrico lo explicaba de manera natural (Guerrero Pino, 2004); comenzó a expandirla por Europa, encontrando el rechazo de la ideología religiosa medieval que impidió finalmente la publicación de sus teorías. En este punto de la historia entran en el escenario

⁸ El Sol, la Luna, Venus Mercurio, Marte, Júpiter y Saturno eran considerados planetas

científico 3 importantes nombres: Tycho Brahe (1546-1601), Galileo Galilei (1564-1642) y Johannes Kepler (1571-1630), quienes fueron contemporáneos y en conjunto (aunque no necesariamente en equipo) generan un gran impulso en el entendimiento del movimiento de los cuerpos celestes.

La contribución de Brahe, descendiente de la familia imperial (Linton, 2004), “no tiene el carácter teórico, matemático y reflexivo de Copérnico, Kepler y Galileo, sino que está fundada en la observación meticulosa y detallada de los cielos” (Guerrero Pino, 2004, pág. 108). Brahe logró la construcción del mejor observatorio astronómico de la época bajo el cargo de astrónomo imperial (Artigue & Pollio, 2013); nombró a Kepler como su asistente, con quien tenía fuertes diferencias, con el fin de lograr acuerdos (Linton, 2004). Entre sus logros se encuentra, como indica (Guerrero Pino, 2004), “reelaborar y completar el mapa de los cielos como también construir tablas astronómicas bastante precisas sobre la ubicación de los planetas en diferentes momentos del año”, logrando observar el primer cometa, entre otros.

En simultáneo, Galilei, conociendo la teoría de Copérnico y habiendo escuchado sobre el reciente invento del telescopio como herramienta espía en batallas, construyó y perfeccionó un telescopio para la observación de los cielos, con lo cual logró estudiar varios cuerpos del sistema solar, descubriendo la existencia de lunas alrededor de los planetas, existencia de múltiples estrellas, corroborando la teoría heliocéntrica y publicando sus trabajos, los cuales fueron rechazados por la Iglesia (Artigue & Pollio, 2013).

Kepler conoció y apoyó a Galileo y continuó con sus estudios, interesado especialmente en el movimiento de los planetas, apoyándose en las observaciones de Copérnico y con la basta cantidad de datos obtenidos de su trabajo con Brahe. Como indican Artigue & Polilo (2013, pág. 3957), “en un principio Kepler consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía”. Esta teoría, conocida como la armonía de las esferas celestes, indica que las órbitas de los planetas deben seguir una forma geométrica simple. Insistiendo en tal consideración, Kepler probó con diferentes figuras geométricas, círculos, combinaciones de círculos, óvalos y finalmente, elipses. Con base en estas últimas publica sus 3 leyes (Artigue & Pollio, 2013), siendo el primero en enunciar leyes matemáticas que gobiernan el movimiento de los planetas (Guerrero Pino, 2004).

En una de las obras de mayor impacto en la historia, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, sir Isaac Newton (1642-1727) publicó en 1687 la Ley de Gravitación Universal,

basándose en las observaciones de Copérnico, las conclusiones de Galileo y las leyes de Kepler (Artigue & Pollio, 2013). Así, es Newton quien finalmente cierra este capítulo sobre los 2 modelos existentes, explicando la atracción entre los cuerpos celestes, despejando las dudas generadas sobre el modelo heliocéntrico y dando solidez matemática a las leyes y teorías planteadas hasta el momento (Guerrero Pino, 2004), especialmente las leyes de Kepler. Se crean así los fundamentos de la mecánica clásica y la mecánica celeste⁹, convirtiendo al siglo XVII en una época de una transformación completa en astronomía (Linton, 2004).

2.2.2. Entendimiento del movimiento de los cuerpos celestes

Si bien las bases sentadas por Kepler y Newton representaron una revolución en el entendimiento del movimiento de los cuerpos del sistema solar, el mismo Newton manifestó la imprecisión de las órbitas elípticas keplerianas si se tenían en cuenta las perturbaciones gravitatorias de otros planetas. Era necesario entonces un mayor desarrollo para resolver varias cuestiones, como el retraso o adelanto que se observaba en los datos de Brahe para las órbitas de Saturno o Júpiter con respecto a las predicciones teóricas (Arenas, 2014).

A principios del siglo XVII los métodos que se utilizaban para analizar los movimientos correspondían a la geometría de la antigua Grecia; a partir de la publicación del *Principia*, se inició un desarrollo acelerado de los métodos matemáticos con base en la filosofía de Descartes, a través de los trabajos en cálculo diferencial de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) profundizados por Johann Bernoulli (1667-1748) y su hermano Jakob Bernoulli (1654-1705) y de los estudios de Pierre Varignon (1654-1722) enfocados principalmente a la descripción de las teorías Newtonianas con base en el cálculo diferencial. Así, a finales del siglo XVII, la astronomía física se transformó en mecánica celeste, con la dinámica reducida a la solución de ecuaciones diferenciales (Linton, 2004).

Esta transformación generó un gran desarrollo matemático durante la primera parte del siglo XVIII, a cargo de tres hombres: Alexis Claude Clairaut (1713-1765), Leonhard Euler (1707-1783), and Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Clairaut, estudió la forma de la Tierra y el movimiento de la Luna. Euler, uno de los matemáticos más importantes de la historia, aportó

⁹ Estudio de los movimientos de los cuerpos celestes en virtud de los efectos gravitatorios que ejercen sobre ellos otros cuerpos celestes (Arenas Herrera, 2013)

en astronomía en la determinación de órbitas, el cálculo de la paralaje¹⁰ solar y la teoría de refracción (Linton, 2004), además de sus avances en la solución del problema de 3 cuerpos (Artigue & Pollio, 2013). Por su parte, D'Alembert realizó importantes avances en la reducción de complejidad en las ecuaciones diferenciales que caracterizan a un sistema mecánico a través del concepto de ligaduras (Díaz Sánchez, 2012).

Para la segunda parte del siglo XVIII resaltan los aportes de dos grandes matemáticos: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Lagrange, dentro de sus grandes aportes históricos, introdujo el método de variación de constantes, método ampliamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales de orden terciario (Artigue & Pollio, 2013); es muy importante su aporte con la creación de la mecánica Lagrangiana, la cual permite generalizar las ecuaciones de movimiento de tal forma que sean invariantes con respecto al sistema de coordenadas mediante la implementación del *Lagrangiano* (Díaz Sánchez, 2012); adicionalmente, contribuyó con la solución del problema de 3 cuerpos restringido a una configuración de triángulo equilátero (Artigue & Pollio, 2013). Por su parte, Laplace, además del método de solución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada que lleva su nombre y otros valiosos aportes, “demostró que las perturbaciones orbitales no eran acumulativas como temía Newton, sino que se repetían con un periodo de 929 años” (Arenas, 2014); además, basado en el trabajo de Lagrange, “demostró que la excentricidad de las órbitas planetarias está acotada inferior y superiormente” (Arenas, 2014). También resalta el estudio de las mareas y la influencia del efecto Coriolis¹¹.

Para la segunda parte del siglo XIX, William Rowan Hamilton (1805-1865) postuló su teoría que originó la mecánica Hamiltoniana, que, si bien no presenta un contenido físico nuevo, es fácilmente extensible a otras áreas de la Física (Díaz Sánchez, 2012). Hamilton introduce el principio de mínima acción¹², según el cual entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , entre todas las trayectorias posibles, una partícula seguirá la trayectoria donde la acción S sea mínima; este principio permite la simplificación de muchos sistemas mecánicos, entre ellos el sistema solar, logrando que se explique con gran aproximación los movimientos de los cuerpos.

¹⁰ Desviación angular de la posición aparente de un objeto. La paralaje solar es el ángulo bajo el cual se observa el radio ecuatorial de la Tierra desde el centro del Sol

¹¹ Fue descubierto y analizado inicialmente por Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843)

¹² Se considera más exacto llamarlo el principio de acción estacionaria, aunque es menos popular

La aplicación de las teorías de Kepler, Newton y los diferentes métodos de solución matemáticos generó retos como el problema de N -cuerpos, el cual consiste en la búsqueda de una solución analítica para la trayectoria de N cuerpos, cada uno de ellos sometido a las fuerzas de atracción de $N - 1$ cuerpos. En 1884, el rey Óscar II de Suecia y Noruega decide festejar su cumpleaños con una competencia matemática, mediante el reto de solución de 4 problemas matemáticos, entre ellos el problema de N -cuerpos (Artigue & Pollio, 2013). En 1887, Henri Poincaré (1854-1912), considerando irresoluble el problema de N cuerpos, presenta un desarrollo del problema de 3 cuerpos que le hizo acreedor al premio; no obstante, en una revisión posterior se detectaron imprecisiones que Poincaré declaró errores y cuya corrección se considera el comienzo de la teoría del caos (Arenas Herrera, 2013). Poincaré basó su solución en la mecánica Hamiltoniana, logrando reducir un problema de 18 variables a 8 variables gracias a 10 constantes conocidas, argumentando que no existen constantes adicionales que pudieran reducir más la dimensión del sistema y concluyendo la no integralidad del problema y la potencial inestabilidad del sistema solar (Arenas, 2014). Un aporte muy importante entregado por la solución de Poincaré es la observación que la mayoría de los sistemas celestes se pueden clasificar como sistemas Hamiltonianos próximos a integrables, lo que generó la Teoría de Perturbaciones (Arenas, 2014).

Esta potencial inestabilidad despertó la curiosidad e interés de muchos científicos. Para el siglo XX, un equipo conformado por tres notables matemáticos realizó un nuevo avance importante en esta vía: Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), Vladimir Igorevich Arnold (1937-2010) y Jürgen Moser (1928-1999), quienes postularon el Teorema KAM (nombre conformado por las primeras letras de sus apellidos, y según el cual “los sistemas hamiltonianos débilmente perturbados tienden a mantener su estabilidad”; siendo el sistema solar considerado un sistema Hamiltoniano, este teorema aportó respuestas a muchos interrogantes.

Para inicios del siglo XX, la evolución de las teorías permitía la predicción de la órbita de los planetas con buena precisión, con excepción de Mercurio, el cual mostraba un movimiento de precesión del perihelio¹³ que no podía ser explicado por las teorías vigentes. Esta precisión se comprobó cuando Urbain Le Verrier (1811-1877) pudo determinar la existencia de Neptuno

¹³ Teniendo en cuenta las perturbaciones de los demás planetas y otros cuerpos celestes y que el Universo no es plano, la posición del perihelio no es fija y va oscilando a lo largo de los años. A este movimiento se le denomina precesión del perihelio

utilizando únicamente matemática; Le Verrier, buscando una explicación a la precesión del perihelio de Mercurio, calculó la influencia de Venus, pero al no ser suficiente postuló la existencia de un planeta cero ubicado entre el Sol y Mercurio, que la comunidad científica denominó Vulcano. A diferencia de lo sucedido con Neptuno, los astrónomos no lograron encontrar a Vulcano ni a los vulcanoides (fragmentos flotantes de Vulcano en una especie de cinturón de asteroides). Fue entonces cuando Albert Einstein (1879-1955) promulgó su Teoría de la Relatividad General, la cual “explicaba la gravedad como una deformación que las masas creaban en el espacio circundante, es decir, geometrizó la gravedad” (Arenas Ferrer, 2012): en general, los cuerpos que concentran masas muy grandes generan una curvatura del espacio-tiempo (campo gravitacional). Bajo la Teoría de Perturbaciones, la solución provista por la Teoría General de la Relatividad “consiste en calcular la nueva trayectoria como una suma de la solución newtoniana y una perturbación con un parámetro adimensional de la perturbación” (Arenas Ferrer, 2012). Estudios posteriores demostraron también la existencia de la precesión del perihelio tanto en Venus como en la Tierra, aunque con un efecto mucho menor, el cual había sido asumido dentro de la tolerancia de precisión de los cálculos.

Aunque estas teorías habían resuelto muchos de los interrogantes y cerrado el cerco de incertidumbre frente a la estabilidad del sistema solar, el desarrollo de mejores herramientas y la rápida evolución de los procesadores permitieron el surgimiento de nuevas dudas. El Teorema KAM estableció la estabilidad como una probabilidad dependiente de perturbaciones pequeñas, de tal forma que debido al carácter no integrable y caótico del sistema solar sean necesarios métodos numéricos y simulaciones para un horizonte de tiempo de 10^9 años. Y precisamente, entre los años 80 y 90 del siglo XX y más específicamente en el año 2009, Jacques Laskar (1955-actual) ha investigado sobre el sistema solar para el Instituto de Mecánica Celeste de Paris y mediante simulaciones y el uso de otros métodos, ha integrado el movimiento de los 8 planetas del sistema solar para 200 millones de años, mostrando un comportamiento caótico de las trayectorias, especialmente para Mercurio, Venus, La Tierra y Marte (Arenas, 2014); como indica Arenas (Arenas, 2014): “las distancias entre dos órbitas inicialmente próximas se multiplicaban por tres cada cinco millones de años”, por lo cual una predicción es imposible más allá de 100 millones pues con un error del $1 \times 10^{-8} \%$ en las condiciones iniciales conduce a un error del 100% luego de 100 millones de años, comportamiento típico de un sistema caótico.

2.3. El movimiento de los cuerpos

Como se presentó en la evolución del entendimiento del movimiento de los cuerpos celestes, la mecánica clásica logra una gran aproximación a la explicación de este movimiento, cuyas bases son las leyes de Kepler y la mecánica Newtoniana.

2.3.1. Las leyes de Kepler

Las leyes de Kepler fueron originalmente enunciadas así en su Libro Quinto, las Armonías del mundo (Serway & Jewett, Jr, 2008):

Primera ley: *Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.* También conocida como la Ley de las Elipses (Arenas Ferrer, 2012).

Segunda ley: *El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.* También conocida como la Ley de las áreas (Arenas Ferrer, 2012).

Tercera ley: *El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.* También conocida como la Ley Armónica (Arenas Ferrer, 2012).

Kepler obtuvo estas leyes a partir de la observación empírica y los años de estudio siguientes han probado que se cumplen en muchos cuerpos celestes. La promulgación de las leyes de Newton y su aplicación a la Gravitación Universal y la posterior evolución de los principios de las leyes de Kepler han generado una forma más general de dichas leyes, como lo explica Feynman (Goodstein & Goodstein, 1999):

Primera ley: *Bajo la fuerza de atracción gravitacional de un objeto astronómico el movimiento de otro objeto a su alrededor sigue una trayectoria cónica (círculo, elipse, parábola, hipérbola).*

Las órbitas elípticas son un caso especial de la forma general, que cumplen los planetas alrededor del Sol, con 2 puntos con respecto al Sol: *afelio* (más lejano) y *perihelio* (más cercano); para un objeto orbitando la Tierra, la órbita también es elíptica y los puntos se llaman *apogeo* y *perigeo*. En todo caso, “la primera Ley de Kepler es un resultado directo de la naturaleza de cuadrado inverso de la fuerza gravitacional” (Serway & Jewett, Jr, 2008).

Segunda ley: *El radio vector de origen en el Sol y extremo en el punto de posición de cada planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.*

La validez de esta Ley se explica a través de la conservación del momento angular, mediante el cual se demuestra que la segunda Ley se cumple para cualquier situación que involucre una fuerza central (como el Sol), ya que en tales situaciones la fuerza gravitacional genera que la cantidad de movimiento angular de los planetas sea constante (Serway & Jewett, Jr, 2008).

Tercera ley: *Los cuadrados de los periodos siderales de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.*

$$a^3 \propto T^2 \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = K_s$$

A partir de la Ley de Gravitación Universal (numeral 2.3.4), se comprueba la existencia de una constante, relacionada con constantes universales como G (gravitación Universal) y π y con constantes del caso específico, como M_s (masa del Sol) y m (masa del cuerpo en estudio) (Serway & Jewett, Jr, 2008) y (Wikipedia, s.f.-a):

$$K_s = \frac{4\pi^2}{G(M_s + m)}$$

2.3.2. Las leyes del movimiento

La base de la mecánica clásica son las 3 leyes del movimiento enunciadas por Newton, según las cuales (Serway & Jewett, Jr, 2008)¹⁴:

Primera ley: *En ausencia de fuerzas externas, cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con velocidad constante (esto es, con rapidez constante en línea recta).* También es conocida como la *Ley o Principio de Inercia*¹⁵ (Meriam & Kraige, 1998).

Segunda ley: *Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa: $a \propto \frac{F}{m}$, $a, F \in \mathbb{R}^n$.*

¹⁴ No corresponde a la cita textual de las leyes como fueron promulgadas por Newton. Corresponde a un planteamiento práctico que se ajusta al nivel técnico que se maneja en el presente documento

¹⁵ Inercia: Tendencia de un cuerpo a conservar su estado de movimiento (Young, Freedman, & Ford, 2009)

Por lo cual, se obtiene (con una constante de proporcionalidad de 1):

$$F = m \cdot a, \quad F, a \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

También se conoce como la *Ley fundamental de la dinámica* (Meriam & Kraige, 1998)¹⁶.

Tercera ley: *si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (una “acción”), entonces, B ejerce una fuerza sobre A (una “reacción”). Estas dos fuerzas tienen la misma magnitud, pero dirección opuesta, y actúan sobre diferentes cuerpos* (Young, Freedman, & Ford, 2009).

También es conocida como el *Principio de acción y reacción*.

La aplicación general de estas 3 leyes indica que la suma de todas las n fuerzas que actúan en un cuerpo actúa como la fuerza neta que genera la aceleración:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m \cdot a, \quad F, a \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

En un sistema con N cuerpos en \mathbb{R}^3 , se obtienen N sumatorias iguales, generando $3N$ ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)¹⁷ de orden 2 (3 coordenadas por cada ecuación), requiriendo $6N$ condiciones conocidas para resolver el sistema (posición y velocidad para cada coordenada). En la práctica, además de la complejidad que genera la integración de EDO de orden 2 (que puede aumentar si son ecuaciones no lineales), se suma la complejidad de contar con todas las condiciones iniciales conocidas requeridas.

Un concepto de alta importancia derivado de la segunda ley de Newton es la *cantidad de movimiento o momento lineal*, que puede interpretarse como la medida de la dificultad para llevar un objeto en movimiento hasta el reposo; así, se deduce:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}), \quad a, F, v \in \mathbb{R}^3.$$

Se define que $p = m \cdot v$, $p, v \in \mathbb{R}^3$, donde p es el momento lineal o cantidad de movimiento. De esta manera:

$$F = \frac{d}{dt}(p) = \dot{p}, \quad F, p, \dot{p} \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

¹⁶ Otra forma de esta ley es (Young, Freedman, & Ford, 2009): “si una fuerza externa neta actúa sobre un cuerpo, éste se acelera. La dirección de aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. El vector de fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración”

¹⁷ EDO: Ecuación diferencial donde la variable dependiente depende únicamente de una variable independiente.

Este concepto permite replantear las 3 leyes del movimiento (Díaz Sánchez, 2012):

Primera ley: la cantidad de movimiento de una partícula aislada es constante.

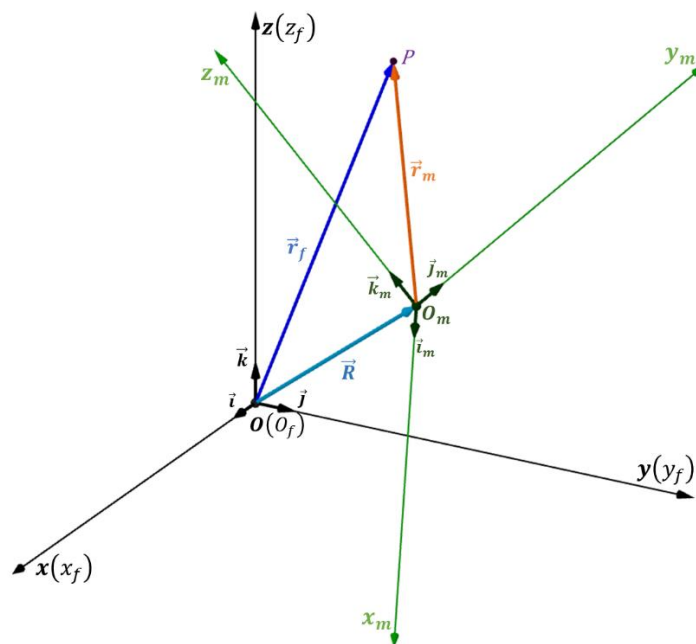
Segunda ley: la fuerza es la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento.

Tercera ley: en un sistema aislado de partículas, la cantidad de movimiento se conserva.

2.3.3. Marcos de referencia inerciales y no inerciales

Un punto relevante que se observa en el planteamiento de las leyes de movimiento, especialmente en la primera y segunda, es que estas se cumplen únicamente en un marco de referencia inercial, cuya característica principal es que no tiene aceleración (está quieto o se mueve con velocidad constante). No obstante, en un marco de referencia no inercial también se pueden aplicar las leyes de Newton. Un marco de referencia no inercial requiere ligarse o referenciarse a un marco de referencia inercial o sistema coordenado no acelerado.

Figura 3. Geometría para un sistema coordinado móvil en traslación y rotación



Fuente: Elaboración propia, 2021. Elaborado en Geogebra

Un marco de referencia no inercial puede encontrarse en traslación, en rotación o en ambas condiciones con respecto al sistema coordenado no acelerado, por lo cual se convierte en un marco de referencia o sistema coordenado móvil como el que se muestra en la Figura 3 (sistema coordenado móvil con origen en O_m) con respecto al sistema coordenado no acelerado con origen en O . La partícula P se encuentra en movimiento tanto de traslación como de rotación y se encuentra referenciada con respecto al sistema coordenado móvil O_m .

Para aplicar las leyes de movimiento se requiere referenciar a la partícula P con respecto al sistema coordenado no acelerado O .

Con base en un análisis cinemático de la partícula P (Fowles & Cassiday, 2005), (Hibbeler, 2010) y (Marion, 1998), se establece:

Posición:

$$r_i = R + r_m. \quad (4)$$

Donde:

$$r_i, r_m, R \in \mathbb{R}^3$$

r_i : Posición de P en el sistema coordenado no acelerado O

R : Posición del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

r_m : Posición de P en el sistema coordenado móvil O_m

Velocidad:

$$v_i = V + v_m + \Omega \times r_i. \quad (5)$$

Donde:

$$r_i, v_i, v_m, V, \Omega \in \mathbb{R}^3$$

$v_i = \dot{r}_i$: Velocidad de P en el sistema coordenado no acelerado O

$V = \dot{R}$: Velocidad del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

$v_m = \dot{r}_m$: Velocidad de P en el sistema coordenado móvil O_m

Ω : Velocidad angular del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

$\Omega \times r_i$: Velocidad debida a la rotación del sistema coordenado móvil O_m

Aceleración:

$$a_i = A + a_m + \dot{\Omega} \times r_i + \Omega \times (\Omega \times r_i) + 2\Omega \times v_m. \quad (6)$$

Donde:

$$r_i, v_m, \Omega, a_i, a_m, a_f, A, \dot{\Omega} \in \mathbb{R}^3$$

$a_i = \dot{v}_i = \ddot{r}_i$: Aceleración de P en el sistema coordenado no acelerado O

$A = \dot{V} = \ddot{R}$: Aceleración del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

$a_m = \dot{v}_m = \ddot{r}_m$: Aceleración de P en el sistema coordenado móvil O_m

$\dot{\Omega}$: Aceleración angular del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

$\dot{\Omega} \times r_i$: Aceleración debida a la rotación del sistema coordenado móvil O_m

$\Omega \times (\Omega \times r_i)$: Aceleración centrípeta debida a la rotación del sistema coordenado móvil O_m

$2\Omega \times v_m$: Aceleración de Coriolis del origen O_m en el sistema coordenado no acelerado O

De esta manera, la cinemática de la partícula P se referencia al sistema coordenado no acelerado O y se pueden aplicar las leyes de Newton. De acuerdo con la segunda ley $F = m \cdot a_f$, $F, a_f \in \mathbb{R}^3$, por lo cual:

$$F = m \cdot A + m \cdot a_m + m \cdot \dot{\Omega} \times r_i + m \cdot \Omega \times (\Omega \times r_i) + 2m \cdot \Omega \times v_m. \quad (7)$$

En la ecuación (7) se observan 5 términos que componen la fuerza neta que actúa sobre la partícula P , correspondientes a 5 fuerzas diferentes. Una primera conclusión de esta ecuación es que si el sistema coordenado móvil no tiene aceleración lineal ni angular ($A, \dot{\Omega} = 0$) y no está en rotación con respecto al sistema coordenado no acelerado ($\Omega=0$), entonces $F = m \cdot a_m$ y, por tanto, el sistema coordenado móvil es también un marco de referencia inercial; esto implica que un marco de referencia que se mueve a una velocidad constante ($A = 0$) respecto a un marco de referencia inercial, es también un marco de referencia inercial.

Si un observador se encuentra ubicado en el marco de referencia no inercial (sistema coordenado móvil), únicamente observa la acción de la fuerza $m \cdot a_m$; esto indica que las 4 fuerzas restantes se encuentran relacionadas fundamentalmente con el estado del marco de referencia no inercial utilizado para describir el movimiento de la partícula P ; estas fuerzas se conocen como *fuerzas inerciales*, *fuerzas ficticias* o *pseudo fuerzas* (Fowles & Cassiday, 2005). Dos términos resaltan entre estas 5 fuerzas: la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis.

La fuerza centrífuga tiene una estrecha relación con la fuerza centrípeta, aunque no tienen el mismo significado ni etimológico ni físico. Ambas palabras provienen del griego: la palabra centrípeta significa que “tiende al centro” mientras que la palabra centrifuga significa “que se aleja del centro”. De acuerdo con la primera ley de Newton, un objeto tiende a seguir la dirección de su velocidad (línea recta) a menos que alguna fuerza externa cambie tal estado;

cuando un objeto se encuentra en movimiento de rotación, el vector de velocidad siempre es tangente a la curva que describe, por lo cual, debe existir una fuerza que obligue al cuerpo a mantenerse en rotación: la *fuerza centrípeta*; un ejemplo, cuando se hace girar un objeto sujeto a una cuerda que lo une con un eje de rotación, la cuerda genera sobre el cuerpo una fuerza de tensión de la cuerda que lo obliga a seguir atado al centro; en el caso de los cuerpos estelares, esta fuerza es la fuerza de atracción (ver numeral 2.3.4). Por otra parte, un observador ubicado en un marco de referencia no inercial que se encuentra en rotación no siempre puede observar esta fuerza centrípeta, pero si puede observar y sentir el efecto que el movimiento genera, como una fuerza misteriosa que lo aleja del centro, lo cual sucede debido a que no existe nada que obligue al observador a mantenerse unido al centro; este es un efecto de la inercia y que el observador atribuye como una *fuerza centrífuga*; así, la fuerza centrífuga no es una fuerza real, es la ausencia de la fuerza centrípeta.

Al igual que la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis es una fuerza que percibe únicamente un observador ubicado en un marco de referencia no inercial en rotación; un ejemplo ilustrativo del efecto Coriolis es el movimiento de proyectiles: si un observador ubicado en el Polo Norte lanza un proyectil hacia otro observador ubicado en el Ecuador (ambos observadores se encuentran ubicados o solidarios con el marco de referencia no inercial en rotación, en este caso La Tierra), el observador ubicado en el Ecuador percibirá que el proyectil se desvía a su izquierda; si el lanzamiento se realiza a la inversa (el observador ubicado en el Ecuador lanza el proyectil hacia el observador ubicado en el Polo Norte), este último percibirá que el proyectil se desvía a su derecha; ya que ninguno de los dos percibe la rotación de la Tierra, asumen la existencia de una fuerza que cambia la dirección del proyectil: la *fuerza de Coriolis*. Pero igual que sucede con la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis no es una fuerza real, ya que, en el ejemplo, el proyectil en realidad no fue desviado, lo que sucede es que los observadores están en movimiento. Una demostración práctica real de la fuerza de Coriolis se produce al observar la dinámica de los huracanes, donde un centro de baja presión genera un movimiento de los vientos hacia él y luego desvía ese aire: el sentido hacia el cual es desviado es una consecuencia del efecto Coriolis y depende del hemisferio en el cual suceda.

En conclusión, para que las leyes de Newton sean aplicables a un marco de referencia no inercial, se debe incluir el efecto de las fuerzas ficticias o pseudo fuerzas como se presenta en las ecuaciones (5), (6) y (7).

2.3.4. La Ley de Gravitación Universal

La Ley de Gravitación Universal, promulgada por Newton, describe la dinámica de N partículas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 partiendo de las 3 leyes del movimiento (ver numeral 2.3.2). Esta Ley afirma que la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (Arenas Herrera, 2013):

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (8)$$

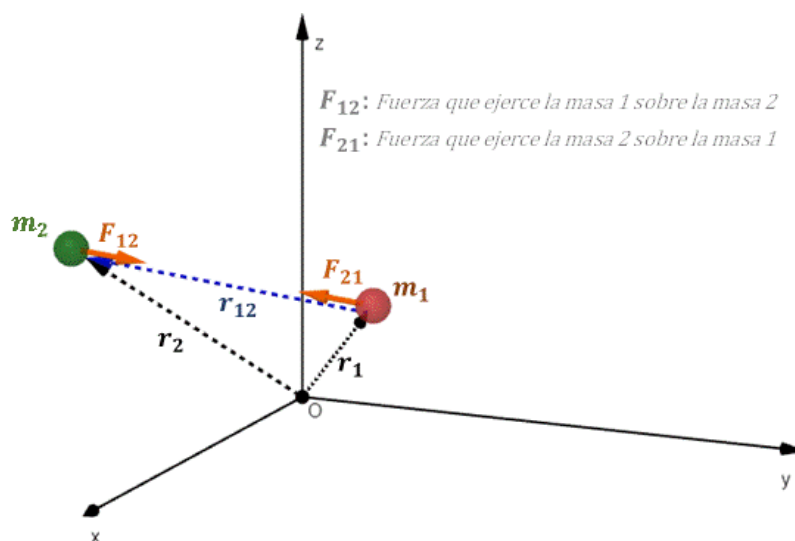
donde,

F_g : Fuerza de atracción entre 2 cuerpos m_1 : masa del primer cuerpo
 r : Distancia que separa los 2 cuerpos m_2 : masa del segundo cuerpo
 G : Constante de gravitación Universal

2.3.5. El problema de los N cuerpos

La estructura del sistema solar permite observar una de las características más importantes para el cálculo de la trayectoria de un objeto en el sistema: la interacción con múltiples cuerpos. El objetivo es, como indica (Cultura Científica, 2015): “determinar las posiciones y velocidades, en cualquier instante de tiempo, de n cuerpos –con sus correspondientes masas– sometidos a la atracción gravitacional mutua, y partiendo de posiciones y velocidades iniciales dadas”. En general, ello se ha enfocado en la búsqueda de las ecuaciones que describan la posición y la velocidad de los N cuerpos en cualquier instante de tiempo (solución explícita).

Figura 4. Fuerza gravitacional entre 2 cuerpos en \mathbb{R}^3



Fuente: Elaboración propia, 2021. Elaborado en Geogebra

La ecuación (8) y lo explicado en el numeral 2.3.4 representan la versión escalar de la ley; sin embargo, es necesario utilizar la versión vectorial dado que los cuerpos celestes se encuentran en \mathbb{R}^3 . Tomando como referencia lo presentado en la Figura 4, la magnitud de las fuerzas es igual, aunque opuesta en dirección: $F_{12} = -F_{21}$, $F_{12}, F_{21} \in \mathbb{R}^3$, de acuerdo con la Tercera Ley de Newton (ya que únicamente existen 2 cuerpos en esta primera aproximación).

Así, la Ley de Gravitación se expresa de la siguiente manera (Giancoli, 2008, pág. 143):

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{\|r_{21}\|^2} u_{r_{21}} = -G \frac{m_1 m_2}{\|r_{21}\|^2} \cdot \frac{r_{21}}{\|r_{21}\|} = -G \frac{m_1 m_2}{\|r_{21}\|^3} \cdot r_{21},$$

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{\|r_1 - r_2\|^3} \cdot (r_1 - r_2), \quad (9)$$

donde,

$$F_{21}, r_{12}, r_1, r_2, u_r \in \mathbb{R}^3$$

$\|r\|$: Módulo del vector posición

$u_{r_{21}} = \frac{r_{21}}{\|r_{21}\|}$: Vector unitario que apunta desde la masa m_2 hacia la masa m_1 , por lo cual tiene la misma dirección y sentido opuesto de F

r_{21} : Vector desplazamiento

F_{21} : Fuerza que realiza la masa m_2 sobre la masa m_1

Los cuerpos celestes mantienen su órbita y trayectoria pese a las atracciones que ejercen los demás cuerpos celestes, por lo cual, acorde con la segunda ley de Newton, debe existir una fuerza neta resultante que genera tal equilibrio: la inercia. Aplicando la segunda ley de Newton sobre la masa m_1 (ecuación (2)) utilizando la fuerza indicada en la ecuación (9), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n (F_i)_{m_1} = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow m_1 \cdot a_1 = F_{21},$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a_1 = -G \frac{m_1 m_2}{\|r_1 - r_2\|^3} \cdot (r_1 - r_2) \Rightarrow a_1 = -G \cdot m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{\|r_1 - r_2\|^3}.$$

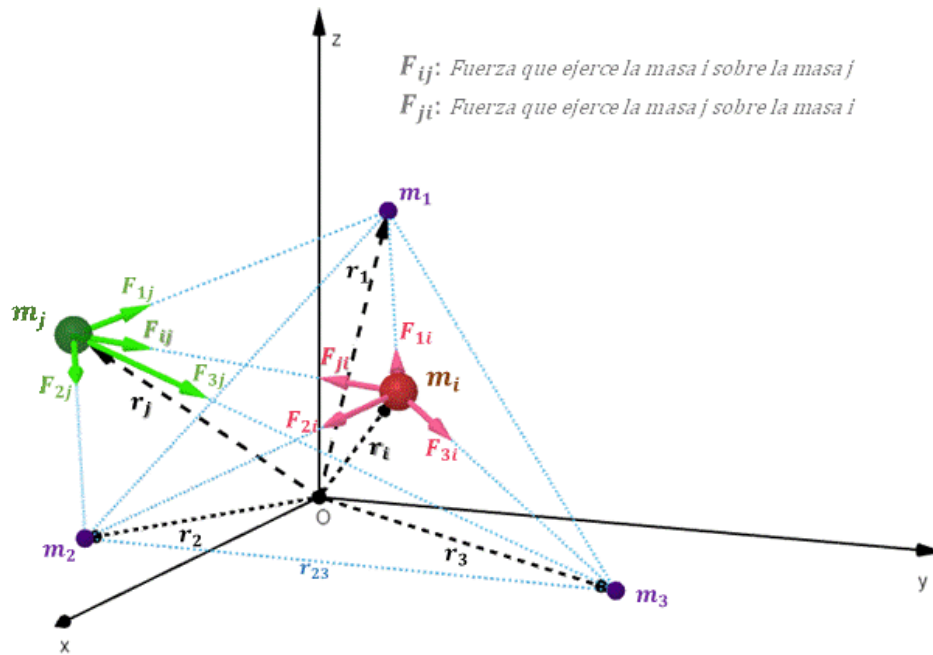
Teniendo en cuenta que la aceleración es la segunda derivada de la posición:

$$\ddot{r}_1 = \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -G \cdot m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{\|r_1 - r_2\|^3} \Rightarrow \frac{d^2 r_1}{dt^2} + G \cdot m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{\|r_1 - r_2\|^3} = 0.$$

De manera análoga, para la masa m_2 se obtiene:

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} + G \cdot m_1 \frac{(r_2 - r_1)}{\|r_2 - r_1\|^3} = 0.$$

Figura 5. Fuerza gravitacional entre n cuerpos en \mathbb{R}^3



Fuente: Elaboración propia, 2021. Elaborado en Geogebra

Estas son EDO no lineales de orden 2. Se obtiene una ecuación por cada masa, y teniendo en cuenta que se debe resolver para cada coordenada, se tiene un total de $6N$ ecuaciones.

Aplicando los mismos conceptos, se amplía para N cuerpos. Con base en la Figura 5, sobre cada cuerpo actúan $N - 1$ fuerzas, de tal forma que se obtiene, para el cuerpo j :

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} + G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N m_i \frac{(r_j - r_i)}{\|r_j - r_i\|^3} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Observando la ecuación (10), se obtiene un sistema de $3N$ EDO de orden 2, no lineales y vectoriales y con $6N$ condiciones iniciales (posición y velocidad inicial de cada cuerpo), siendo así un Problema de Valor Inicial (PVI). No obstante, el orden y la no linealidad generan complicaciones para la solución de las ecuaciones. Una forma de simplificar la solución es la aplicación de las ecuaciones canónicas de Hamilton (ver Anexo C), con el fin de obtener $6N$ EDO no lineales de primer orden, aprovechando las $6N$ condiciones iniciales.

No obstante, como indica (Arenas Herrera, 2013, pág. 3):

“el único caso para el cual se conocen las soluciones explícitas del problema de los N cuerpos, es para el problema de Kepler ($N = 2$) donde se ha demostrado que las soluciones explícitas son las cónicas. Al aumentar el número de cuerpos la complejidad de los movimientos es mayor, de tal manera que para 3 cuerpos o más se sabe muy

poco y se demostró que no es posible la integración completa, esto es, no podemos encontrar las soluciones explícitas como en el problema de Kepler”.

Se han desarrollado soluciones explícitas para el modelo de 3 cuerpos restringido, igual que para algunas formas específicas del modelo de 4 cuerpos. El problema de los N cuerpos motivó el desarrollo de nuevas teorías científicas en los últimos siglos, incluyendo los desarrollos de Poincaré quien demostró la imposibilidad de la solución analítica (ver numeral 2.2.2).

Si bien la solución analítica sigue siendo un reto, la solución numérica es posible mediante el uso de los métodos numéricos y los procesadores actuales, la aplicación de las teorías de la mecánica clásica y la aplicación de otras teorías como la Teoría de la Perturbaciones.

2.3.6. Teoría de la Perturbaciones

Es un grupo de métodos utilizados para estudiar problemas en muchas ramas (matemáticas, mecánica, física, tecnología y especialmente en física cuántica). De manera general, esta teoría se basa en que “es posible dar una descripción aproximada del sistema en estudio utilizando algún sistema "ideal" especialmente seleccionado que puede estudiarse correcta y completamente” (Hazewinkel, 2000). Esta descripción ideal es una versión solucionable del sistema a la cual se van añadiendo “perturbaciones” cuya solución se va aproximando con base en la solución conocida. Se aplicó primero en la mecánica celeste, pues debido al tamaño de los planetas frente al tamaño del Sol y las distancias entre los cuerpos celestes, es posible “despreciar” las fuerzas gravitatorias de los planetas logrando un modelo simple, y a partir de este modelo ir añadiendo estas fuerzas como “perturbaciones” (Hazewinkel, 2000).

Para ilustrar el concepto de perturbación, se establece un contexto donde se examina el movimiento relativo entre 2 cuerpos que son parte de un sistema de N cuerpos; el primero de ellos (m_1) tiene la masa dominante sobre el sistema de cuerpos y el segundo cuerpo (m_2) es aquel cuyo movimiento es de interés de estudio. Aplicando la ecuación (10) para estos 2 cuerpos, extrayendo de la sumatoria lo relacionado con la otra masa (Pascual, 2019, pág. 18):

$$\ddot{r}_1 = -G \sum_{i=2}^N m_i \frac{(r_1 - r_i)}{\|r_1 - r_i\|^3} = -G \left[m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{\|r_1 - r_2\|^3} + \sum_{i=3}^N m_i \frac{(r_1 - r_i)}{\|r_1 - r_i\|^3} \right],$$

$$\ddot{r}_2 = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^N m_i \frac{(r_2 - r_i)}{\|r_2 - r_i\|^3} = -G \left[m_1 \frac{(r_2 - r_1)}{\|r_2 - r_1\|^3} + \sum_{i=3}^N m_i \frac{(r_2 - r_i)}{\|r_2 - r_i\|^3} \right].$$

El movimiento del cuerpo 1 con respecto al cuerpo 2 se expresa de la siguiente manera:

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G \left[m_1 \frac{(r_2 - r_1)}{\|r_2 - r_1\|^3} + \sum_{i=3}^N m_i \frac{(r_2 - r_i)}{\|r_2 - r_i\|^3} \right] + G \left[m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{\|r_1 - r_2\|^3} + \sum_{i=3}^N m_i \frac{(r_1 - r_i)}{\|r_1 - r_i\|^3} \right].$$

Teniendo en cuenta que $(r_1 - r_2) = -(r_2 - r_1)$ y reordenando:

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G(m_1 + m_2) \frac{(r_2 - r_1)}{\|r_2 - r_1\|^3} - G \sum_{i=3}^N m_i \left(\frac{(r_2 - r_i)}{\|r_2 - r_i\|^3} - \frac{(r_1 - r_i)}{\|r_1 - r_i\|^3} \right). \quad (11)$$

La ecuación (11) representa la aceleración del cuerpo 2 (el cuerpo en estudio) con respecto al cuerpo 1 (el cuerpo dominante, por ejemplo, el Sol en el sistema solar). El primer término corresponde a la aplicación de la Ley de Gravitación Universal entre los cuerpos 1 y 2; el segundo término es entonces, el efecto de la perturbación que generan los demás cuerpos del sistema (cuerpos perturbadores). Este efecto de perturbación está compuesto por el efecto de los cuerpos perturbadores sobre el cuerpo 1 y sobre el cuerpo 2 (Pascual, 2019, pág. 18).

Hasta este momento, las únicas perturbaciones que se han incluido son las relacionadas con la fuerza de gravitación generada por los cuerpos perturbadores. Sin embargo, existen otras fuerzas tanto externas como internas que pueden afectar al cuerpo bajo interés de estudio. Bajo el efecto de estas fuerzas, se debe ajustar la ecuación (10) así (Díaz Granizo, 2015):

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} + G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^N m_i \frac{(r_j - r_i)}{\|r_j - r_i\|^3} = a_{pert}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

donde (Pascual, 2019, pág. 19):

$$a_{pert} = a_{prop} + a_{arr} + a_{NE} + a_{PRS} + a_{otros}.$$

Estas aceleraciones se deben a las siguientes fuerzas (Pascual, 2019, pág. 13):

- **Fuerza de propulsión o empuje (a_{prop}):** en el caso de cohetes, naves espaciales y satélites artificiales propulsados, estos expulsan material para generar el empuje o propulsión. Esta fuerza genera un cambio en la aceleración tanto en valor como en dirección.
- **Arrastre atmosférico (a_{arr}):** si el cuerpo en estudio se mueve a través de una atmósfera, entonces se presenta una resistencia aerodinámica debida a la densidad del fluido atravesado. El efecto de esta fuerza es relevante cuando la densidad del fluido es significativa (por ejemplo, en el lanzamiento o reingreso de un cohete).

- **No esfericidad de los cuerpos celestes (a_{NE}):** Cuando se aplican las leyes del movimiento se asume que la masa se concentra en un punto, lo cual es válido cuando el cuerpo tiene una geometría esférica perfecta. Sin embargo, en la realidad los cuerpos poseen una masa distribuida de manera no esférica perfecta y no uniforme, por tanto, su efecto varía de acuerdo con la ubicación del cuerpo en estudio. El efecto es relevante cuando este cuerpo se acerca al cuerpo no esférico, por ejemplo, para aprovechar su órbita.
- **Presión por radiación solar (a_{PRS}):** El impacto de la radiación solar sobre la superficie del cuerpo en estudio genera una fuerza a favor o en contra del movimiento del cuerpo en estudio. Aunque el efecto es generalmente bajo, aumenta cuando el cuerpo en estudio tiene áreas muy grandes en comparación con su masa, por ejemplo, las velas solares.

Los estudios para el cálculo de estas fuerzas escapan del alcance del presente trabajo.

2.4. Información técnica complementaria

Como ya se ha indicado anteriormente, la interacción con los múltiples cuerpos es una de las características de mayor impacto en la trayectoria de un cuerpo en el sistema solar. Por tanto, una simulación requiere conocer la posición, velocidad, masa y otras características de los cuerpos del sistema solar, ya sean obtenidos directamente o calculados en el proceso de simulación. Es importante tener en cuenta la gran cantidad de objetos en el sistema solar y que incluir cálculos al respecto de estos cuerpos aumenta el consumo de recursos informáticos, por tanto, se debe preferir la obtención directa cuando ello sea posible.

2.4.1. JPL

NASA cuenta con JPL (*Jet Propulsion Laboratory*), un laboratorio de investigación y desarrollo financiado por la NASA y administrado por Caltech. Es el centro líder para la exploración donde el humano aún no puede llegar, responsables, por ejemplo, de llevar al rover¹⁸ Perseverance a Marte y su exitoso amartizaje. Los orígenes del JPL se remontan a la década de 1930, cuando el profesor de Caltech Theodore von Kármán supervisó el trabajo pionero en la propulsión de cohetes; luego salió del campus pasando a la agencia aeroespacial. Desde sus inicios, JPL ha desarrollado desde los misiles guiados hasta los viajes no tripulados al espacio (NASA, s.f.-h).

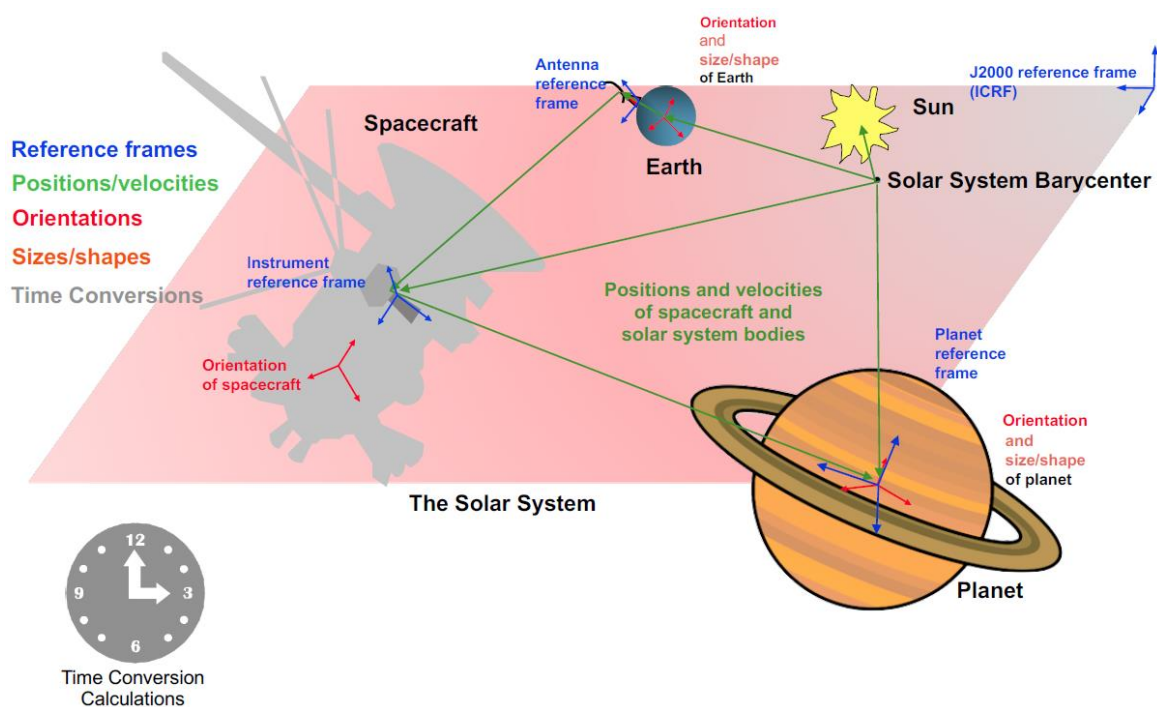
¹⁸ También conocido como astromóvil. “Vehículo de exploración espacial diseñado para moverse sobre la superficie de un planeta u otro objeto astronómico” (Wikipedia, s.f.-b)

Como parte de la sección de Diseño de misión y navegación (*Mission Design and Navigation*), se encuentra el grupo SSD (*Solar System Dynamics*) cuyo enfoque es determinar el movimiento y los parámetros físicos de los objetos planetarios naturales. SSD genera históricos de posición y velocidad exactas (llamados efemérides), campos de gravedad y parámetros de rotación para los cuerpos del sistema solar, incluidos los planetas, satélites planetarios, asteroides y cometas, entre otros (NASA, s.f.-i). Esta información es cargada en la plataforma HORIZONS, por la cual la comunidad científica accede a estos datos (NASA, s.f.-j).

2.4.2. NAIF y SPICE

El éxito del acceso a estos datos promovió la creación, desde JPL, de NAIF (*Navigation and Ancillary Information Facility*¹⁹), con el fin de diseñar e implementar un sistema de información y encargarse de la producción de la "información técnica complementaria"²⁰ de alta precisión, documentada y de fácil acceso que requiere la comunidad científica (NASA, s.f.-k).

Figura 6. Información técnica complementaria en SPICE



Fuente: SPICE Overview, NASA (NASA, 2019-a)

Bajo la dirección de la división de ciencias planetarias de la NASA (*NASA's Planetary Science Division*), NAIF creó el sistema **SPICE** para ayudar a los científicos de la NASA a planear e

¹⁹ En este caso específico, "Facility", se refiere a un grupo de expertos; "Navigation" no se refiere a la capacidad de determinación de la órbita de una nave, propagación de su trayectoria o estimación de posición.

²⁰ *Ancillary Data*. No existe un adjetivo equivalente en español, por lo cual se utiliza esta traducción

interpretar las observaciones científicas provenientes de los instrumentos espaciales y asistir a los ingenieros de la NASA que participan en el modelado, planificación y ejecución de las actividades requeridas para ejecutar misiones de exploración espacial.

SPICE es utilizado desde la fase conceptual de la misión hasta la fase de análisis de datos posterior a la misión, incluyendo la correlación de datos con otras misiones (NASA, s.f.-I). Así, SPICE es el Sistema de geometría de observación de la NASA para misiones de ciencia espacial (NASA, 2019-a). En la Figura 6 se observa una representación ilustrativa general del alcance de esta información técnica complementaria.

Los conjuntos de datos primarios de SPICE se denominan *kernel*, los cuales están compuestos por información de navegación e información complementaria que provee una geometría precisa de observación para uso por la comunidad científica e ingenieros espaciales; estos son producidos por fuentes de alta confiabilidad como el centro de control de la misión, naves espaciales, constructores de naves espaciales y organizaciones científicas (NASA, s.f.-I).

SPICE es un acrónimo que resume los componentes lógicos y *kernel* (archivos de datos) utilizados por el sistema, explicados en la Tabla 1 (NASA, s.f.-I).

Si bien, en el sentido estricto, una efeméride se refiere a un evento pasado, en SPICE también incluyen proyecciones futuras (basados en cálculos a partir de datos pasados y observaciones científicas).

La información se mantiene actualizada, pues en cada proyecto, el centro de operaciones de la misión se concentra en producir, catalogar y distribuir *kernel* completos y precisos de manera oportuna. Las actualizaciones se realizan con prontitud cuando hay datos disponibles nuevos o mejorados. Los archivos son revisados y actualizados, sujetos a la aprobación entre pares, y una vez listos son incluidos en los sitios de archivo (NASA, s.f.-I).

Aunque el enfoque original de SPICE fue el análisis de datos, su uso se ha extendido a la planificación de misiones, convirtiendo al usuario en un generador de efemérides futuras.

2.4.3. Usos de SPICE

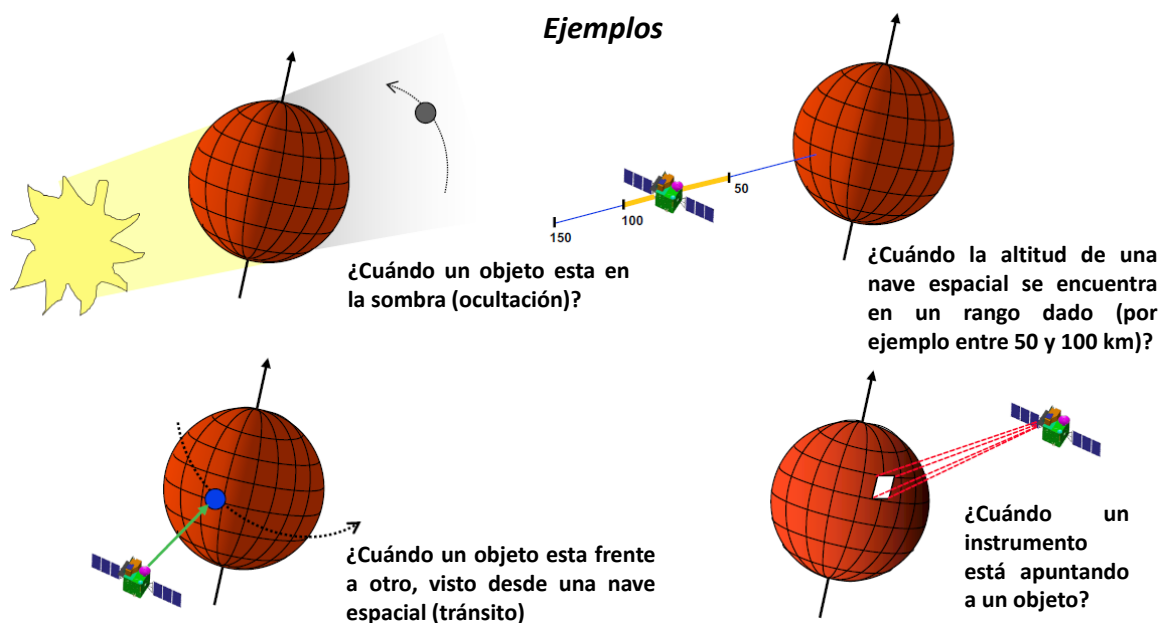
Son muchos los usos que puede tener SPICE por parte de la comunidad científica y los ingenieros interesados en la dinámica espacial. Los usos más esperados se relacionan con el cálculo de diferentes parámetros de observación geométrica (NASA, 2019-a):

Simulador / integrador digital del sistema solar para el cálculo de trayectorias de cuerpos con masa negligible

- Posiciones y velocidades de planetas, satélites, cometas, asteroides y naves espaciales.
- Tamaño, forma y orientación de planetas, satélites, cometas y asteroides.
- Orientación de una nave espacial y sus diversas estructuras móviles.
- Ubicación del campo de visión del instrumento en la superficie o atmósfera de un planeta

Otra aplicación es encontrar los tiempos en los cuales ocurrirá un evento geométrico, como se observa en los ejemplos de la Figura 7.

Figura 7. Ejemplos de eventos geométricos



Fuente: SPICE Overview, NASA (NASA, 2019-a). Traducción propia

El sistema SPICE se ha construido y se utiliza en numerosas misiones planetarias estadounidenses, como Cassini, Mars Exploration Rover, Mars Reconnaissance Orbiter y DAWN. Otras misiones internacionales, voluntariamente han decidido utilizar SPICE (NASA, s.f.-l). SPICE se ha convertido en el sistema de archivo recomendado para información técnica complementaria, sugerido por la Alianza internacional de datos planetarios (*International Planetary Data Alliance*). Existen versiones complementarias, por ejemplo, los datos de SPICE para las misiones planetarias europeas se archivan en el Archivo de Ciencias Planetarias de la ESA (*European Space Agency*), aunque debe indicarse que algunos de estos datos son reflejados en el servidor de NAIF. Así mismo, los datos de SPICE para algunas misiones espaciales de Japón, India y Rusia se almacenan en sus sistemas locales (NASA, 2019-a).

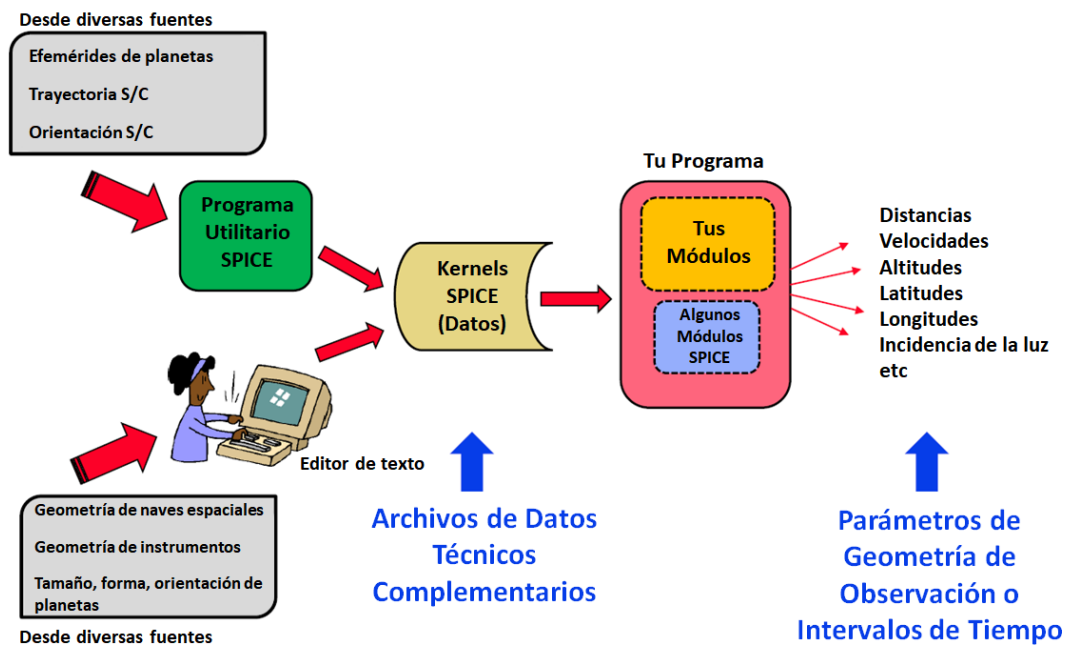
No obstante, actualmente SPICE se utiliza para aplicaciones más allá de las misiones científicas planetarias (NASA, 2019-a):

- Heliofísica
- Ciencia de la Tierra
- Observaciones desde observatorios terrestres
- Demostraciones de tecnología espacial
- Planetarios

2.4.4. Arquitectura con SPICE

El sistema SPICE incluye el kit de herramientas SPICE, el cual es una colección de software compuesto por librerías de API²¹ (*Application Program Interfaces* – Interfaz de Programación de Aplicaciones), requeridos para leer los archivos *kernel* y acceder a la información requerida. El usuario puede integrar algunos de estos APIs en su propio programa para realizar cálculos basados en los datos de SPICE; un esquema de ello se presenta en la Figura 8.

Figura 8. Arquitectura general para el uso de SPICE



Fuente: SPICE Overview, NASA (NASA, 2019-a). Traducción propia.

²¹ Conjunto de subrutinas, funciones y procedimientos (o métodos, en la programación orientada a objetos) que se utiliza para desarrollar e integrar el software de las aplicaciones, permitiendo la comunicación entre dos aplicaciones de software a través de un conjunto de reglas (Xataca, s.f.) y (Pardo, 2019)

El kit de herramientas fue construido originalmente en ANSI Fortran, pero está disponible también en C, IDL, Matlab y Java. Terceros (diferentes a NAIF) ofrecen kits de herramientas en Python, Ruby, Swift y Julia y seguramente otros más.

NAIF diseñó la arquitectura de SPICE con varias características a resaltar (NASA, 2019-a):

- Portabilidad: sigue funcionando al cambiar de computadores; los archivos *kernel* pueden copiarse de un computador a otro
- Confiabilidad: el código es probado 100% antes de ser liberado a los usuarios. Nuevos kits y versiones se liberan irregularmente, cuando se han superado las pruebas y existe suficiente capacidad.
- Compatibilidad: nuevas versiones son 100% compatibles con versiones anteriores
- Documentación completa: se entrega el código fuente, completamente documentado. Además, entregan extensa documentación orientada al usuario
- El software incluye manejo de excepciones
- Precisión: todos los cálculos numéricos son de doble precisión
- Independencia: los *kernel* son separables, el usuario puede usar únicamente lo que necesita
- Licencia libre para uso de todo el mundo
- No tiene costo para los usuarios
- Proporciona a los usuarios una amplia documentación, tutoriales y ejemplos centrados en el usuario, con un esfuerzo de aprendizaje razonable, el sistema puede ser utilizado con confianza por todo el espectro de la comunidad científica interesada.

La versión actual de SPICE (versión N66) fue liberada el 10 de abril de 2017.

Existe otra forma de usar SPICE sin necesidad de crear una herramienta propia o diseñada por alguien cercano, pues NAIF permite utilizar la interfaz gráfica de usuario para SPICE proporcionada en la herramienta *WebGeocalc*. Si bien esta herramienta es bastante capaz, no ofrece todas las funciones disponibles cuando se utilizan las API del kit de herramientas de SPICE, y los datos disponibles para esta herramienta son limitados (NASA, s.f.-I).

Tabla 1. Componentes lógicos y kernel de SPICE

Componente lógico	Kernel	Contenido
S <i>Spacecraft</i>	SPK	Efemérides de naves espaciales (trayectoria), en función del tiempo
P <i>Planet</i>	SPK	Efemérides de planetas, satélites, cometas o asteroides Ubicación del cuerpo objetivo con respecto a otro Datos en función del tiempo
	PCK	Constantes físicas, dinámicas y cartográficas para el cuerpo objetivo (tamaño y forma, orientación del eje de giro y el meridiano principal)
I <i>Instrument</i>	IK	Aspectos geométricos de un instrumento científico en particular (tamaño, forma y orientación del campo de visión)
C <i>Camera-matrix</i>	CK	Transformación " <i>C-matrix</i> ", que proporciona ángulos de apuntar (orientación), marcados en el tiempo, para una nave espacial o una estructura en ella, sobre la que se montan instrumentos científicos. El componente C también puede incluir datos de velocidad angular para esa estructura
E <i>Events</i>	EK <i>ESB ESQ ENB</i>	Eventos de las actividades de misión, tanto planeadas como imprevistas: ESB (Planes de observación científica), ESQ (secuencia de eventos), ENB (notas del experimentador)
Otros	FK <i>Frame</i>	<i>Kernel</i> de marcos. Definiciones y especificación de relaciones entre marcos de referencia (sistemas de coordenadas)
	LSK	<i>Leap Seconds Kernel</i> . Tabla de segundos bisiestos. Convierte de tiempo UTC ²² a tiempo TDB ²³
	SCLK	Coefficientes de reloj de nave espacial. Convierte del tiempo de nave espacial al tiempo TDB ²³
	DSK <i>Digital Shape</i>	Modelo de forma digital. Provee diseños tanto para cuerpos pequeños de forma irregular (como asteroides y núcleos de cometas), como para cuerpos grandes de forma más uniforme, como la Luna, la Tierra y Marte, ofreciendo la posibilidad de utilizar modelos de mayor fidelidad para algunos cuerpos para los cuales los científicos han calculado formas detalladas. Cuando existen, a menudo se puede utilizar un DSK en lugar de la parte de tamaño y forma de un PCK
	MK	<i>Meta-Kernel</i> . Una forma de especificar convenientemente una colección de núcleos reales que le gustaría usar juntos

Fuente: SPICE Overview, NASA (NASA, 2019-a)

²² UTC: *Universal Time Coordinated*. Estándar mundial de tiempo que reemplazó al GMT (Greenwich Mean Time) (Wikipedia, s.f.-c)

²³ TDB: *Temps Dynamique Barycentrique*. Escala de tiempo coordinada relativista, un estándar de tiempo astronómico para tener en cuenta la dilatación del tiempo al calcular órbitas y efemérides astronómicas de planetas, asteroides, cometas y naves espaciales interplanetarias en el Sistema solar (Wikipedia, s.f.-d)

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Desarrollar una aplicación que, utilizando los datos del sistema SPICE, simule/emule el sistema solar y permita así calcular la trayectoria de objetos de masa negligible en el sistema solar.

3.2. Objetivos específicos

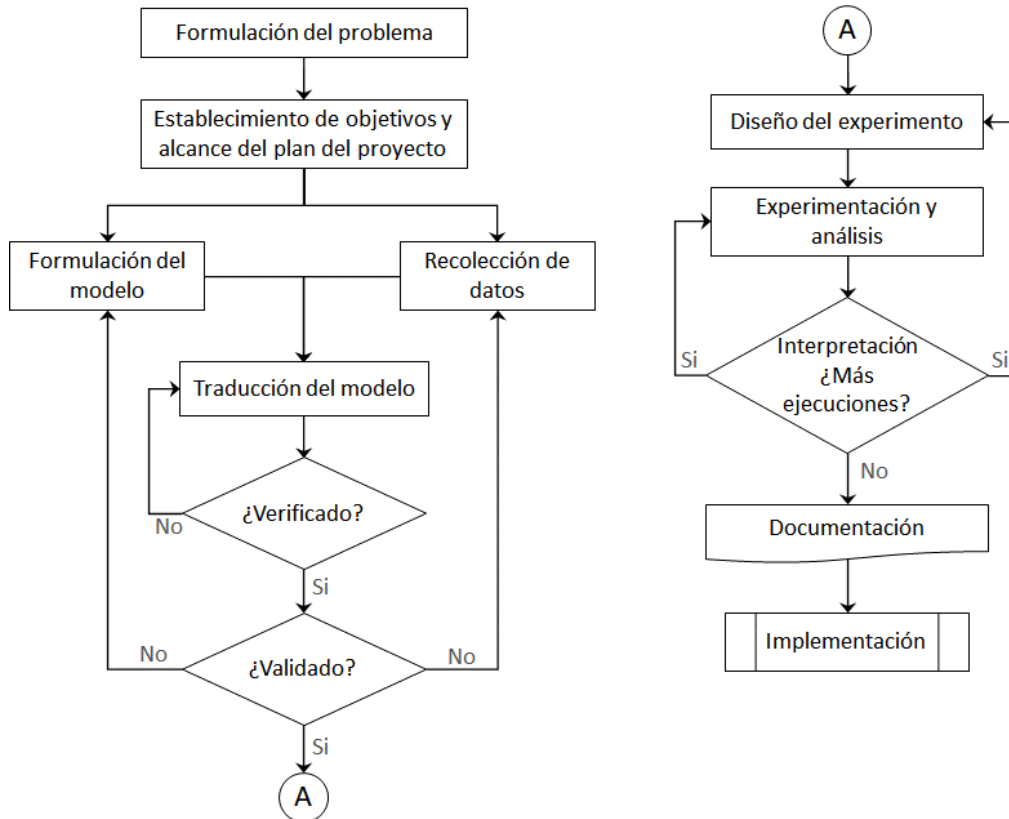
1. Aplicar los principios físicos y matemáticos para establecer las ecuaciones diferenciales que modelan la trayectoria de un cuerpo de masa negligible dado el efecto gravitacional de los cuerpos del sistema solar.
2. Solucionar/integrar las ecuaciones diferenciales resultantes del modelamiento de los cuerpos de masa negligible, mediante la aplicación de métodos numéricos.
3. Diseñar e implementar una aplicación de software que simule/emule el sistema solar, mediante consulta de los datos del sistema SPICE, especialmente las efemérides, y realice los cálculos de la trayectoria de un cuerpo de masa negligible.
4. Realizar una aplicación práctica del simulador desarrollado.

4. Metodología del trabajo

4.1. El modelo del simulador

Para el desarrollo del modelo se han seguido las etapas que indica Banks (Banks, Carson II, Nelson, & Nicol, 2010), las cuales se muestran en la Figura 9.

Figura 9. Etapas de un estudio de simulación



Fuente: Discrete Events System simulation (Banks, Carson II, Nelson, & Nicol, 2010, pág. 35)

El desarrollo de estas etapas se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Desarrollo de las etapas de simulación

Etapa	Detalle
Formulación del problema	Además de lo indicado en los numerales 1 y 3, se encuentran los elementos indicados en la Tabla 3.
Definición del sistema	Ver Tabla 3
Formulación del modelo	El modelo indicado en la Tabla 3, se desarrolla en el numeral 5. Se basa en la definición de las teorías aplicables (numeral 2.3).
Recolección de datos	La fuente de datos es SPICE
Traducción del modelo	Unificación de unidades de medida
Verificación	Pruebas de funcionamiento sin errores del código

Etapa	Detalle
Validación	Comparación con trayectoria conocida de un cuerpo con masa negligible
Diseño de experimentos	Se ha elegido al cometa Halley. Prueba de deducción de un periodo de rotación
Experimentación y análisis	Se encuentra en el numeral 6
Documentación	Se encuentra en el presente documento
Implementación	El código se desarrolla para uso a nivel de desarrollador. No se encuentra en el alcance el desarrollo de interfaz de usuario.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Elementos de la simulación

Característica	Detalle
Sistema	Sistema solar
Modelo	Fuerza gravitacional, fuerzas de atracción entre cuerpos
Variables de estado	Posición, velocidad, aceleración
Entidades	Cuerpos del sistema solar de masa no negligible: planetas, planetas enanos, satélites planetarios
Atributos	Masa, parámetro gravitacional estándar, posición, velocidad
Tipo de simulación	Continua
Eventos	No aplica al ser simulación continua
Tipo de reloj	No tiempo real, aceleración de tiempo

Fuente: Elaboración propia con base en (Banks, Carson II, Nelson, & Nicol, 2010)

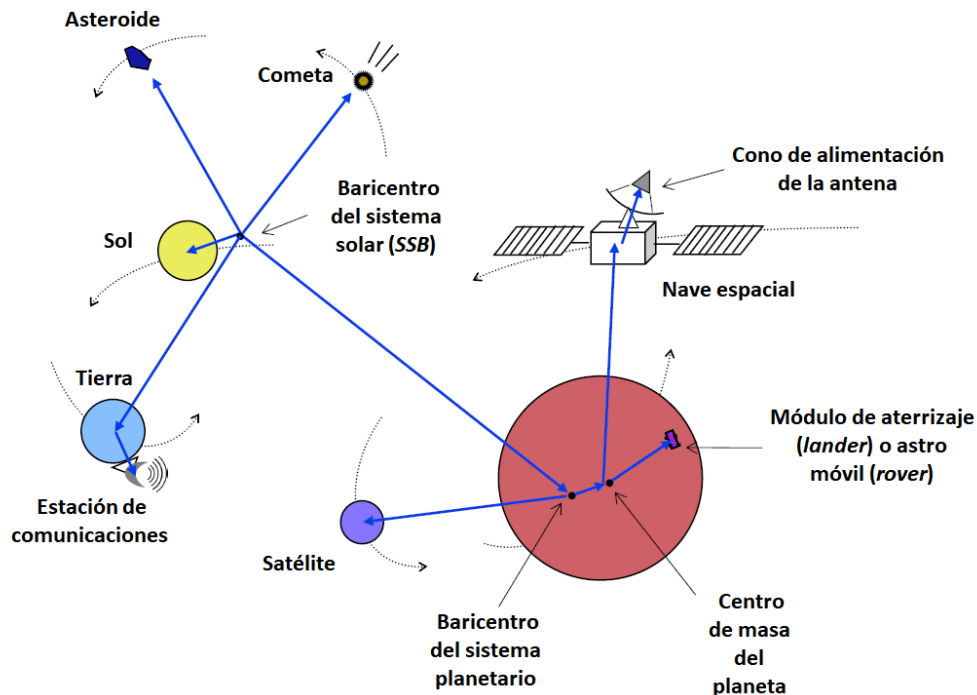
4.2. El funcionamiento de SPICE

Para la etapa de recolección de información, como se ha señalado, se ha planteado como fuente de datos a SPICE, por lo cual es necesario conocer, entender y manejar dicho software. El presente numeral se basa en la información que se encuentra disponible para los usuarios en los tutoriales de SPICE (https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/generic_kernels); así, este es un resumen ilustrativo del funcionamiento de SPICE para los fines de este trabajo.

4.2.1. Objetos de las efemérides

Como se muestra en la Figura 10, en SPICE están disponibles distintos tipos de objeto. Teniendo en cuenta que el objetivo del presente trabajo es la simulación de masas negligible, se requiere consultar la información de aquellos objetos de mayor tamaño (mayor masa), pues estos generan mayor atracción y por tanto mayor afectación sobre la trayectoria de la masa negligible; así, entre los objetos disponibles en SPICE, se define la consulta de: el Sol, los planetas, los planetas enanos y los satélites. Estos son los cuerpos con masa no negligible.

Figura 10. Objetos disponibles en SPICE



Fuente: Ephemeris Subsystem SPK (NASA, 2019-b),. Traducción propia

Los demás objetos, dada su menor masa, pueden ser considerados como masas negligibles y, por tanto, la información acerca de su trayectoria es objeto del presente trabajo.

Todo objeto, independiente de su masa, tiene un código en el sistema HORIZONS que es utilizado en toda la NASA y por ende por NAIF y SPICE. Un listado de los códigos de los cuerpos y puntos más relevantes para el presente trabajo se puede consultar en el Anexo A.

4.2.2. Archivos *kernel* requeridos

Como se ha mencionado en el numeral 2.4.2, SPICE maneja diferentes tipos de archivo (*kernel*), cada uno de los cuales almacena diferentes tipos de información y tiene un manejo específico, independiente del lenguaje que se utilice.

Como insumo para el modelamiento en el simulador, se requiere conocer los vectores de posición y velocidad de los cuerpos celestes (vectores de estado); con base en el tutorial de SPICE (NASA, 2019-b), para obtener estos vectores de estado se necesita:

- Archivos *kernel* PCK (en adelante **archivos PCK**), los cuales contienen los datos de orientación del cuerpo
- Archivos *kernel* SPK (en adelante **archivos SPK**), los cuales contienen las efemérides para los cuerpos celestes; esto quiere decir que contiene las componentes de los vectores de

Simulador / integrador digital del sistema solar para el cálculo de trayectorias de cuerpos con masa negligible

estado (x, y, z, vx, vy, vz) de estos cuerpos en determinados momentos de tiempo (comportamiento discreto).

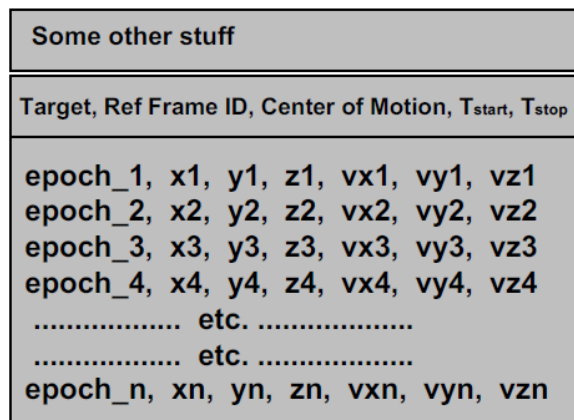
- Archivos *kernel* LSK (en adelante **archivos LSK**) para las conversiones de tiempo producidas entre los diferentes marcos de referencia y que suceden fuera del subsistema SPK.

No obstante, tales datos requieren de información adicional para su uso adecuado:

- El objeto con el cual se relaciona la información (*target*)
- El sistema o marco de referencia en el cual son entregados los datos (*Ref Frame ID*)
- El centro de movimiento del cuerpo (*Center of Motion*)
- Tiempo de inicio y fin de los datos (T_{start} y T_{stop})

Estos datos componen un segmento como se muestra en la Figura 11.

Figura 11. Estructura de un segmento en un archivo SPK



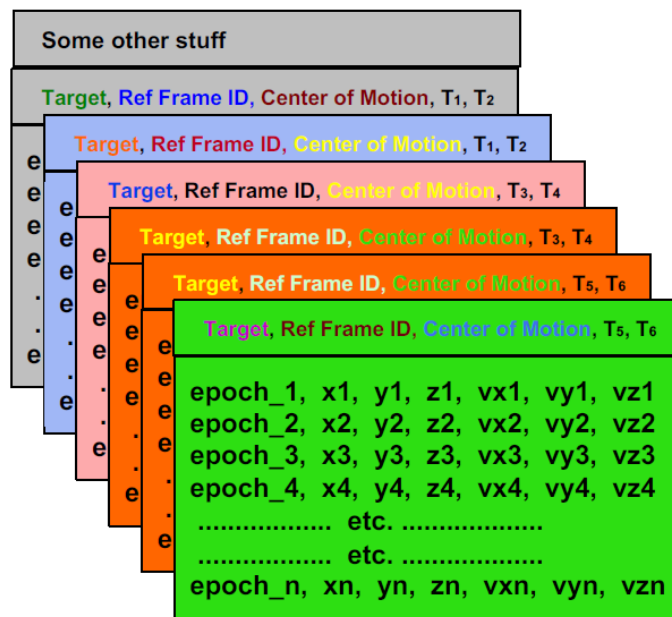
Fuente: Ephemeris Subsystem SPK (NASA, 2019-b)

No obstante, no es usual que un archivo SPK contenga únicamente un segmento; estos archivos contienen múltiples segmentos, con muchos objetos, marcos de referencia, centros de movimiento y parejas de tiempo de inicio y fin, como se muestra en la Figura 12.

Aunque los datos se almacenan de manera discreta, el software de SPICE puede devolver el vector de estado para cualquier tiempo comprendido entre el tiempo de inicio y fin de un segmento. Para ello, se realiza una representación matemática de los datos de efemérides utilizando diferentes técnicas o tipos de representación. Este tipo de representación es el último dato que se incluye en un segmento de un archivo SPK.

Sin perjuicio de lo anterior, los kits de herramientas de SPICE están diseñados para comprender y leer estas estructuras.

Figura 12. Estructura general de un archivo SPK



Fuente: Ephemeris Subsystem SPK (NASA, 2019-b)

SPICE entrega la información del vector de estado en unidades de kilómetros [km] para la posición y segundos [s] para el tiempo.

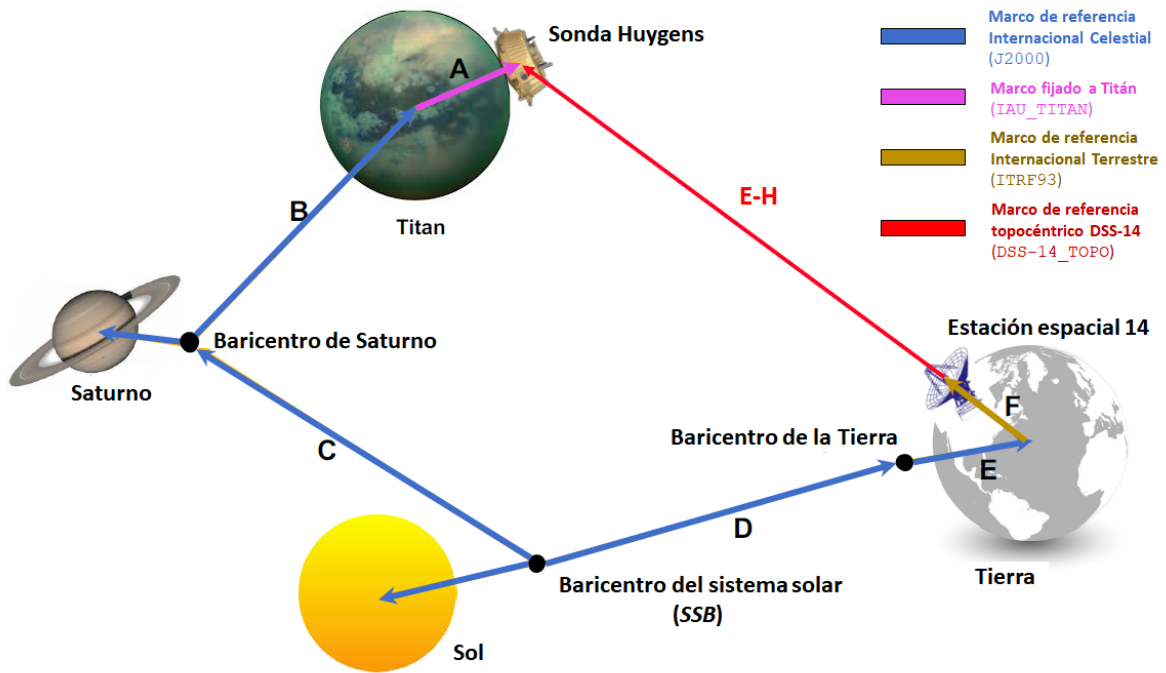
Otro tipo de archivo muy útil son los archivos CMT que acompañan normalmente a los archivos SPK; en estos se encuentran valores de atributos importantes como la masa y el parámetro gravitacional estándar.

Los archivos *kernel* se encuentran disponibles para descargas desde el sitio de NAIF: https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/generic_kernels. Allí se encuentra diferenciado por cada tipo de archivo *kernel* y en cada uno de los contenedores se encuentran archivos que ayudan a conocer el contenido de cada archivo *kernel*, incluyendo los cuerpos que se encuentran encada archivo y los periodos de tiempo cubiertos. Con la revisión de estos archivos de ayuda se seleccionan los archivos *kernel* requeridos de acuerdo con la información requerida.

4.2.3. Sistemas coordenados

Una utilidad importante por conocer y entender es el cambio o transformación de sistemas o marcos de referencia (*frames*). Supongamos que se quiere conocer el vector de estado E-H de la sonda Huygens (ubicada en la luna Titán de Saturno) con respecto a la estación espacial 14 (ubicada en la Tierra); en la Figura 13 se observa este vector en rojo. Sin embargo, en SPICE los archivos SPK únicamente contienen los vectores A, B, C, D, E y F, es decir, no está disponible el vector buscado. Para ello es necesario recurrir al encadenamiento.

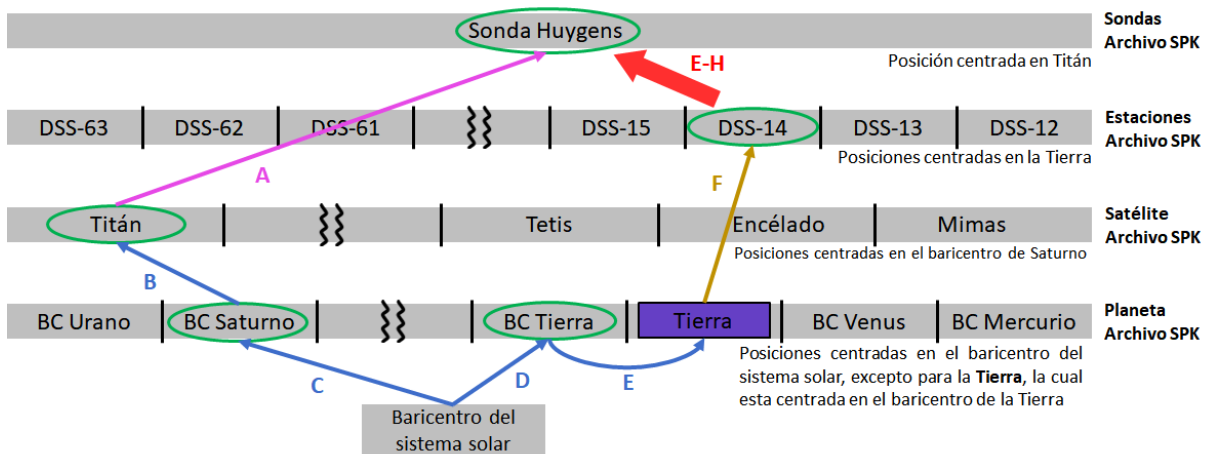
Figura 13. Encadenamiento y transformación de frames (marcos de referencia)



Fuente: Ephemeris Subsystem SPK (NASA, 2019-b)

En la Figura 13 se observa que los vectores A, B, C, D, E y F están relacionados con diferentes marcos de referencia²⁴. SPICE se encarga de la rotación de los vectores, encadenando los vectores A al F de acuerdo con el marco de referencia en el cual se requiera al vector E-H, por lo cual dicho marco se convierte en un dato de entrada.

Figura 14. Búsqueda y encadenamiento de archivos en SPICE



Fuente: Ephemeris Subsystem SPK (NASA, 2019-b)

²⁴ Es un sistema coordinado ubicado en un punto definido del espacio con una inclinación y configuración dada. Por ejemplo, ubicado en Baricentro del Sistema solar ('J2000') o en el centro de masa de la Tierra ('ITRF93')

Como se muestra en la Figura 14, SPICE explora diferentes archivos SPK para determinar los vectores A al F y finalmente devolver el vector E-H. Así, SPICE requiere el uso de diferentes archivos SPK para la determinación del vector de estado buscado.

Algunas reglas que ayudan a definir los archivos SPK por utilizar son:

- Los baricentros de los sistemas planetarios se encuentran siempre en un archivo SPK de planetas, en el cual también se encuentra al Sol.
- Los archivos SPK de planetas pueden tener diferentes tamaños, dependiendo del periodo de tiempo que cubran. Entre mayor es el periodo de tiempo mayor el tamaño del archivo, pero también menor precisión (por la interpolación matemática)
- Las efemérides de los archivos SPK de un planeta están siempre relacionados con el baricentro del sistema planetario. Cada archivo contiene efemérides del centro de masa del planeta: “Cada planeta es tratado como un satélite de su propio baricentro” (NASA, 2019-b); es común encontrar los planetas en archivos SPK de los satélites.
- Los archivos SPK de satélites no necesariamente contienen a todos los satélites; pueden requerirse varios archivos SPK para tener todos los satélites.
- Con base en el tiempo de descubrimiento y los estudios que ha realizado NASA, es posible que algunos satélites no se encuentren en algún archivo SPK.

Además del marco de referencia esperado, se requiere indicar cual objeto de efemérides deber ser el objetivo (como la sonda Huygens) y cual objeto debe ser el observador (como la Estación espacial 14). Cualquier objeto de efemérides puede ser objetivo u observador.

4.3. Desarrollo del código de programación

4.3.1. Lenguaje de programación

La etapa de formulación del modelo, además de contener el modelo simbólico representado por las ecuaciones, contiene las rutinas de programación de software necesarias para resolver tales ecuaciones. Por ello, la primera definición al respecto es el lenguaje de programación que se debe utilizar; para ello, un insumo importante son los lenguajes sobre los cuales se ha desarrollado el kit de herramientas de SPICE (ver numeral 2.4.4).

Entre tales lenguajes desarrollados directamente por la NASA se encuentra Matlab y entre los desarrollados por terceros se encuentra Python. Estos son dos lenguajes con gran

reconocimiento en su aplicación para desarrollos científicos. El primero de ellos requiere el uso de licencia, mientras el segundo tiene licencia aprobada tipo OSI (*Open Source license* - código abierto), inclusive para uso comercial (python, s.f.). Ninguno de los dos tiene grandes facilidades para desarrollo de interfaz de usuario.

Se ha definido el uso de Python, por su alto potencial y flexibilidad, la variedad y robustez de estructuras de datos que facilita la programación y favorece los tiempos de procesamiento, la amplia cantidad de librerías y paquetes disponibles y el tipo de licencia que requiere; este último, pues al utilizar Python se facilita el desarrollo futuro al no depender del costo o acceso a una costosa licencia, como la que requiere Matlab.

En Python, una vez revisados los paquetes y durante el desarrollo, fueron incluidos:

- Numpy (*Numerical Python*): para el cálculo vectorial ágil.
- Pandas: para el análisis y manipulación de datos.
- Scipy: para análisis científico.
- Matplotlib: para la representación gráfica
- Spiceypy: Es un paquete Open Source desarrollado por profesionales de diferentes entidades y partes del mundo, incluyendo MIT y NASA, con base en el kit de herramientas CSPICE desarrollado por la NASA (Annex, y otros, 2020).

4.3.2. Hardware utilizado

Para el desarrollo y ejecución del código desarrollado, se ha utilizado un PC con las características indicadas en la Tabla 4.

Tabla 4. Especificaciones del hardware utilizado

Componente	Atributo	Especificación
Procesador AMD Ryzen® 7 2700	Núcleos	8
	Subprocesos	16
	Reloj base	3.2 GHz
	Reloj de aumento máximo	4.1 GHz
	Caché total	20 Mb
Memoria RAM ADATA XPG SPECTRIX D41	Tamaño	16 Gb (2x8Gb)
	Tecnología	DDR4
	Velocidad	2666 MHz
Tarjeta gráfica ASUS TUF-GTX 1660TI	Motor gráfico	NVIDIA® GeForce GTX 1660 Ti
	Memoria de video	6 Gb GDDR6
	Velocidad	12002 MHz

Fuente: Elaboración propia

4.3.3. Estrategia de desarrollo

Para el desarrollo del código se eligió utilizar las técnicas de agilismo de metodología Scrum (Schwaber & Sutherland, 2020), específicamente en la división del desarrollo por *sprints* y la mejora mediante incrementos. Los *sprints* definidos se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. *Sprints para desarrollo del código*

Sprint	Entradas	Salidas	Alcance	Logro
1	<ul style="list-style-type: none"> • 2 cuerpos (1 cuerpo + masa negligible) • Tiempo 	Trayectoria (x, y, z)	Resolución de EDO	Estabilidad de la solución con 2 cuerpos
2	<ul style="list-style-type: none"> • N cuerpos • Tiempo • Masa negligible 	Trayectoria (x, y, z)	Aumento de alcance de solución de EDO	Estabilidad de la solución general
3	<ul style="list-style-type: none"> • Selección de marco • N cuerpos • Tiempo • Masa negligible 	Trayectoria (x, y, z) en nuevo marco	Adición de cálculos de cambio de marco	Representación de la trayectoria en nuevo marco

Fuente: Elaboración propia

4.4. Selección del método de solución de los sistemas de EDO

4.4.1. Método de solución

La exactitud, precisión²⁵ y velocidad de respuesta de la solución del PVI representado en la ecuación (10) y la ecuación (20) depende del método numérico a utilizar para resolverlo.

Para determinar el método numérico a utilizar, se realizó una comparación entre el resultado que arrojaba dicha solución para PVI cuya solución analítica es conocida. Se utilizaron PVI con diferente complejidad, desde PVI de una sola EDO hasta sistemas de EDO. Se han preferido sistemas de ecuaciones conociendo que la ecuación (20) corresponde a un sistema de ecuaciones. Para conocer el detalle de los PVI utilizados en la prueba ver el Anexo E.

4.4.2. Métodos numéricos evaluados

Para determinar los métodos a probar se tuvo en cuenta los métodos disponibles en la función `solve_ivp` del paquete `Scipy` de `Python`, incluyendo una comparación con el popular método `ODE45` de `Matlab`²⁶. Así, los 7 métodos evaluados se presentan en la Tabla 6 (SciPy, s.f.).

²⁵ Exactitud es la cercanía de una medida al valor real. Precisión es la cercanía de varias medidas a un punto.

²⁶ El PVI fue solucionado en Matlab y los resultados exportados para ser utilizados en Python

Tabla 6. *Métodos numéricos por evaluar*

Método	Resumen
<i>RK45</i>	Método explícito de Runge-Kutta de orden 5 (4). El error se controla asumiendo la precisión del método de cuarto orden, pero los pasos se toman utilizando la fórmula precisa de quinto orden (se realiza la extrapolación local).
<i>RK23</i>	Método explícito de Runge-Kutta de orden 3 (2). El error se controla asumiendo la precisión del método de segundo orden, pero los pasos se toman utilizando la fórmula precisa de tercer orden (se realiza la extrapolación local).
<i>DOP853</i>	Método explícito de Runge-Kutta de orden 8. Corresponde a la implementación en Python del algoritmo "DOP853" escrito originalmente en Fortran. Recomendado para resolver con alta precisión.
<i>Radau</i>	Método implícito de Runge-Kutta de la familia Radau IIA de orden 5. El error se controla con una fórmula incrustada precisa de tercer orden. Requiere del Jacobiano para su funcionamiento ²⁷ .
<i>BDF</i>	Método implícito de varios pasos de orden variable (1 a 5) basado en una fórmula de diferenciación hacia atrás para la aproximación derivada. Requiere del Jacobiano para su funcionamiento ²⁷ .
<i>LSODA</i>	Método Adams / BDF con detección y conmutación automática de rigidez. Este es un contenedor del solucionador de Fortran de ODEPACK. Requiere del Jacobiano para su funcionamiento ²⁷ . Es una opción universal
<i>ODE45</i>	Es un método propio de Matlab, basado la fórmula explícita de Runge-Kutta (orden 4 a 5) y en el par Dormand-Prince, considerado un método de orden medio. Es un solucionador de un solo paso, con paso adaptativo (Matlab, 2021-a). Goza de un reconocimiento general sobre su exactitud ²⁸

Fuente: Elaboración propia

Los métodos *RK23*, *RK45*, *DOP853* y *ODE45* se recomiendan para problemas no rígidos (*nonstiff problems*) y los métodos *Radau* y *BDF* se recomiendan para problemas rígidos²⁹ (*stiff problems*).

²⁷ En caso de no configurar de forma explícita el Jacobiano, la función calcula este por medio de diferencias finitas

²⁸ Apreciación general del autor, no se cuenta con fuentes verificables que confirmen esta apreciación

²⁹ (Chapra & Canale, 2006, pág. 767): "Un sistema rígido es aquel que tiene componentes que cambian rápidamente, junto con componentes de cambio lento. En muchos casos, los componentes de variación rápida son efímeros, transitorios, que desaparecen, después de lo cual la solución es dominada por componentes de variación lenta. Aunque los fenómenos transitorios existen sólo en una pequeña parte del intervalo de integración, pueden determinar el tiempo en toda la solución".

Para efectos de esta prueba, los métodos fueron utilizados con los niveles de tolerancia (ver numeral 4.4.5) por defecto que establece la aplicación respectiva, indicados en la Tabla 7.

Tabla 7. Valores por defecto de tolerancia para los métodos numéricos evaluados

Método	Tolerancia de error relativa	Tolerancia de error absoluta
<i>RK45</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>RK23</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>DOP853</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>Radau</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>BDF</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>LSODA</i>	10^{-3}	10^{-6}
<i>ODE45 (Matlab)</i>	10^{-3}	10^{-6}

Fuente: Elaboración propia

4.4.3. Criterios de evaluación

La solución numérica (aplicación del método numérico evaluado), consiste en una matriz cuyas dimensiones corresponden al número de ecuaciones del sistema resuelto, evaluado en valores definidos de la variable independiente. Por tanto, la solución exacta (mediante el uso de la solución analítica), también debe evaluarse en los mismos valores de la variable independiente, generando también una matriz. Así, la solución numérica (*sol. met. num*) se compara con la solución exacta (*sol. exacta*), determinando así el error. Para ello, se aplica:

$$error = |sol. exacta - sol. met. num|. \quad (12)$$

La aplicación de la ecuación (12) genera una matriz cuyas dimensiones son iguales a las soluciones numérica y exacta. Con el fin de representar el error, es necesario obtener un vector que represente el error. Esto no es un problema cuando se resuelve una EDO de orden 1, pero en los demás casos es necesario realizar los siguientes ajustes:

- Cuando se está resolviendo un sistema de EDO de orden 1 (casos 2 y 3), se procede a comparar los valores de los errores de cada elemento de los vectores de respuesta y se toma el valor más alto (mayor error). De esta manera se obtiene un único vector.
- Cuando se está resolviendo una ecuación de orden 2 o superior, que se convierte en un sistema de ecuaciones para la resolución, la solución exacta consiste en un vector y, por tanto, en la solución numérica se busca el vector que corresponde a la solución de la EDO.
- En los casos de sistemas de ecuaciones que contengan una o más EDO de orden 1, se procede con una combinación de los 2 casos anteriores.

El error es dinámico, por lo cual cambia cada vez que se solucione el sistema. Por ello, es necesario realizar varias iteraciones con el fin de conocer el comportamiento promedio del error. Una vez obtenido el vector de error, es posible realizar la representación gráfica y visualmente evaluar los métodos más adecuados a utilizar; no obstante, es importante contar con una evaluación numérica; el primer parámetro para esta evaluación consiste en la determinación del máximo error, mediante la aplicación de las siguientes ecuaciones:

$$\text{error.general}_1 = \max(\text{sol.exacta} - \text{sol.met.num}), \quad (13)$$

$$\text{error.general}_2 = \|\text{sol.exacta} - \text{sol.met.num}\|. \quad (14)$$

Otra medida importante es la desviación estándar, que permite observar la fluctuación (dispersión) del error, sinónimo de estabilidad. Ya que se utiliza un intervalo del dominio de la ecuación y, además, se evalúa la solución en valores discretos definidos de la variable independiente, tenemos una muestra de la solución y, en consecuencia, debemos utilizar la desviación estándar muestral³⁰ (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012):

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (15)$$

El parámetro final para determinar la eficiencia del método es el tiempo de procesamiento. Es importante reiterar que estos parámetros no son estáticos y varían entre cada iteración.

4.4.4. Resultados

Con el nivel de error obtenido, se observa que los errores no son significativos por lo cual la representación de la solución no genera valor agregado, lo cual es un resultado esperado ya que se han evaluado métodos numéricos implementados en soluciones de alta confiabilidad. En la Tabla 8 se presenta el consolidado final, el cual corresponde al promedio de los datos de la evaluación realizada para cada PVI (ver Anexo E).

³⁰ Se utilizan $n-1$ grados de libertad asociados con la varianza

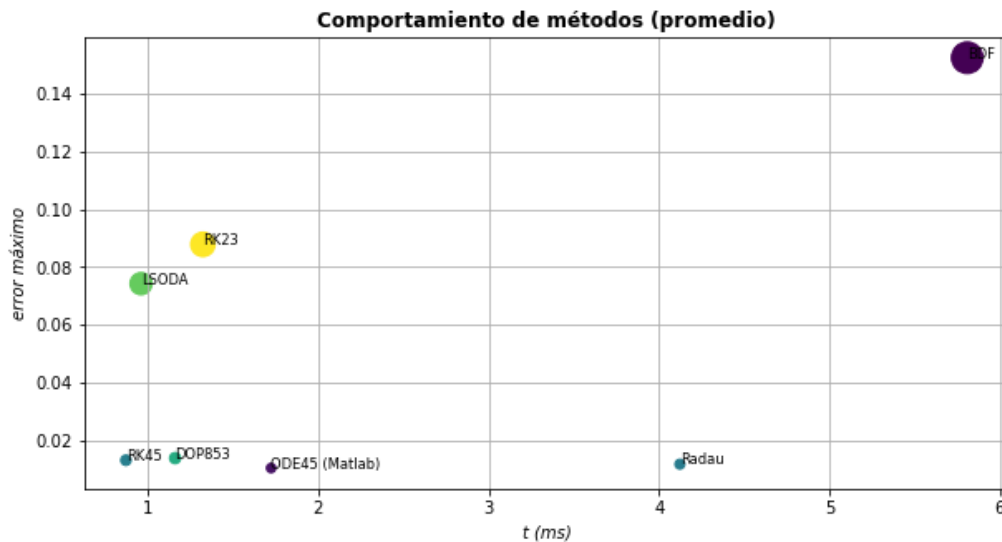
Los datos consolidados se presentan gráficamente en la Figura 15, donde se observa la relación entre el tiempo de proceso y el error; la desviación estándar se representa con el tamaño de la burbuja, en una escala de 10000.

Tabla 8. Resultados de la evaluación de los métodos numéricos

PVI	Método\parámetro	Norma	Max(abs)	Desv.Std	Tiempo (ms)
Consolidado	RK45	4.2590E-02	1.3019E-02	3.8576E-03	0.8716
	RK23	3.5286E-01	8.7861E-02	2.1587E-02	1.3233
	DOP853	5.2240E-02	1.3747E-02	4.3762E-03	1.1602
	Radau	3.6976E-02	1.1646E-02	3.4829E-03	4.1231
	BDF	5.8211E-01	1.5257E-01	3.6013E-02	5.8099
	LSODA	2.7810E-01	7.4236E-02	1.7713E-02	0.9602
	ODE45 (Matlab)	3.0615E-02	1.0310E-02	3.1168E-03	1.7237

Fuente: Elaboración propia

Figura 15. Comportamiento del error vs tiempo vs desviación estándar (consolidado)



Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta este consolidado y las observaciones anteriores, las conclusiones de la evaluación se presentan en la Tabla 9.

Tabla 9. Conclusiones de la evaluación de los métodos numéricos

Método	Resumen
BDF	Es el método que requiere mayor tiempo de procesamiento y que presenta un error máximo alto en comparación con los demás métodos; además es el método que mostró mayor dispersión. No se considera su uso en el presente trabajo.
RK23	Como es de esperar en un método de orden menor, el error mostrado es alto, su tiempo de procesamiento es bajo y la fluctuación es alta. No se considera su uso en el presente trabajo.

Método	Resumen
<i>LSODA</i>	Esta opción universal presenta excelentes tiempos de procesamiento, pero a costo de error y fluctuación. No se considera su uso en el presente trabajo.
<i>Radau</i>	Es un método que requiere tiempo de procesamiento, aunque el error mostrado es bajo en comparación con los demás métodos; así mismo, es un método de baja dispersión. En caso de encontrar ecuaciones rígidas , este sería el mejor método por utilizar. Se debe probar con el uso del Jacobiano explícito.
<i>RK45</i>	Uno de los métodos más conocidos, presentó una excelente combinación entre el nivel de error, el tiempo de procesamiento y la dispersión; es una buena opción, pero dado que en la escala estelar la diferencia en el nivel de error representa cientos o miles de kilómetros, se busca un método con un error más pequeño.
<i>ODE45</i>	Este método ha hecho honor a su reputación, pues muestra un excelente balance entre el nivel de error, el tiempo de procesamiento y el nivel de dispersión. Es una excelente alternativa disponible en un paquete ampliamente utilizado para el cálculo numérico.
<i>DOP853</i>	este método ha demostrado lo que la bibliografía técnica indica del mismo: alta exactitud. Ha mostrado el mejor balance entre el nivel de error, el tiempo de procesamiento y el nivel de dispersión. Este es el método elegido en el caso de encontrar ecuaciones no rígidas .

Fuente: Elaboración propia

4.4.5. Impacto de la disminución de la tolerancia

Los tipos de tolerancia que se configuran en los métodos numéricos son (Matlab, 2021-b):

- *Tolerancia de error relativa (tol.rel)*: mide el error relativo a la magnitud de cada componente de la solución. En términos generales, controla el número de dígitos correctos en todos los componentes de la solución, excepto aquellos menores que la tolerancia absoluta.
- *Tolerancia de error absoluta (tol.abs)*: umbral por debajo del cual el valor de la solución deja de ser importante. Si el valor absoluto de la solución es más pequeño que este umbral, el solucionador no necesita obtener ningún dígito correcto en el valor absoluto de la solución. Por ello, este umbral debe tener en cuenta la escala de los componentes de la solución. Se debe tener en cuenta que $tol.rel \leq tol.abs$.

Con los 2 métodos elegidos, *Radau* y *DOP853*, es necesario disminuir los límites de tolerancia con el fin de lograr una mayor exactitud (menor error). Para ello, se ha seguido el siguiente procedimiento:

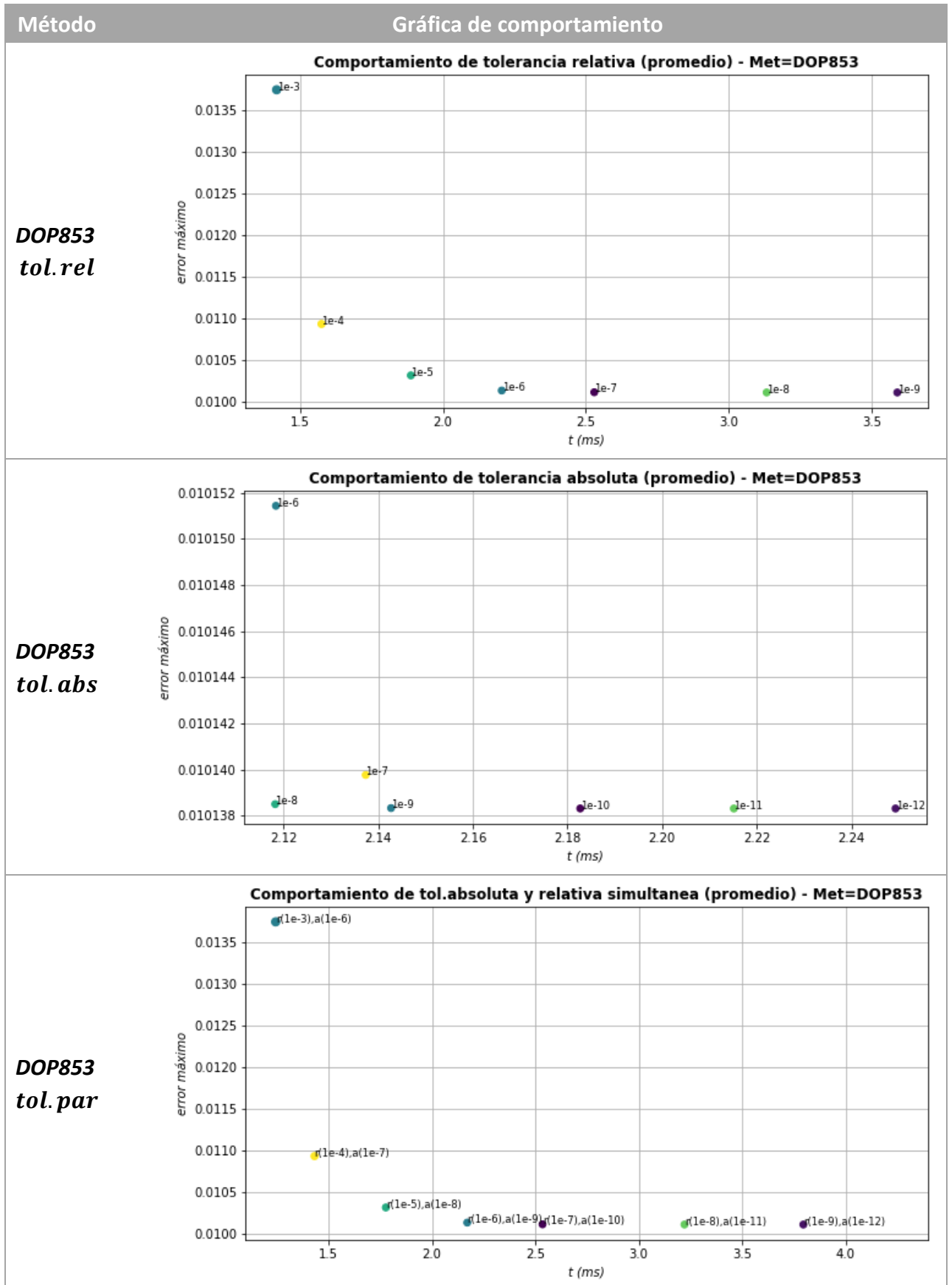
- i. $tol. abs = 10^{-12}$, $tol. rel \in \{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}\}$. Se varia la $tol. rel$ en valores discretos, congelando el valor de $tol. abs$ en un valor mínimo.
- ii. $tol. rel = 10^{-6}$, $tol. rel \in \{10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}\}$. Se varia la $tol. abs$ en valores discretos, congelando el valor de $tol. rel$ en un valor medio.
- iii. $[tol. rel, tol. abs] \in \{[10^{-3}, 10^{-6}], [10^{-4}, 10^{-7}], [10^{-5}, 10^{-8}] \dots [10^{-9}, 10^{-12}]\}$. Se varían tanto $tol. rel$ como $tol. abs$ como una pareja ($tol. par$) que toma ciertos valores discretos.

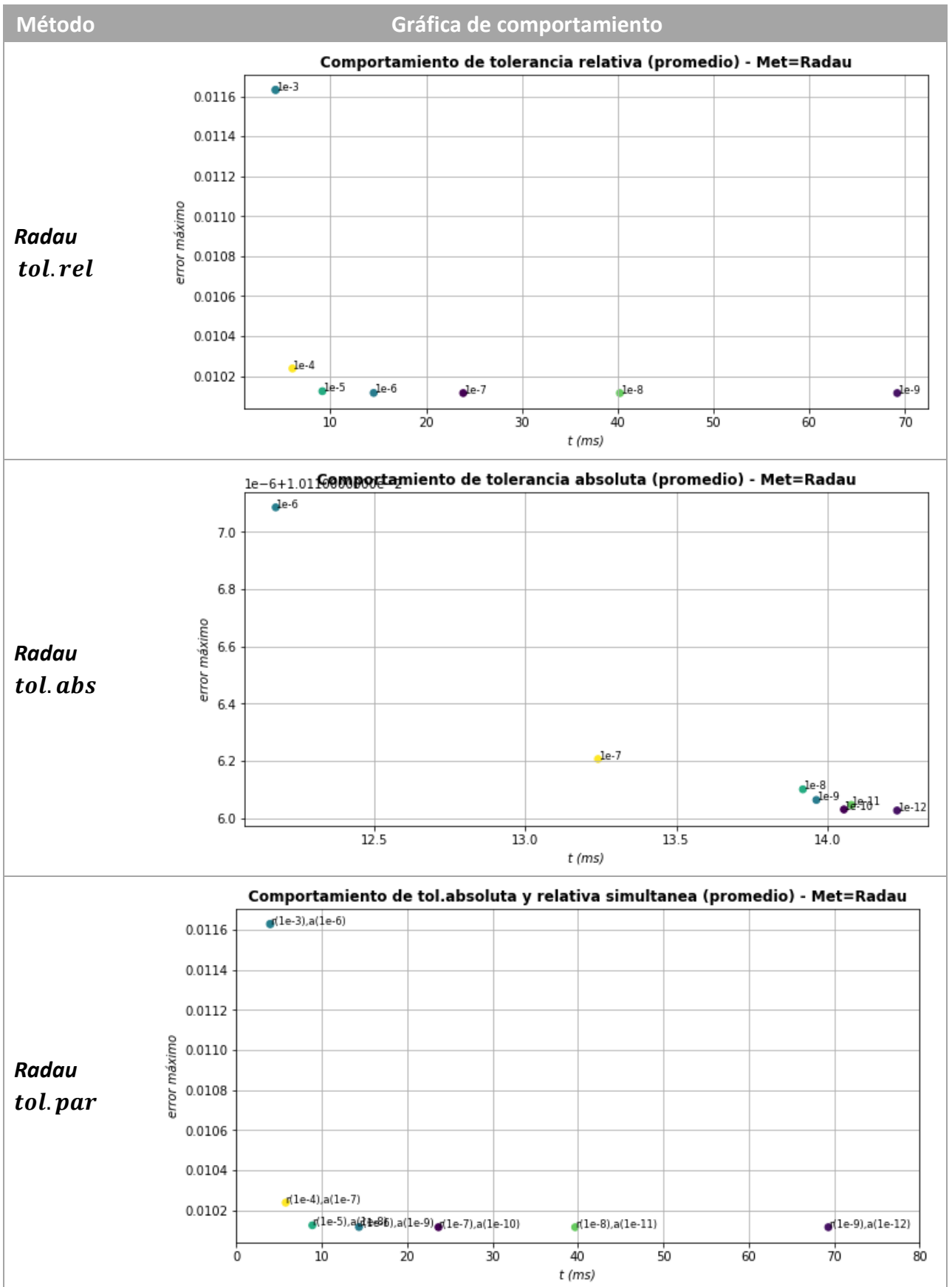
Este procedimiento se sigue para cada método en cada uno de los PVI seleccionados, con 100 iteraciones; el resultado en cada PVI se presenta en el Anexo E. Con base en los resultados en cada PVI, se ha obtenido un comportamiento promedio general de la tolerancia que se presenta en la Tabla 10. Se representa el tiempo de procesamiento en contraste con el error; aunque el tamaño de burbuja representa la desviación estándar, esta es muy similar entre las diferentes tolerancias y no se observa diferencia.

A partir de este comportamiento se puede concluir:

- En ambos métodos se observa que los valores óptimos son $tol. rel = 10^{-6}$ y $tol. abs = 10^{-9}$, pues en tales valores se presenta el menor error. Disminuir más estas tolerancias aumenta el tiempo de procesamiento sin un aporte representativo en la disminución de error.
- En el manejo con pares de ambas tolerancias, se confirma que la combinación $[tol. rel, tol. abs] = [10^{-6}, 10^{-9}]$ es el valor óptimo.

Tabla 10. Comportamiento de la tolerancia





Fuente: Elaboración propia

5. Descripción del modelo

5.1. Premisas

5.1.1. Baricentro

En su concepción fundamental un baricentro es el centro de masa de un sistema de cuerpos³¹. Cuando un objeto se encuentra bajo la influencia de diferentes fuerzas gravitacionales, todas ellas distintas en dirección y magnitud, se observa que la gravedad no es la misma en todos los puntos de su masa. Ya que la fuerza gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los objetos (ver ecuación (8)), el efecto de muchos objetos lejanos se puede despreciar. Sin embargo, la influencia de cuerpos cercanos modifica la ubicación del baricentro.

En un conjunto de cuerpos que orbitan entre ellos, su corta distancia genera un cambio en el baricentro de forma tal que los cuerpos orbitan alrededor de su baricentro común.

En el caso del sistema solar, se encuentran varios baricentros en sistemas conformados por diferentes cuerpos cercanos entre sí: sistema Tierra-Luna y en general cualquier sistema planeta-satélites (como Júpiter y sus lunas, Saturno y sus lunas, etc). Estos son utilizados como punto de referencia para la posición de los cuerpos que conforman el sistema.

Dada la definición del baricentro, entonces la Tierra, además de su movimiento de rotación sobre su propio eje y su movimiento de rotación alrededor del Sol, tiene un movimiento de rotación alrededor del baricentro que forma con la Luna; ello sucede para todos los planetas del sistema solar (y en general del Universo).

5.1.2. SSB

Existe un baricentro de alta relevancia: el baricentro del sistema solar o SSB (*Solar System Barycenter*). Este es el baricentro que conforman todos los cuerpos del sistema solar, incluyendo el Sol, los planetas, satélites y demás. De igual forma que sucede con el baricentro

³¹ (Giancoli, 2008, pág. 230): “si un cuerpo gira, o varias partes de un sistema de objetos tienen movimiento relativo entre sí, hay un punto que se mueve en la misma trayectoria que se movería una partícula si ésta está sometida a la misma fuerza neta. Este punto se llama centro de masa (abreviado CM). El movimiento general de un objeto extenso (o sistema de objetos) se puede considerar como la suma del movimiento traslacional del CM, más los movimientos rotacionales, vibratorios o de otros tipos, con respecto al CM.”

de los sistemas planeta-satélites, el SSB indica que el Sol y todos los demás cuerpos del sistema solar giran alrededor del SSB; de esta manera el movimiento orbital de los planetas, incluida la Tierra, se realiza en realidad alrededor del SSB.

El SSB es un punto dinámico que varía con respecto al centro del Sol, ya que es el Sol el cuerpo que más influye en la ubicación del SSB. Cuando el SSB se ubica fuera de la superficie del Sol, el Sol experimenta un movimiento de traslación; cuando el SSB se ubica dentro del Sol, el Sol experimenta un movimiento conocido como “*wobble*” (como un tambaleo similar al que se observa en un trompo). El SSB esta normalmente fuera del Sol (Pascual, 2019).

Ya que el sistema solar tiene una traslación alrededor del centro de la galaxia que puede considerarse con velocidad constante, el SSB es considerado como un punto no inercial; así, la referenciación frente al SSB permite, a nivel astronómico, la aplicación de las leyes del movimiento.

5.1.3. Masa negligible

Se define como masa negligible, aquella tan pequeña o poco importante como para ser tenida en cuenta, cuyo efecto en otros cuerpos es insignificante o despreciable.

El modelamiento que se presenta en el numeral 5.2 se basa en que esta masa negligible no tiene un efecto importante sobre los demás cuerpos, efecto entendido como atracción gravitacional; la solución planteada se ha configurado con un nivel de tolerancia con el fin de lograr un balance entre la exactitud y el tiempo de procesamiento. De esta manera, se considera que una masa es negligible cuando el máximo de los efectos que esta produce en los demás cuerpos es inferior a la tolerancia relativa utilizada en la solución.

Las unidades de medida para determinar este efecto deben ser las mismas utilizadas para la solución del problema, de acuerdo con lo indicado en el numeral 5.1.4. Por tanto,

$$\max \left(G \frac{m_0}{\|r_i - r_0\|^3} \cdot (r_i - r_0) \right)_i < tol. rel. \quad (16)$$

5.1.4. Sistema de medidas

El Sistema Internacional de Medidas (SI) es el sistema preferido para utilizar en un desarrollo que involucre medidas de dimensiones físicas, como es el caso del presente trabajo; no obstante, las dimensiones cambian ostensiblemente en el espacio exterior y dimensiones

como el espacio, el tiempo y la masa se comportan en escalas muy diferentes a lo que puede evidenciarse de estas mismas dimensiones en La Tierra. Por ello, es recomendable utilizar el Sistema Astronómico de Unidades (SAU)³² (IAU, 1976):

- Distancia: la IAU reconoce tres medidas (IAU, s.f.):
 - Unidad Astronómica de Longitud (*au*³³). Esta es “la distancia desde el centro del Sol a una partícula de masa pequeña que, siguiendo una órbita circular, tuviera un periodo de traslación de 365.2568983 *días*” que equivale a la distancia media entre la Tierra y el Sol. 1 *au* equivale a 149,597,870,700 *m* (IAU, 2012).
 - Parsec (*ps*): es utilizada cuando las distancias estudiadas se encuentran más allá del sistema solar; equivale aproximadamente a 30.857×10^{12} *km* o aproximadamente a 206,000 *au*.
 - Año luz (*ly* – *light year*): utilizada comúnmente en publicaciones científicas y publicaciones populares. Equivale a 0.3 *ps* o 9,460,730,472,580.8 *km* o 63,241 *au*. Se define como la distancia que recorre la luz en el vacío en un año juliano. Aunque es menor a 1 *ps*, es aún una distancia increíble.
- Tiempo: Existen 2 Unidades Astronómicas de Tiempo:
 - Día (*día*): equivale 86,400 segundos
 - Año (*año*): corresponde al año juliano, equivalente a 365.25 *días*. Se utiliza cuando se estudian fenómenos de larga duración.
- Masa: La Unidad Astronómica de Masa es la *masa solar (S)*. Equivale a 1.98892×10^{30} *kg*.

Para las unidades de tiempo, distancia y masa que se utilizan en el presente trabajo, se define:

Tabla 11. *Unidades de medida*

	Distancia	Tiempo	Masa
Unidad	<i>au</i>	<i>día, año</i>	<i>kg</i>

Fuente: Elaboración propia

³² Fue determinado por la IAU en 1976

³³ Símbolo reconocido por IAU (en minúsculas); no obstante, la Oficina Internacional de Pesas y Medidas y la ISO 80000 recomiendan el símbolo UA (en mayúsculas). El sistema internacional indica que las mayúsculas se utilizan únicamente en unidades que llevan el nombre de una persona (por ejemplo, el Joule - J y el Newton - N)

5.1.5. Masa de los cuerpos

La información de la masa de los cuerpos del sistema solar se presenta en la Tabla 15 (ver Anexo B). Esta tabla es utilizada por el algoritmo y contiene 2 datos de alta relevancia: la masa y el parámetro gravitacional estándar, así como la tolerancia de estos datos.

El parámetro gravitacional estándar es una forma alterna de expresar la masa de un cuerpo (NASA, s.f.-m):

$$\mu = G * M. \quad (17)$$

Este parámetro se expresa en unidades de $\frac{km^3}{s^2}$ (SI) o $\frac{au^3}{día^2}$ (SAU). En los archivos de SPICE también lo denominan parámetro de masa (*mass parameter*).

Las sondas espaciales que ha enviado NASA y otras agencias espaciales poseen instrumentación que es capaz de medir la influencia gravitacional del cuerpo, obteniendo así el parámetro gravitacional estándar del cuerpo; a partir de este se obtiene la masa del cuerpo, utilizando la Constante de Gravitación Universal. Por ello, cuando en las efemérides se encuentra el dato relacionado con este parámetro, es recomendable su uso pues corresponde a una medición directa realizada y tiene mayor exactitud en comparación con el uso del producto entre la masa y la Constante de Gravitación Universal.

Cuando el parámetro no es provisto por las efemérides, se ha utilizado la masa disponible. En este caso se debe utilizar la Constante de gravitación Universal:

- $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ en unidades del Sistema Internacional de medidas³⁴.
- $G = 1.985215 \times 10^{-29} \frac{au^3}{kg \cdot día^2}$ en unidades del presente trabajo³⁵.

En el caso de no contar con ninguno de los 2 datos requeridos, no es posible incluir el cuerpo en la simulación, como sucede con algunos satélites naturales.

³⁴ La medición de esta constante es un reto dado que la gravedad es una de las fuerzas fundamentales más débiles. Se utiliza el valor avalado por CODATA (Comité de Datos para la Ciencia y la Tecnología) y aceptado por la IAU. La constante se determina mediante los métodos de torsión basados en la balanza utilizada por Henry Cavendish (1798). No obstante, recientemente se logró una medición más precisa mediante interferometría cuántica de átomos fríos (Rosi, Sorrentino, Cacciapuoti, Prevedelli, & Tino, 2014)

³⁵ Valor calculado por conversión de unidades

5.1.6. Otras premisas

A continuación, se presentan algunas premisas que son base de la definición de las ecuaciones que modelan el efecto gravitatorio de los $N - 1$ cuerpos sobre la masa negligible:

1. Al limitar el alcance del presente documento a masas negligible, es posible el uso de las efemérides, pues el efecto de tales masas en el movimiento de otros cuerpos del sistema solar es despreciable. El modelamiento y cálculos del presente trabajo no puede aplicarse a objetos con masa suficientemente grande, pues estos si pueden afectar el movimiento de los otros cuerpos del sistema solar y, por tanto, no podrían utilizarse las efemérides.
2. Como se presentó anteriormente (ver numeral 2.2.2), la explicación más cercana del movimiento de los cuerpos celestes se logra a través de la Teoría General de la Relatividad. Sin embargo, esta indica que los efectos de la relatividad y los campos gravitacionales pueden despreciarse cuando tales efectos son insignificantes, tal como sucede cuando se analiza el efecto gravitacional de los cuerpos sobre una masa negligible. Por tanto, para todo cálculo se ha despreciado el efecto relativista.
3. Se debe contar para todo cuerpo con masa negligible, con la posición y velocidad inicial en forma vectorial de un espacio vectorial euclidiano \mathbb{R}^3 . De esta manera, las ecuaciones diferenciales definidas se consideran como Problemas de Valor Inicial (PVI).
4. Para el modelamiento no se consideran fuerzas diferentes a las fuerzas gravitacionales, como aquellas expuestas en el numeral 2.3.6.
5. Notación de derivadas: en el presente trabajo se pueden utilizar las siguientes notaciones, que se deben considerar equivalentes:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = x''.$$

6. En el presente trabajo se utiliza la coma “,” como separador de miles y el punto “.” como separador decimal.

5.2. Modelamiento

5.2.1. Marco de referencia inercial

El objetivo del presente trabajo es el cálculo de trayectorias para cuerpos con masa negligible, que se encuentra en un espacio vectorial euclidiano \mathbb{R}^3 . Este se convierte en un caso

específico de la aplicación de las leyes de movimiento y la Ley de Gravitación Universal, enfocada a un solo cuerpo, por lo cual corresponde a un marco de referencia inercial. Retomando la ecuación (10), para un solo cuerpo dentro de un sistema de N cuerpos se tiene:

$$\ddot{r}_0 = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(r_0 - r_i)}{\|r_0 - r_i\|^3}, \quad r_0, r_i, \dot{r}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad (18)$$

$$r_0(0) = p_0, \quad \dot{r}_0(0) = v_0.$$

Donde,

Cuerpo 0: masa negligible

Cuerpos 1 a $N - 1$: Cuerpos que perturban la trayectoria de la masa negligible.

La ecuación (18) es una ecuación de segundo orden, no lineal y vectorial, para cada instante de tiempo t . Se debe tener en cuenta que los componentes vectoriales son:

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad p_0 = (p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}), \quad v_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}), \quad r_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Así,

$$\|r_0 - r_i\| = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2}.$$

Como se explicó anteriormente, es necesario resolver para componente vectorial, por tanto:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(x_0 - x_i)}{\|r_0 - r_i\|^3} \\ \ddot{y}_0 = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(y_0 - y_i)}{\|r_i - r_0\|^3} \\ \ddot{z}_0 = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(z_0 - z_i)}{\|r_i - r_0\|^3} \end{cases}, \quad (19)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} x_0(0) = p_{x0} & y_0(0) = p_{y0} & z_0(0) = p_{z0} \\ \dot{x}_0(0) = v_{x0} & \dot{y}_0(0) = v_{y0} & \dot{z}_0(0) = v_{z0} \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones de la ecuación (19) se compone de ecuaciones de segundo orden, no lineales. Para reducir el orden de estas ecuaciones, se realizan las siguientes conversiones:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Simulador / integrador digital del sistema solar para el cálculo de trayectorias de cuerpos con masa negligible

$$v_x = \dot{x}_0 = \dot{x} \Rightarrow \dot{v}_x = \ddot{x}_0, \quad v_y = \dot{y}_0 = \dot{y} \Rightarrow \dot{v}_y = \ddot{y}_0, \quad v_z = \dot{z}_0 = \dot{z} \Rightarrow \dot{v}_z = \ddot{z}_0.$$

Dada esta transformación: $r = (x, y, z)$.

Con la cual se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(x - x_i)}{\|r - r_i\|^3}, \\ \dot{v}_y = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(y - y_i)}{\|r - r_i\|^3} \\ \dot{v}_z = -G \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{(z - z_i)}{\|r - r_i\|^3} \end{array} \right. , \quad (20)$$

con las condiciones iniciales:

$$\left(\begin{array}{lll} x(0) = p_{x0} & y(0) = p_{y0} & z(0) = p_{z0} \\ v_x(0) = v_{x0} & v_y(0) = v_{y0} & v_z(0) = v_{z0} \end{array} \right),$$

donde,

$$\|r - r_i\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

El sistema de ecuaciones (20) consiste en 6 EDO de primer orden, no lineales, con 6 condiciones iniciales (posición y velocidad inicial de la masa negligible en sus 3 coordenadas), logrando el caso de un PVI.

Los datos relacionados con $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ corresponden a las posiciones de los $N - 1$ cuerpos, los cuales se obtienen de las efemérides de SPICE para cada instante de tiempo t . Igualmente, la información relacionada con m_i , correspondiente a la masa de cada uno de los $N - 1$ cuerpos se obtiene de SPICE.

Algunas funciones requieren el uso del Jacobiano del sistema de ecuaciones. En el 0 se presenta la ecuación (33) que representa al Jacobiano para el sistema de ecuaciones indicado en la ecuación (20).

5.3. Efemérides

Utilizando los criterios de selección mencionados en el numeral 4.2.3, se seleccionaron los archivos SPK para contar con las efemérides de los cuerpos con masa no negligible en el sistema solar, los cuales se indican en la Tabla 12. El detalle de los cuerpos incluidos en cada archivo SPK se puede consultar en el Anexo A.

Tabla 12. Archivos SPK utilizados

<i>Kernel</i>	Nombre	Fecha inicio	Fecha fin	Source SPK Kernel ³⁶	Leap Seconds Kernel ³⁶
DE440	<i>de440.bsp</i>	1/01/1900 00:00:00	25/01/2650 00:00:00		
DE441	<i>de441_part-1.bsp</i>	1/01/1900 00:00:00	30/07/1969 00:00:00		
	<i>de441_part-2.bsp</i>	28/06/1969 00:00:00	31/12/9999 00:00:00		
JUP344	<i>jup344.bsp</i>	1/01/1900 00:00:00	5/06/2200 00:00:00	<i>de440.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>
JUP365	<i>jup365.bsp</i>	4/01/1900 00:00:41	1/01/2100 00:01:07	<i>de440.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>
MAR097	<i>mar097.bsp</i>	4/01/1900 00:00:41	1/01/2100 00:01:07	<i>de424.bsp</i>	<i>naif0010.tls</i>
NEP086	<i>nep086.cmt</i>	4/01/1900 00:00:41	1/01/2100 00:01:07	<i>de430.bsp</i>	<i>naif0010.tls</i>
NEP095	<i>nep095.cmt</i>	4/01/1900 00:00:41	1/01/2100 00:01:07	<i>de435.bsp</i>	
PLU058	<i>plu058.bsp</i>	1/01/1900 00:00:00	28/12/2099 00:00:00	<i>de440.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>
SAT368	<i>sat368-named_only.bsp</i>	4/01/1900 00:00:41	1/01/2100 00:01:07		<i>naif0012.tls</i>
SAT393	<i>sat393.bsp</i>	1/01/1950 00:00:41	1/01/2050 00:01:08	<i>de435.bsp</i>	<i>naif0011.tls</i>
	<i>sat393_daphnis.bsp</i>	26/12/1949 00:00:00	10/01/2050 00:00:00		
	<i>sat393-rocks_pan.bsp</i>	1/01/1950 00:00:00	1/01/2050 00:00:00		
SAT427	<i>sat427.bsp</i>	1/01/1950 00:00:41	1/01/2050 00:01:09	<i>de438.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>
URA111	<i>ura111.bsp</i>	1/01/1900 00:00:41	24/12/2099 00:01:07	<i>de430.bsp</i>	<i>naif0010.tls</i>
URA115	<i>ura115.bsp</i>	1/01/1980 00:00:00	1/01/2060 00:00:00	<i>de438.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>
URA116	<i>ura116.bsp</i>	1/01/1900 00:00:00	27/12/2599 00:00:00	<i>de440.bsp</i>	<i>naif0012.tls</i>

Fuente: Elaboración propia

Algunos aspectos para tener en cuenta:

- NASA generó en el año 2020, como una mejora y actualización de sus predecesoras *DE430* y *DE431*³⁷, las efemérides planetarias y lunares *DE440* y *DE441*, ajustando órbitas integradas numéricamente a observaciones terrestres y espaciales. Contienen los datos de posición del Sol, los baricentros de los 8 sistemas planetarios y de Plutón, entre otros. Las efemérides *DE440* y *DE441* se ajustan al mismo conjunto de datos, pero *DE441* asume

³⁶ Tomado de la documentación del *kernel*

³⁷ DE=Development Ephemeris

Simulador / integrador digital del sistema solar para el cálculo de trayectorias de cuerpos con masa negligible

que no hay amplificación entre el núcleo líquido lunar y el manto sólido, lo que evita una divergencia cuando se integra hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, *DE441* es menos preciso que *DE440* para el siglo actual, pero cubre una duración mucho más larga de años -13.200 a +17.191, en comparación con *DE440* que cubre los años 1.550 a 2.650 (Park, Folkner, Williams, & Boggs, 2021).

- Las efemérides *DE440* y *DE441* cubren otras efemérides planetarias como *DE424*, *DE430*, *DE431*, *DE435* y *DE438*.

Para la selección de los archivos LSK, se utiliza como base la información de la Tabla 12; no obstante, de acuerdo con la información del archivo LSK *NAIF0012*, este cubre los archivos *NAIF0010* y *NAIF0011*; así, únicamente se requiere el archivo *NAIF0012*.

Finalmente, de acuerdo con los archivos *kernel* PCK disponibles, el archivo *GE_DE431* contiene la información requerida para el Sol, los 8 planetas, los planetas enanos y los satélites naturales.

5.4. Descripción del código desarrollado

El código desarrollado en Python para el cálculo de la trayectoria se ha configurado como un objeto tipo clase (***Trayectoria***) cuya estructura puede observarse en la Figura 16³⁸.

De esta manera, alimentando la clase y los módulos se obtiene tanto el vector de estados de la masa negligible como el vector de fuerzas.

Para definir los cuerpos que pueden incluirse (N cuerpos), se deben cumplir con las siguientes 2 condiciones:

- Contar con información de la masa del cuerpo, ya sea mediante el parámetro gravitacional estándar (μ) o directamente con la masa (ver Tabla 15).
- Contar con efeméride para el objeto (ver Tabla 14).

Adicionalmente, como se explicó en el numeral 4.2.1, los cuerpos definidos para ser incluidos corresponden al Sol, los planetas, planetas enanos y satélites naturales, pues su masa no puede ser considerada como negligible. Por ello, la Tabla 14 y la Tabla 15 están enfocadas a este tipo de objetos.

³⁸ Módulos privados: únicamente se puede acceder a ellos dentro de la clase

Figura 16. Estructura del código desarrollado

Clase: Trayectoria	Módulos privados	Módulo __init__			
		Construye el objeto clase. Define valores para variables de uso general del objeto (constantes y transformación de unidades); crea estructuras para almacenamiento			
		Entradas:		Salidas: <i>Variables internas</i>	
		<i>utc</i>	<i>Rango de fechas de la simulación, formato 'MMM-DD, YYYY'</i>		
		<i>p0</i>	<i>Vector con las condiciones iniciales de posición en au</i>		
		<i>v0</i>	<i>Vector con las condiciones iniciales de velocidad en au/año</i>		
		Módulo __times__			
		Encargado de convertir el periodo utc en un vector			
		Entradas: <i>variables internas</i>		Salidas: <i>variables internas</i>	
		Módulo __masterdata__			
		Encargado de importar y almacenar los atributos de los cuerpos del sistema solar			
	Entradas: <i>variables internas</i>		Salidas: <i>variables internas</i>		
	Módulos de trabajo	Módulo sisPVI			
		Encargado de representar las ecuaciones diferenciales del sistema			
		Entradas:		Salidas:	
		<i>t</i>	<i>instante de tiempo para el cual se requiere evaluar las ecuaciones</i>	<i>sEDO</i>	<i>Vector de estado (x, y, z, vx, vy, vz)</i>
		<i>r</i>	<i>Vector con variables dependientes</i>		
		<i>ri</i>	<i>Vector de posiciones conocidas de los cuerpos a incluir</i>		
		<i>objetos</i>	<i>listado de objetos a incluir</i>		
		Módulo SPICEpos			
		Encargado de construir el vector de posiciones conocidas de los cuerpos a incluir			
		Entradas:		Salidas:	
		<i>marco</i>	<i>marco de referencia a utilizar</i>	<i>pos</i>	<i>Vector de posiciones conocidas de los cuerpos en cada instante de tiempo a evaluar</i>
		<i>ref</i>	<i>punto de referencia del vector</i>		
		<i>objetos</i>	<i>listado de objetos a incluir</i>		
		Módulo soIEDO			
Encargado de solucionar las ecuaciones					
Entradas:		Salidas:			
<i>pos</i>	<i>vector de posiciones conocidas de los cuerpos a incluir</i>	<i>res</i>	<i>Vector de estado de la masa negligible en cada instante de tiempo</i>		
<i>objetos</i>	<i>listado de objetos a incluir</i>				
Módulo solForce					
Encargado de calcular el efecto de cada cuerpo incluido sobre la masa negligible					
Entradas:		Salidas:			
<i>res</i>	<i>Vector de estado de la masa negligible en cada instante de tiempo</i>	<i>force</i>	<i>Vector de fuerzas de cada cuerpo en cada instante de tiempo</i>		
<i>pos</i>	<i>vector de posiciones conocidas</i>				
<i>objetos</i>	<i>listado de objetos a incluir</i>				

Fuente: Elaboración propia

6. Resultados obtenidos

6.1. Cometa Halley

Se ha elegido para la prueba de funcionamiento del simulador al cometa Halley, un cuerpo con masa negligible que ha sido objeto de muchos estudios, por lo cual se dispone de suficientes datos que permiten usarlo como referencia.

6.1.1. Datos generales

La denominación en NASA es 1P/Halley. Su periodo orbital es de 75.3 años, proveniente de la nube de Oort, siendo un cometa atípico, ya que los cometas procedentes de esta nube suelen tener periodo largo (más de 200 años); se cree que tuvo periodo largo pero que los gigantes gaseosos acortaron su periodo y atraparon en el sistema solar. Por ser un cometa grande y brillante con un corto periodo, es uno de los más reconocidos (Wikipedia, s.f.-e). Su órbita es elíptica con el Sol en unos de sus focos, con un perihelio de 0.6 au y un afelio de 35.3 au; su órbita es retrógrada (dirección contraria a los planetas). Su masa estimada es de 2.2×10^{14} kg.

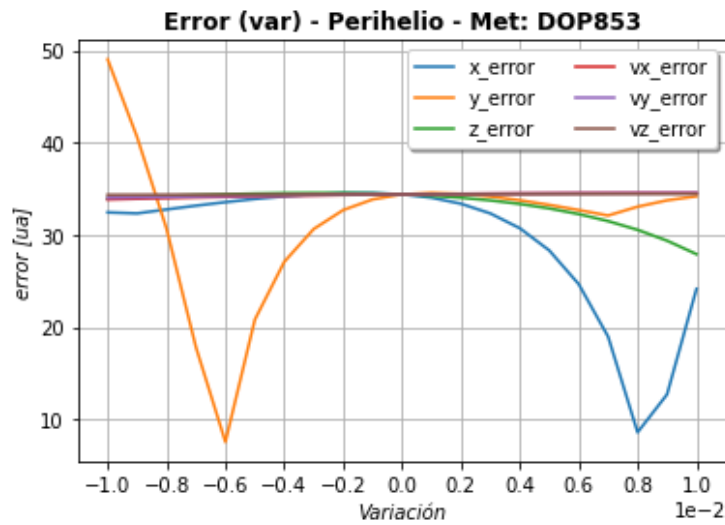
6.1.1. Sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales

Durante la etapa de experimentación, se observaron cambios grandes en el nivel de error ante cambios pequeños en las condiciones iniciales (sistema caótico); esta sensibilidad es diferente entre 2 escenarios. Como se concluyó atrás, la variación del número de subintervalos no genera un cambio notable en el error; así mismo, los niveles de tolerancia no afectan el nivel de error (ver numeral 4.4.5). Por tanto, su efecto no incide en la sensibilidad.

Un factor que puede influir en la sensibilidad es el método numérico. Por ello, se realizó una prueba de simulación para cada método de solución, en la cual se busca observar el impacto de la variación de cada componente de los vectores de posición y velocidad, modificando cada uno de ellos en un rango de $\pm 10^{-3}$, sin modificar las componentes restantes.

Como resultado, en la Figura 17 se presenta la variación del error causada por la variación en las componentes de las condiciones iniciales, en el escenario perihelio-perihelio, método DOP853. Se observa como el error sufre cambios muy grandes ante pequeños cambios de las componentes x e y , mientras que la variación en las demás componentes no tiene un efecto notable. Se observa además que en el punto 0 de variación (condiciones iniciales originales), la simulación presenta un error grande frente a los datos reales.

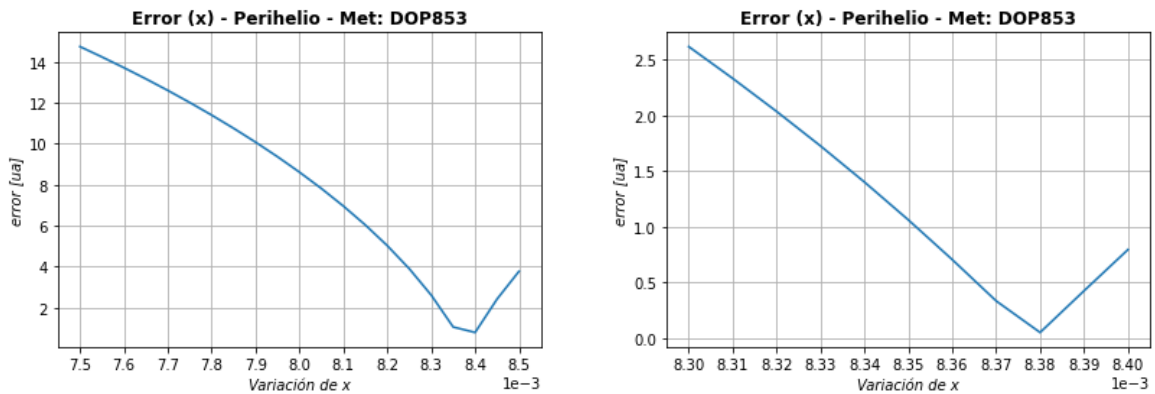
Figura 17. Cambios del vector de estado y efecto en el error, escenario perihelio-perihelio



Fuente: Elaboración propia

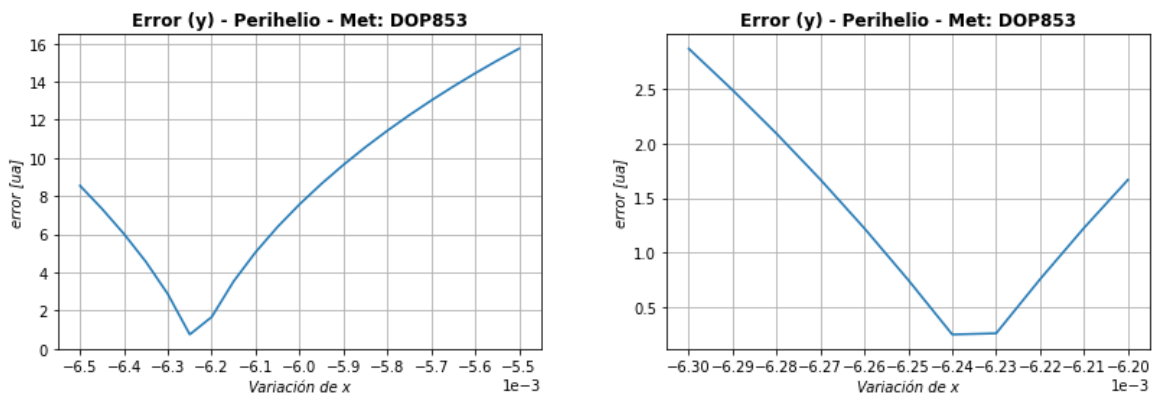
Algunos valores de las componentes x e y generan un valor muy bajo de error. Mediante simulaciones, tomando valores para $x \in [7.5 \times 10^{-3}, 8.5 \times 10^{-3}]$ e $y \in [-6.5 \times 10^{-3}, -5.5 \times 10^{-3}]$, se determinan dichos valores: $x = 8.38 \times 10^{-3}$, $y = -6.236 \times 10^{-3}$. En la Figura 18 y la Figura 19 se presenta el detalle obtenido mediante las simulaciones.

Figura 18. Error detallado, variación en la componente x , escenario perihelio-perihelio



Fuente: Elaboración propia

Figura 19. Error detallado, variación en la componente y , escenario perihelio-perihelio



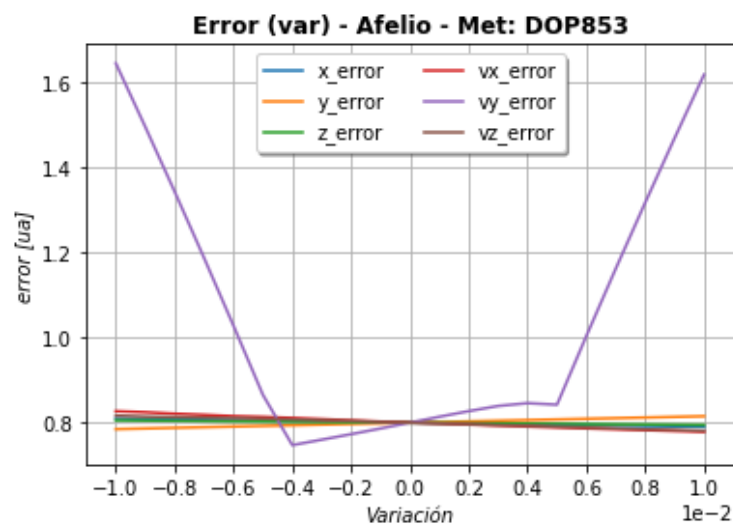
Fuente: Elaboración propia

Estas desviaciones representan un error de 1,253,630.2 km y 932,892.3 km respectivamente, que en el sistema solar representan una distancia pequeña dada la magnitud de las distancias del sistema. Esta diferencia entre ambos escenarios se debe a varios factores:

- Cuando se inicia la simulación en el perihelio, es el momento de mayor velocidad del cometa, por lo cual la variación más pequeña en la posición inicial puede representar cambios grandes en las posiciones posteriores. En contraste, cuando la simulación se inicia en el afelio, es el momento de menor velocidad del cometa, por tanto, la simulación puede absorber las pequeñas variaciones en la posición inicial.
- No se han incluido los efectos gravitacionales de los cuerpos y el perihelio es el momento de mayor cercanía con el cupo más influyente del sistema solar y los campos gravitacionales que genera el Sol genera impactos significativos en la distancia y el tiempo, ambas dimensiones incluidas en la simulación.
- No se han incluido los efectos de las perturbaciones que también afectarán la posición y velocidad, tales como los vientos solares y el efecto de la no esfericidad, los cuales aumentan al acercarse al Sol (perihelio).

En la Figura 20 se presenta la variación del error causado por la variación en las componentes de las condiciones iniciales, en el escenario afelio-afelio, método DOP853. En contraste, se observa que la variación en la componente y de la velocidad (v_y) genera un cambio en el error, pero en una escala mucho menor que en el escenario perihelio-perihelio; además, en el punto de 0 variación, el error es bajo, denotando la exactitud de la simulación.

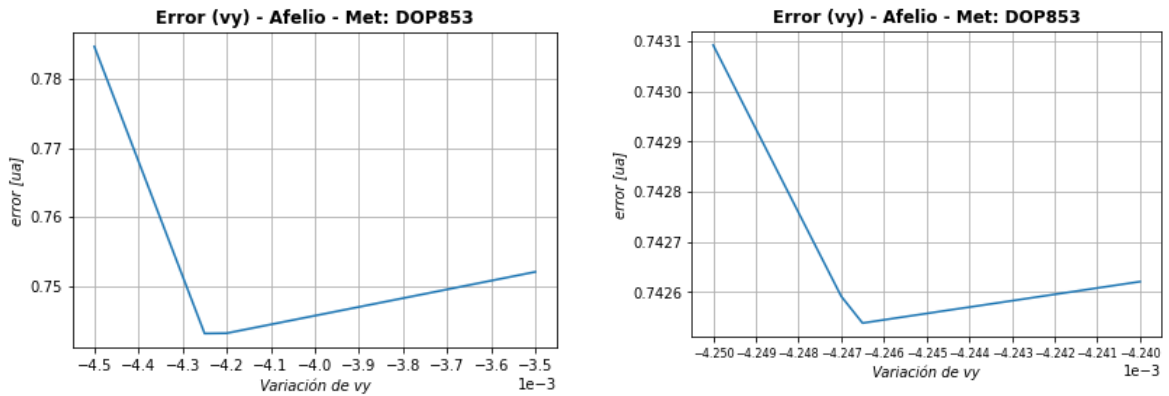
Figura 20. Efecto de variación en las componentes en el error, escenario afelio-afelio



Fuente: Elaboración propia

Un valor de la componente v_y que genera el valor más bajo de error. Mediante simulaciones, tomando valores para $v_y \in [-4.5 \times 10^{-3}, -3.5 \times 10^{-3}]$, se determina dicho valor: $v_y = -4.2465 \times 10^{-3}$. En la Figura 21 se presenta el detalle obtenido mediante las simulaciones.

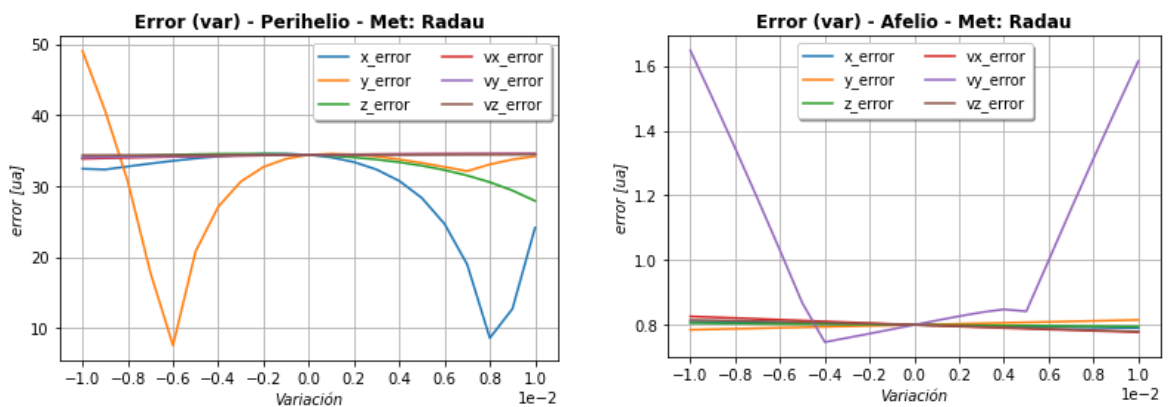
Figura 21. Error detallado, variación en la componente v_y , escenario afelio-afelio



Fuente: Elaboración propia

Finalmente, en la Figura 22 se presenta la variación del error causado por la variación en las componentes de las condiciones iniciales, en ambos escenarios, método Radau. Se observa que el método no genera un cambio importante en el comportamiento del error.

Figura 22. Efecto de variación en las componentes en el error, método Radau



Fuente: Elaboración propia

6.1.2. Simulación de la trayectoria

En la Tabla 13 se presentan los datos para la simulación de los escenarios definidos, así:

- Perihelio-Perihelio: 80 años desde el último perihelio, repitiendo el perihelio, con un afelio.
- Afelio-Afelio: 80 años desde el próximo afelio, repitiendo el afelio, con un perihelio.

Para ello, se obtuvieron de la aplicación HORIZONS (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#>) los datos de posición y velocidad reales del

cometa en los periodos de tiempo indicados atrás. El primer dato de estas colecciones es capturado como las condiciones iniciales (posición y velocidad).

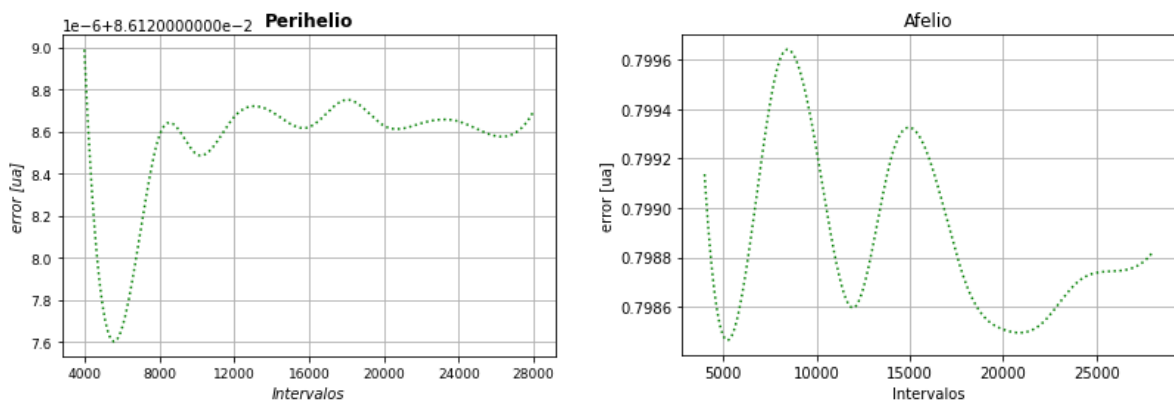
Tabla 13. Datos de simulación para los escenarios

	Perihelio-Perihelio	Afelio-Afelio
Periodo	'1986 February 09, 14:33:00 UTC' - '2066 February 09, 14:33:00 UTC'	'2023 November 02, 14:33:00 UTC' - '2103 November 02, 14:33:00 UTC'
Marco de referencia	J2000	
Punto de referencia	Solar System Barycenter (SSB)	
Cuerpos incluidos	Sol, Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno	
Tolerancia utilizada	$[tol. rel, tol. abs] = [10^{-6}, 10^{-9}]$	
# Subintervalos	6,000	
Condiciones iniciales originales	$p = \{0.325, -0.451, 0.166\}$ $v = \{-9.039, -6.992, -1.312\}$	$p = \{-19.87, 27.227, -9.955\}$ $v = \{0.15, 0.117, 0.022\}$
Condiciones iniciales ajustadas	$p = \{0.325, -0.457, 0.166\}$ $v = \{-9.039, -6.992, -1.312\}$	$p = \{-19.87, 27.227, -9.955\}$ $v = \{0.15, 0.117, 0.022\}$

Fuente: Elaboración propia

El siguiente paso es la definición de número de subintervalos de la simulación. Para ello, se ejecutó la simulación de cada escenario tomando valores en un rango entre 4,000 y 28,000 subintervalos, obteniendo los resultados que se observan en la Figura 23. Se concluye que el error no sufre variaciones importantes al cambiar el número de subintervalos. No obstante, el menor error se presenta con 6,000 subintervalos.

Figura 23. Comportamiento del error vs número de intervalos



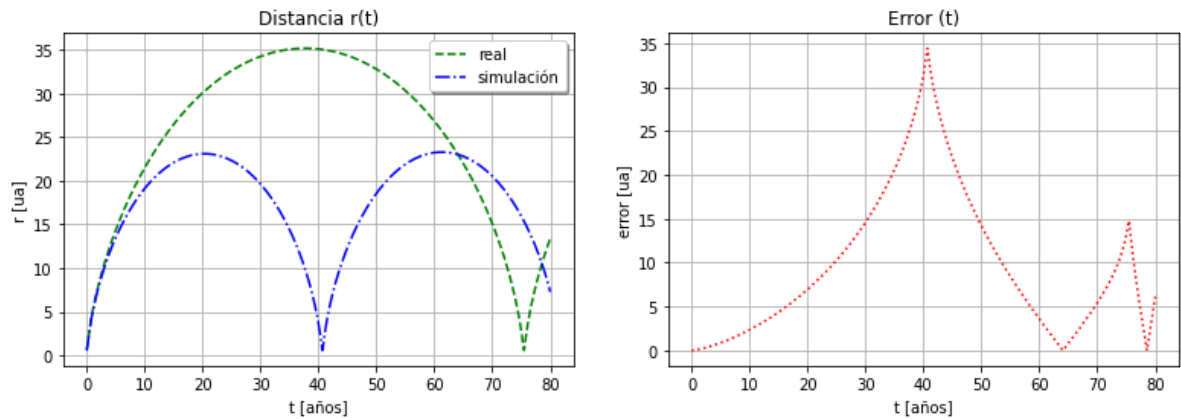
Fuente: Elaboración propia

6.1.3. Simulación del escenario perihelio - perihelio

En la Figura 24 se observa el resultado de la simulación representando la distancia al Sol a lo largo del tiempo, utilizando las condiciones iniciales originales. Se observa que la simulación ha presentado baja exactitud con respecto a los datos reales. No obstante, conociendo los

efectos de las pequeñas variaciones de las condiciones iniciales en este escenario, se ha optado por simular con el valor de la variación γ que genera el menor error.

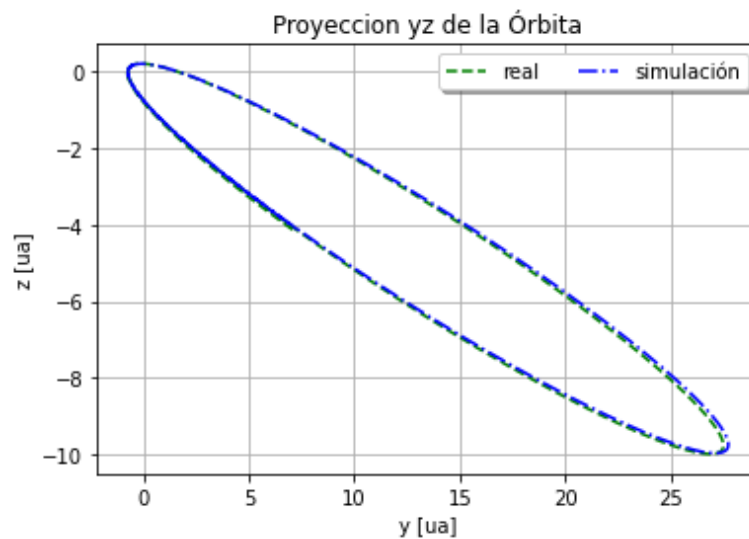
Figura 24. Distancia al Sol con condiciones iniciales originales (perihelio-perihelio)



Fuente: Elaboración propia

Así, en la Figura 25 se observa el resultado para la posición, donde se observa la proyección de la órbita en el plano yz . Se aprecia la forma elíptica de la órbita y se observa que la simulación ha logrado una gran exactitud con respecto a la órbita real.

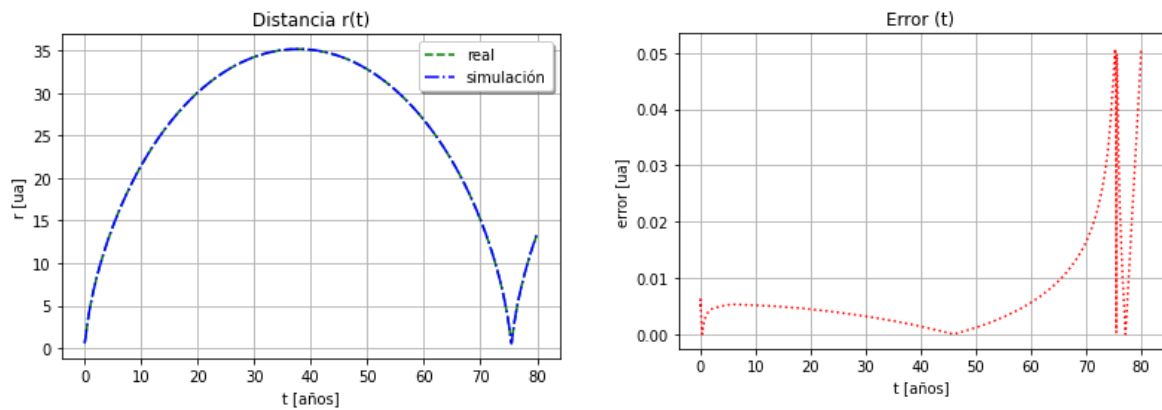
Figura 25. Proyección yz de la órbita (perihelio-perihelio)



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 26 se representa la distancia al Sol a lo largo del tiempo. Se observan los 2 puntos (perihelio y afelio) y el periodo de 75.3 años. En esta representación, la simulación y la curva real no se diferencian fácilmente, mostrando un buen nivel de exactitud. Para reconocer las diferencias, se presenta el error a lo largo del tiempo entre la distancia calculada por la simulación y la distancia real.

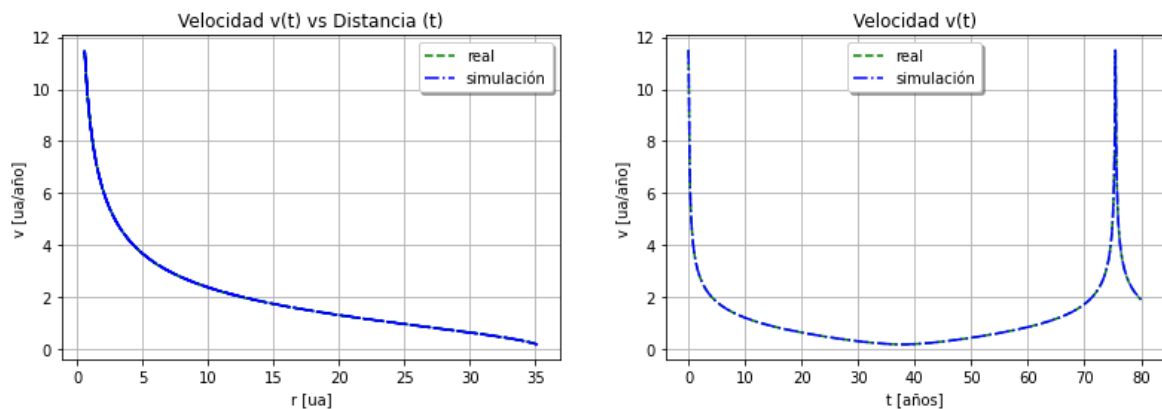
Figura 26. Distancia al Sol (perihelio-perihelio)



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 27 se observa el perfil de velocidad del cometa. En estas representaciones, la simulación muestra un error muy bajo con respecto a la curva real. Se observa que la mayor velocidad se presenta en el perihelio y la menor velocidad se presenta en el afelio.

Figura 27. Perfil de velocidad del Halley (perihelio-perihelio)

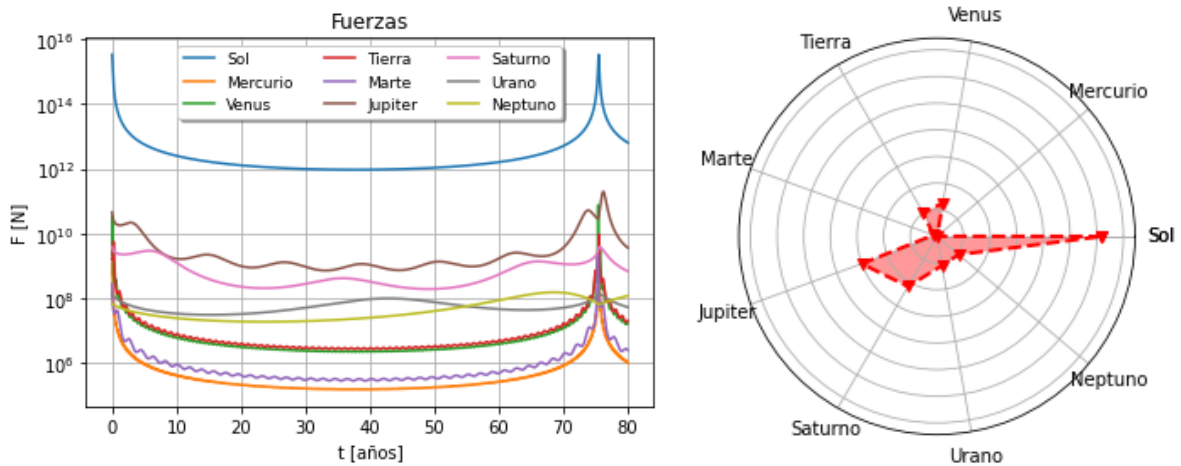


Fuente: Elaboración propia

A partir de la simulación es posible obtener el efecto que cada cuerpo incluido realiza sobre el cometa. En la Figura 28 se observa la fuerza que cada cuerpo ha realizado a lo largo del tiempo (escala logarítmica base 10). Se observa el gran efecto del Sol, el cual es mayor en el perihelio. Se observa también que el efecto de Neptuno tiene menos fluctuación al ser el planeta más lejano y que efectivamente su efecto disminuye en el perihelio.

Complementario a este, se observa el efecto consolidado de cada cuerpo sobre el cometa (escala logarítmica base 10). Se confirma el gran efecto del Sol, el importante efecto de los 2 gigantes gaseosos, Júpiter y Saturno (con lo cual se apoya la teoría del cambio de periodo que estos 2 pudieron causar en el cometa) y el bajo efecto de Mercurio y Marte.

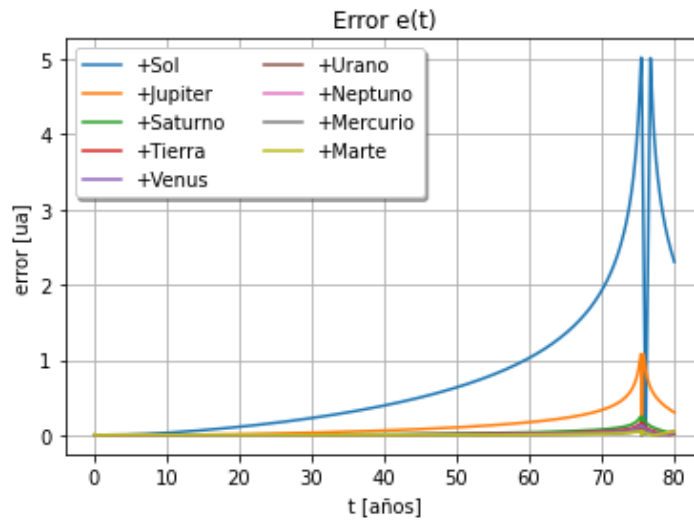
Figura 28. Fuerzas sobre el cometa Halley (perihelio-perihelio)



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 29 se observa el efecto que cada cuerpo causa en el cálculo de la distancia; al incluir cada cuerpo (en orden de impacto según la Figura 28), se observa como el error va disminuyendo.

Figura 29. Efecto de cada cuerpo en el cálculo de la distancia

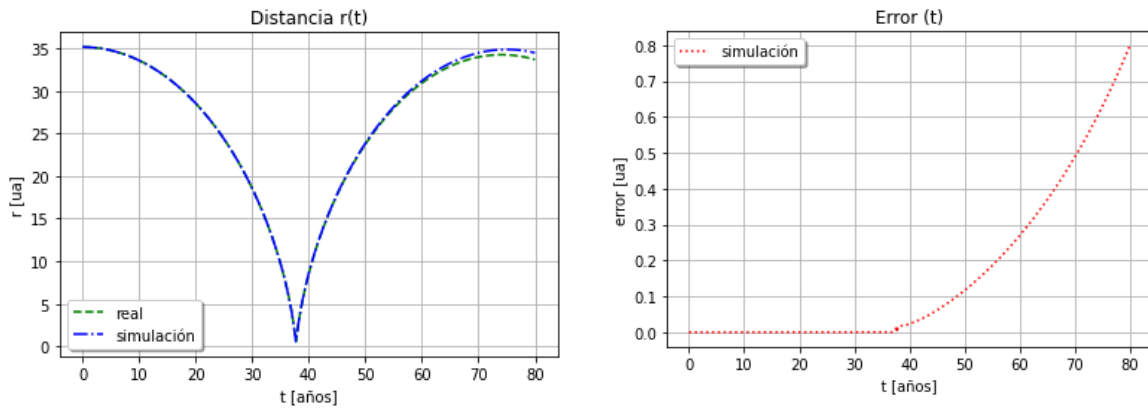


Fuente: Elaboración propia

6.1.4. Simulación del escenario afelio-afelio

En la Figura 30 se observa el resultado de la simulación representando la distancia al Sol a lo largo del tiempo, utilizando las condiciones iniciales originales. Se observa que la simulación tiene un buen nivel de exactitud con respecto a los datos reales. No obstante, conociendo los efectos de las pequeñas variaciones de las condiciones iniciales en este escenario, se ha optado por simular con el valor de la variación v_y que genera el menor error.

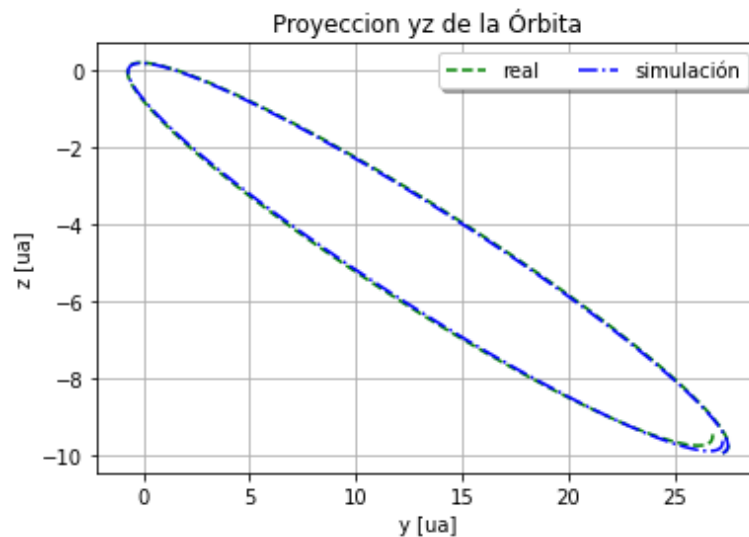
Figura 30. Distancia al Sol con condiciones iniciales originales (afelio-afelio)



Fuente: Elaboración propia

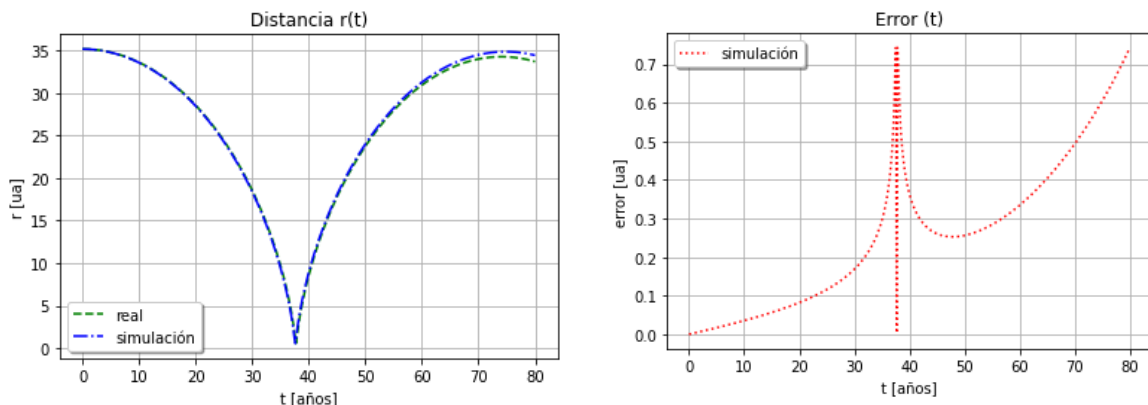
En la Figura 31 se presenta la proyección de la órbita en el plano yz , utilizando las condiciones iniciales originales; se observa una diferencia entre la órbita real y la órbita simulada para los valores más bajos en la coordenada z .

Figura 31. Proyección yz de la órbita (afelio-afelio)



Fuente: Elaboración propia

Figura 32. Distancia al Sol (afelio-afelio)

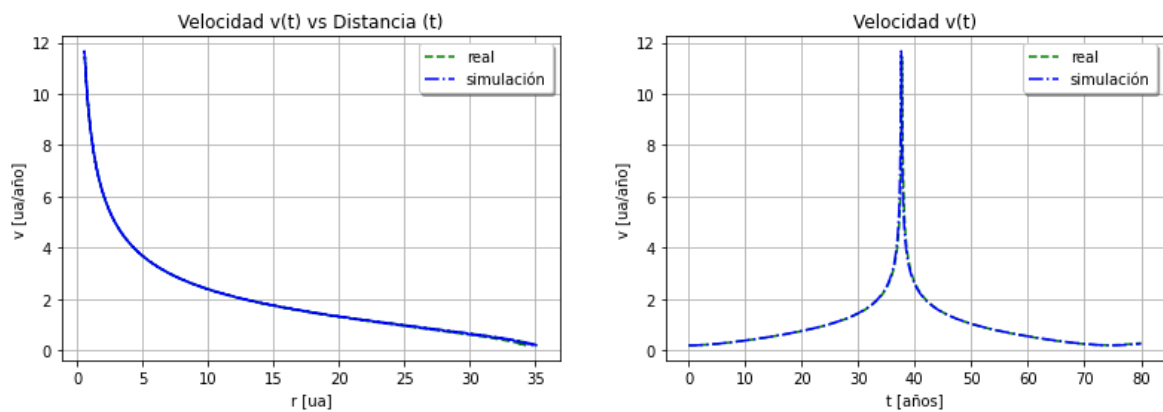


Fuente: Elaboración propia

Al revisar en la Figura 32, se observa que este mismo error se observa al final de la simulación, cerca del segundo afelio. Comparando con el error presentado en la Figura 30, se observa que utilizar las condiciones iniciales ajustadas no generan un cambio tan significativo como se observó en el escenario perihelio-perihelio.

En cuanto a velocidad, en la Figura 33 se observa el perfil de velocidad. Se observa la cercanía de la simulación con las curvas reales. En comparación con la Figura 27, se encuentra que el perfil de velocidad vs distancia es muy similar, lo cual es coherente ya que el único cambio entre ambos escenarios es el periodo simulado.

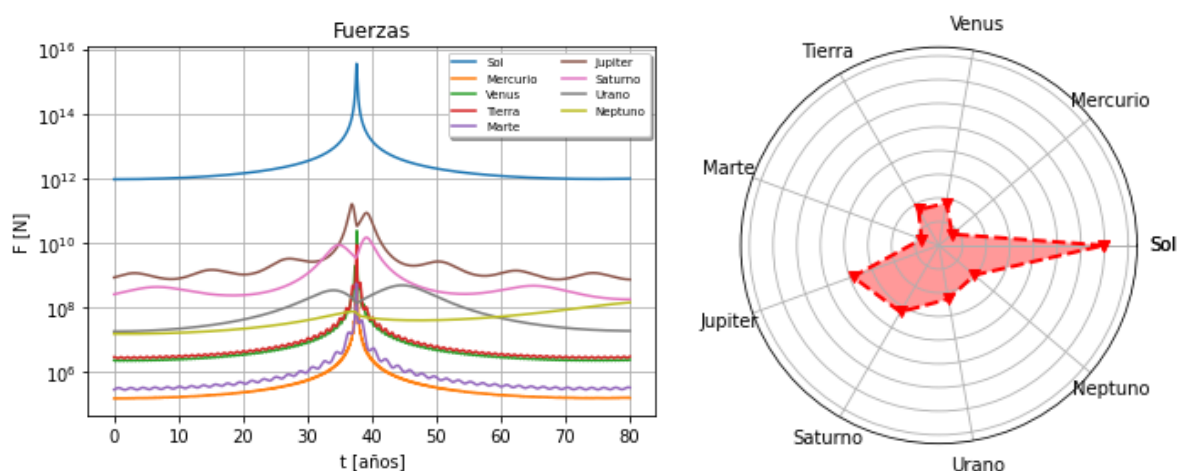
Figura 33. Perfil de velocidad del Halley (afelio-afelio)



Fuente: Elaboración propia

Sucede algo similar al comparar la Figura 34 y la Figura 28, donde el efecto consolidado de las fuerzas que ejercen los cuerpos se observa un comportamiento similar, independiente del escenario.

Figura 34. Fuerzas sobre el cometa Halley (afelio-afelio)



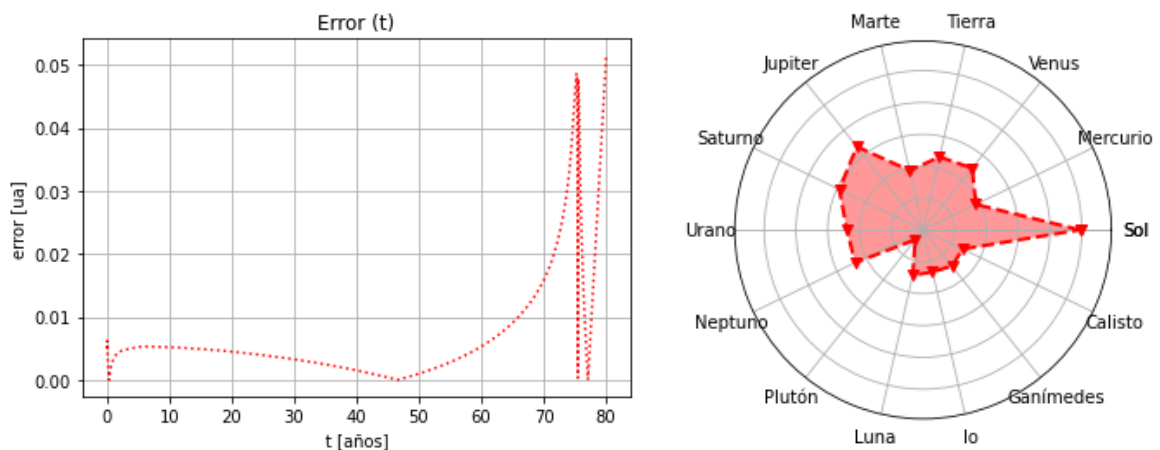
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 34 se observa nuevamente el gran efecto del Sol en el momento del perihelio y los comportamientos de los planetas más lejanos como Neptuno y Urano, que tiene menos fluctuación y que disminuye durante el perihelio.

6.1.5. Efecto de cuerpos más pequeños

En las simulaciones descritas atrás se incluyó el Sol y los 8 planetas, dado que se observó durante el experimento que el efecto de otros cuerpos es despreciable. Esto puede observarse la incluir los cuerpos que siguen en orden de magnitud en el sistema solar: Plutón, Ganímedes (Júpiter), Calisto (Júpiter), Io (Júpiter) y Luna (Tierra). Titán (saturno) es un satélite natural muy grande, pero no fue incluido pues su efeméride no tiene alcance hasta la fecha final de simulación (ver Tabla 14). En la Figura 35 se observa que no hay cambio con respecto al error (diferencia) en el cálculo de la distancia (comparando la Figura 26 y la Figura 35) y que los nuevos cuerpos incluidos representan los efectos más pequeños.

Figura 35. Efecto de cuerpos más pequeños en el cometa



Fuente: Elaboración propia

7. Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusiones

El presente trabajo buscaba la implementación de un simulador del sistema solar basado en el modelamiento de las fuerzas gravitacionales entre los cuerpos celestes. La evolución de las teorías físicas ha permitido contar con elementos suficientes para definir un sistema de ecuaciones a partir del uso del cálculo vectorial y la aplicación de las leyes del movimiento (leyes de Newton), la Ley de Gravitación Universal y las teorías sobre marcos inerciales y no inerciales. Así, se obtuvo un sistema de $6N$ ecuaciones diferenciales ordinarias, vectoriales, de segundo orden, no lineales que unidas con las $6N$ condiciones iniciales conocidas configuran un Problema de Valor Inicial (PVI), cumpliendo así el primer objetivo específico.

Este sistema de ecuaciones se enfoca en la afectación sobre la masa negligible, pues precisamente al ser una masa “despreciable” se puede ignorar su efecto sobre los otros cuerpos celestes y por ello mismo, es posible utilizar las efemérides disponibles en SPICE para conocer el vector de estado de los cuerpos celestes.

Este PVI pudo ser solucionado en Python mediante la utilización de las librerías de Numpy, Scipy y Pandas, utilizando 1 método numérico que fue comprobado presenta el mejor desempeño entre error generado, tiempo de procesamiento y dispersión de resultados. Además, se realizaron experimentos que permitieron determinar los mejores niveles de tolerancia que lograran el menor nivel de error con buenos tiempos de procesamiento, cumpliendo así con el segundo objetivo específico.

El desarrollo en Python permitió la estructuración en un código que se optimizó para reducir los reprocesos, mediante el uso de objetos tipo clase. Para acceder a SPICE se utilizó la librería Spiceypy, desarrollada por un tercero con base en desarrollos realizados en NASA. De esta manera, se ha cumplido con el tercer objetivo específico.

La aplicación de este código desarrollado en la simulación de la trayectoria del cometa Halley en dos escenarios, perihelio-perihelio y afelio-afelio, permitió observar que el simulador cuenta con un buen nivel de exactitud, tanto para el cálculo de posición como el cálculo de velocidad. Así mismo, permitió observar el nivel de influencia de los diferentes cuerpos del sistema solar en la trayectoria del cometa Halley.

Se observó adicionalmente la sensibilidad que presenta el modelo ante pequeños cambios en las condiciones iniciales, especialmente en el escenario perihelio-perihelio, que puede originarse porque durante el perihelio la velocidad es más alta y por tanto el estado cambia rápidamente, y el simulador no alcanza a percibir todos los cambios. Así, se ha cumplido con la aplicación práctica indicada en el cuarto objetivo específico.

Como conclusión general, se ha logrado el desarrollo e implementación de un simulador del sistema solar con buena precisión en un lenguaje *Open Source* como Python, cuya flexibilidad ha permitido la exploración de alternativas y de soluciones para alcanzar el objetivo planteado, utilizando los datos del sistema SPICE para el cálculo de la trayectoria de cuerpos con masa negligible, como el cometa Halley. De esta manera se ha alcanzado el objetivo general del presente trabajo.

7.2. Líneas de trabajo futuro

El simulador desarrollado es un primer paso, pues si bien se ha logrado una buena exactitud, es posible aumentar tal exactitud, pero además de ello es posible aumentar su alcance para incluir otros fenómenos físicos. Por ello, se visualizan las siguientes líneas de trabajo futuro:

- Implementación del cambio de marco de referencia, utilizando un marco de referencia no inercial (como la Tierra), mediante la aplicación de las teorías de cambio de marco y el uso de las funcionalidades de SPICE para la transformación de marcos de referencia.
- Aplicación de la mecánica Hamiltoniana para la simplificación de las ecuaciones de estado, con el fin de disminuir su sensibilidad ante los pequeños cambios en las condiciones iniciales.
- Predicción de eventos futuros relacionados con cuerpos de masa no negligible como cometas, asteroides y meteoritos, con el fin de predecir su trayectoria y poder definir su posibilidad de choque con otros cuerpos o de abandonar el sistema solar.
- Modelar e incluir en el desarrollo las perturbaciones mencionadas en el numeral 2.3.6. Además de aumentar la precisión del modelo, permitiría incluir otro tipo de cuerpos con masa negligible, como naves espaciales, velas solares, satélites, entre otros.
- Estudio de asteroides troyanos: recientemente, en los últimos días de realización del presente documento, científicos han confirmado que el asteroide 2020 XL5 es el segundo asteroide troyano de la Tierra, ubicado en el punto de Lagrange L4 (Santana-Ros, y otros,

2022). Es tres veces mayor al primer troyano descubierto (2010 TK7); los estudios muestran que fue capturado hace unos 600 años (no es un troyano natural) y que acompañará a la Tierra por 4,000 años más. El simulador puede acompañar y validar los estudios y estimaciones que realizan los científicos que se encuentran estudiando estos asteroides, para confirmar o ajustar los periodos mencionados.

- Un problema de enorme interés para el campo de la astrodinámica y la mecánica celeste consiste es encontrar zonas de estabilidad en el sistema solar. Éstas son regiones en las cuales se pueden quedar atrapados objetos celestes de masa negligible (por ejemplo, asteroides) o en las cuales colocar estaciones de observación permanentes (por ejemplo, telescopios) sin necesidad de gasto de energía para mantenerlas en su sitio. Son bastante conocidas las zonas de estabilidad relacionadas con los puntos triangulares del sistema Sol-Júpiter. Una posible aplicación del simulador desarrollado en este trabajo es estudiar las zonas de estabilidad relacionadas con los puntos triangulares del sistema Sol-Neptuno.
- Desarrollo de la interfaz de usuario para mejorar el acceso y uso del simulador.
- Desarrollo de una interfaz 3D para la presentación de resultados del simulador.

Referencias bibliográficas

- Abramson, G. (2018). *Mecánica clásica, Notas de clase*. San Carlos de Bariloche: Instituto Balseiro.
- Annex, A. M., Pearson, B., Seignovert, B., Carcich, B. T., Eichhorn, H., Mapel, J. A., . . . Murakami, S.-y. (2020). SpiceyPy: a Pythonic Wrapper for the SPICE Toolkit. *Journal of Open Source Software*. doi:<https://doi.org/10.21105/joss.02050>
- Arenas Ferrer, J. J. (2012). *Estabilidad y Caos en el Sistema Solar*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Arenas Herrera, M. I. (2013). La descomposición de la velocidad en el problema de los N-cuerpos y algunas de sus aplicaciones. (*Tesis de maestría en Ciencias Matemáticas*). Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, México D.F.
- Arenas, J. J. (Junio de 2014). ¿Es estable el sistema solar? *Latin-American Journal of Physics Education*, 8(2), 328-334.
- Artigue, V., & Pollio, A. (2013). Aspectos históricos del problema de los N cuerpos y su influencia en el desarrollo de la física y la matemática. *Actas del VII CIBEM, Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 3954-3961.
- Aular, A. (12 de agosto de 2020). *¿Cuáles son los Elementos del Sistema Solar?* Recuperado el 16 de septiembre de 2021, de Liferder: <https://www.liferder.com/elementos-sistema-solar/>
- Banks, J., Carson II, J. S., Nelson, B. L., & Nicol, D. M. (2010). *Discrete-Event System Simulation*. Pearson Education: New Jersey.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros* (5 ed.). (J. C. del Valle Sotelo, Ed., J. Enríquez Brito, & M. C. Roa Cano, Trads.) México D.F: McGraw-Hill Interamericana.
- Cultura Científica. (02 de diciembre de 2015). *Cuaderno de Cultura Científica*. Recuperado el 01 de octubre de 2021, de El problema de los tres cuerpos. Un misterio en Cambridge: <https://culturacientifica.com/2015/12/02/el-problema-de-los-tres-cuerpos-un-misterio-en-cambridge/>
- Díaz Granizo, D. (2015). *Interfaz gráfica de usuario y herramientas de visualización para un simulador de vuelo orbital*. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Bioingeniería e Ingeniería Aeroespacial. Obtenido de <http://hdl.handle.net/10016/27515>
- Díaz Sánchez, R. A. (2012). *Mecánica Analítica: Notas de clase*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Fowles, G. R., & Cassiday, G. L. (2005). *Analytical Mechanics*. Belmont: Thomson Brooks/Cole.
- Giancoli, D. C. (2008). *Física para Ciencias e Ingeniería* (4 ed.). México: Pearson Education.

- Goldstein, H. (1994). *Classical Mechanics* (2 ed.). (J. Fernández Ferrer, Trad.) Massachusetts: Addison-Wesley.
- Goodstein, D. L., & Goodstein, J. R. (1999). Feynman's Lost Lecture; The Motion of Planets Around the Sun. *The Mathematical Intelligencer*, 21(3), 71-79.
- Guerrero Pino, G. (2004). El paso del geocentrismo al heliocentrismo. *El hombre y la máquina*(22), 98-110.
- Hazewinkel, M. (2010). Perturbation theory. En *The Encyclopaedia of Mathematics*. Springer. doi:10.1007/978-94-015-1279-4_3
- Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería Mecánica. Dinámica*. (12 ed.). (R. Navarro Salas, Trad.) Upper Saddle River: Prentice Hall.
- IAU. (1976). *XVth General Assembly, recommendation 1*. Grenoble: International Astronomical Union.
- IAU. (2006). *Resolution B5, Definition of a Planet in the Solar System*. Praga: International Astronomical Union.
- IAU. (2012). *Resolution B2: on the redefinition of the astronomical unit of length*. Pekín: International Astronomical Union.
- IAU. (s.f.). *Measuring the Universe, The IAU and astronomical units*. Recuperado el 30 de noviembre de 2021, de International Astronomical Union: <https://www.iau.org/public/themes/measuring/>
- Landáu, L. D., & Lifshitz, E. M. (1965). *Mecánica, Volumen 1, Curso de Física Teórica*. (E. López de Vázquez, Trad.) Moscú: Reverté.
- Linton, C. M. (2004). *From Eudoxus to Einstein, A History of Mathematical Astronomy*. New York: Cambridge.
- López-Gómez, F. F. (2016). Panorama histórico del estudio de los planetas del sistema solar. *La Colmena*(92), 93-110. Obtenido de <https://lacolmena.uaemex.mx/article/view/5187>
- Marion, J. B. (1998). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas* (2 ed.). (J. Vilardell Coma, Trad.) New York: Reverté.
- Matlab. (15 de diciembre de 2021-a). ode45. *Help Center, R2021b*. Matlab. Obtenido de <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>
- Matlab. (07 de diciembre de 2021-b). odeset. Obtenido de Help Center: <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/odeset.html>
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Mecánica para ingenieros. Dinámica* (3 ed.). (J. Vilardell, Trad.) New York: Reverté.

- NASA. (11 de diciembre de 2019-a). *SPICE overview*. Obtenido de The Navigation and Ancillary Information Facility: https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/toolkit_docs/Tutorials/pdf/individual_docs/03_spice_overview.pdf
- NASA. (11 de diciembre de 2019-b). *Ephemeris Subsystem SPK, Focused on reading SPK files*. Obtenido de The Navigation and Ancillary Information Facility: https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/toolkit_docs/Tutorials/pdf/individual_docs/18_spk.pdf
- NASA. (s.f.-a). *Our Solar System*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de Formation: <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/our-solar-system/in-depth/>
- NASA. (s.f.-b). *Solar System Exploration*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de NASA Science: <https://solarsystem.nasa.gov>
- NASA. (s.f.-c). *Our Sun*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/sun>
- NASA. (s.f.-d). *Planets*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de <https://solarsystem.nasa.gov/planets>
- NASA. (s.f.-e). *Kuiper Belt*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/kuiper-belt>
- NASA. (s.f.-f). *Oort Cloud*. Recuperado el 25 de septiembre de 2021, de <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/oort-cloud>
- NASA. (s.f.-g). *The Bubble of Our Solar System*. Recuperado el 26 de septiembre de 2021, de <https://solarsystem.nasa.gov/resources/14700/the-bubble-of-our-solar-system/>
- NASA. (s.f.-h). *Jet Propulsion Laboratory*. Recuperado el 7 de octubre de 2021, de California Institute of Technology: <https://www.jpl.nasa.gov/>
- NASA. (s.f.-i). *What does SSD do?* Recuperado el 7 de octubre de 2021, de <https://ssd.jpl.nasa.gov/>
- NASA. (s.f.-j). *Horizons System*. Recuperado el 7 de octubre de 2021, de Jet Propulsion Laboratory: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>
- NASA. (s.f.-k). *About NAIF*. Recuperado el 7 de octubre de 2021, de The Navigation and Ancillary Information Facility: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/about.html>
- NASA. (s.f.-l). *The SPICE concept*. Recuperado el 7 de octubre de 2021, de The Navigation and Ancillary Information Facility: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/spiceconcept.html>
- NASA. (s.f.-m). *Glossary - GM*. Recuperado el 06 de enero de 2022, de Jet Propulsion Laboratory: <https://ssd.jpl.nasa.gov/glossary/GM.html>

NASA. (s.f.-n). *Horizons System*. Recuperado el 21 de diciembre de 2021, de Jet Propulsion Laboratory: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>

Observatorio Científico Tecnológico y de Innovación. (21 de febrero de 2021). *Nuevos mapas del campo magnético solar arrojan luz sobre la actividad del Sol*. Obtenido de <http://www.octi.cu/nuevos-mapas-del-campo-magnetico-solar/>

Online Etymology Dictionary. (25 de septiembre de 2021). *Milky Way*. Obtenido de <https://www.etymonline.com/>

Pardo, D. (14 de febrero de 2019). *¿Para qué sirve una API? Solventa por fin esta duda de primerizo*. Obtenido de Pandora fms: <https://pandorafms.com/blog/es/para-que-sirve-una-api/>

Park, R. S., Folkner, W. M., Williams, J. G., & Boggs, D. H. (2021). The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441. *The Astronomical Journal*, 161-176. doi:<https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd414>

Pascual, O. D. (2019). Analysis of Perturbation incidence in the calculation of trajectories in Ephemeris model. (*Master Thesis in Aerospace Science and Technology*). Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

python. (s.f.). *History and License*. Recuperado el 2022 de enero de 21, de Open-source: <https://docs.python.org/3/license.html>

Rosi, G., Sorrentino, F., Cacciapuoti, L., Prevedelli, M., & Tino, G. M. (2014). Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms. *Nature*(510), 518-521. doi:10.1038

Santana-Ros, T., Micheli, M., Faggioli, L., Cennamo, R., Devogèle, M., Alvarez-Candal, A., . . . Conversi, L. (2022). Orbital stability analysis and photometric characterization of the second Earth Torjan asteroid 2020 XL5. *Nature Communications*, 13(447). doi:<https://doi.org/10.1038/s41467-022-27988-4>

Schwaber, K., & Sutherland, J. (2020). *La Guía Definitiva de Scrum: Las Reglas del Juego*. Creative Commons.

SciPy. (s.f.). *scipy.integrate.solve_ivp*. Recuperado el 10 de noviembre de 2021, de SciPy documentation: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html

Serway, R. A., & Jewett, Jr, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería (7 ed.)*. (V. Campos Olguín, Trad.) Philadelphia: Saunders College Pub.

Soldovieri C, T. (2013). *Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton*. Maracaibo: La Universidad del Zulia.

Soldovieri C, T. (2017). *Introducción a la mecánica clásica*. Maracaibo: La Universidad del Zulia.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (9 ed.). (L. E. Pineda Ayala, Trad.) México: PEARSON EDUCACIÓN.

Wikipedia. (s.f.-a). *Leyes de Kepler*. Recuperado el 7 de enero de 2022, de https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler

Wikipedia. (s.f.-b). *Rover*. Recuperado el 14 de enero de 2022, de <https://es.wikipedia.org/wiki/Rover>

Wikipedia. (s.f.-c). *Tiempo universal coordinado*. Recuperado el 8 de octubre de 2021, de https://es.wikipedia.org/wiki/Tiempo_universal_coordinado

Wikipedia. (s.f.-d). *Tiempo Dinámico Baricéntrico*. Recuperado el 8 de octubre de 2021, de https://es.wikipedia.org/wiki/Tiempo_Din%C3%A1mico_Baric%C3%A9ntrico

Wikipedia. (s.f.-e). Recuperado el 25 de enero de 2022, de Cometa Halley: https://es.wikipedia.org/wiki/Cometa_Halley

Wikipedia. (s.f.-f). Recuperado el 27 de diciembre de 2021, de Satélites de Júpiter: https://es.wikipedia.org/wiki/Sat%C3%A9lites_de_J%C3%BApiter

Wikipedia. (s.f.-g). *Satélites de Saturno*. Recuperado el 27 de diciembre de 2021, de https://es.wikipedia.org/wiki/Sat%C3%A9lites_de_Saturno

Wikipedia. (s.f.-h). Recuperado el 27 de diciembre de 2021, de Satélites de Neptuno: https://es.wikipedia.org/wiki/Sat%C3%A9lites_de_Neptuno

Wikipedia. (s.f.-i). Recuperado el 18 de enero de 2022, de (50000) Quaoar: [https://es.wikipedia.org/wiki/\(50000\)_Quaoar](https://es.wikipedia.org/wiki/(50000)_Quaoar)

Wikipedia. (s.f.-j). Recuperado el 18 de enero de 2022, de (90482) Orcus: [https://es.wikipedia.org/wiki/\(90482\)_Orcus](https://es.wikipedia.org/wiki/(90482)_Orcus)

Xataka. (s.f.). *API: qué es y para qué sirve*. Recuperado el 8 de octubre de 2021, de <https://www.xataka.com/basics/api-que-sirve>

Young, H. D., Freedman, R. A., & Ford, A. L. (2009). *Física Universitaria*. México: Pearson Educación.

Anexo A. Cuerpos del sistema solar

En la Tabla 14 se presenta el listado de los cuerpos del sistema solar, con el código, el nombre en español e inglés y el *kernel* SPK utilizado.

Los cuerpos de un sistema planetario tienen el primer dígito común, correspondiente al código del baricentro. Por ejemplo, la Tierra (399) y la Luna (301) tienen en común el primer dígito “3”, que corresponde al código del baricentro de la Tierra. Los planetas completan el código con el número 99 y se convierten en el último código de cada sistema planetario; los satélites planetarios inician en el código 01, hasta el 98 (ningún planeta tiene 98 satélites).

Tabla 14. *Cuerpos del sistema solar y kernel SPK*

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
1	Baricentro	Baricentro Mercurio	<i>Mercury Barycenter</i>	DE441
2	Baricentro	Baricentro Venus	<i>Venus Barycenter</i>	DE441
3	Baricentro	Baricentro Tierra	<i>Earth Barycenter</i>	DE441
4	Baricentro	Baricentro Marte	<i>Mars Barycenter</i>	DE441
5	Baricentro	Baricentro Júpiter	<i>Jupiter Barycenter</i>	DE441
6	Baricentro	Baricentro Saturno	<i>Saturn Barycenter</i>	DE441
7	Baricentro	Baricentro Urano	<i>Uranus Barycenter</i>	DE441
8	Baricentro	Baricentro Neptuno	<i>Neptune Barycenter</i>	DE441
9	Baricentro	Baricentro Plutón	<i>Pluto Barycenter</i>	DE441
10	Estrella	Sol	<i>Sun</i>	DE441
199	Planeta	Mercurio	<i>Mercury</i>	DE441
299	Planeta	Venus	<i>Venus</i>	DE441
301	Satélite	Luna	<i>Moon</i>	DE441
399	Planeta	Tierra	<i>Earth</i>	DE441
401	Satélite	Fobos	<i>Phobos</i>	MAR097
402	Satélite	Deimos	<i>Deimos</i>	MAR097
499	Planeta	Marte	<i>Mars</i>	MAR097
501	Satélite	Ío	<i>Io</i>	JUP365
502	Satélite	Europa	<i>Europa</i>	JUP365
503	Satélite	Ganímedes	<i>Ganymede</i>	JUP365
504	Satélite	Calisto	<i>Callisto</i>	JUP365
505	Satélite	Amaltea	<i>Amalthea</i>	JUP365
506	Satélite	Himalia	<i>Himalia</i>	JUP344
507	Satélite	Elara	<i>Elara</i>	JUP344
508	Satélite	Pasifae	<i>Pasiphae</i>	JUP344
509	Satélite	Sinope	<i>Sinope</i>	JUP344
510	Satélite	Lisitea	<i>Lysithea</i>	JUP344
511	Satélite	Carmé	<i>Carme</i>	JUP344
512	Satélite	Ananke	<i>Ananke</i>	JUP344

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
513	Satélite	Leda	<i>Leda</i>	JUP344
514	Satélite	Tebe	<i>Thebe</i>	JUP365
515	Satélite	Adrastea	<i>Adrastea</i>	JUP365
516	Satélite	Metis	<i>Metis</i>	JUP365
517	Satélite	Calírroe	<i>Callirrhoe</i>	JUP344
518	Satélite	Temisto	<i>Themisto</i>	JUP344
519	Satélite	Megaclite	<i>Megaclite</i>	JUP344
520	Satélite	Táigete	<i>Taygete</i>	JUP344
521	Satélite	Caldona	<i>Chaldene</i>	JUP344
522	Satélite	Harpálice	<i>Harpalyke</i>	JUP344
523	Satélite	Cálice	<i>Kalyke</i>	JUP344
524	Satélite	Yocasta	<i>Iocaste</i>	JUP344
525	Satélite	Erínome	<i>Erinome</i>	JUP344
526	Satélite	Isonoé	<i>Isonoe</i>	JUP344
527	Satélite	Praxídice	<i>Praxidike</i>	JUP344
528	Satélite	Autónoe	<i>Autonoe</i>	JUP344
529	Satélite	Tione	<i>Thyone</i>	JUP344
530	Satélite	Hermipé	<i>Hermippe</i>	JUP344
531	Satélite	Aitne	<i>Aitne</i>	JUP344
532	Satélite	Euridome	<i>Eurydome</i>	JUP344
533	Satélite	Euante	<i>Euanthe</i>	JUP344
534	Satélite	Euporia	<i>Euporie</i>	JUP344
535	Satélite	Ortosia	<i>Orthosie</i>	JUP344
536	Satélite	Espondé	<i>Sponde</i>	JUP344
537	Satélite	Calé	<i>Kale</i>	JUP344
538	Satélite	Pasitea	<i>Pasithee</i>	JUP344
539	Satélite	Hegémone	<i>Hegemone</i>	JUP344
540	Satélite	Mnemea	<i>Mneme</i>	JUP344
541	Satélite	Aedea	<i>Aoede</i>	JUP344
542	Satélite	Telxinoe	<i>Thelxinoe</i>	JUP344
543	Satélite	Arce	<i>Arche</i>	JUP344
544	Satélite	Kallichore	<i>Kallichore</i>	JUP344
545	Satélite	Helike	<i>Helike</i>	JUP344
546	Satélite	Carpo	<i>Carpo</i>	JUP344
547	Satélite	Eukelade	<i>Eukelade</i>	JUP344
548	Satélite	Cilene	<i>Cyllene</i>	JUP344
549	Satélite	Kore	<i>Kore</i>	JUP344
550	Satélite	Herse	<i>Herse</i>	JUP344
551	Satélite	S/2010 J 1	<i>2010J1</i>	JUP344
552	Satélite	S/2010 J 2	<i>2010J2</i>	JUP344
553	Satélite	Dia	<i>Dia</i>	JUP344
554	Satélite	S/2016 J 1	<i>2016J1</i>	JUP344
555	Satélite	S/2003 J 18	<i>2003J18</i>	JUP344
556	Satélite	S/2011 J 2	<i>2011J2</i>	JUP344

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
557	Satélite	Eirene	<i>Eirene</i>	JUP344
558	Satélite	Filofrosine	<i>Philophrosyne</i>	JUP344
559	Satélite	S/2017 J 1	<i>2017J1</i>	JUP344
560	Satélite	Eufeme	<i>Eupheme</i>	JUP344
561	Satélite	S/2013 J 19	<i>2013J19</i>	JUP344
562	Satélite	Valetudo	<i>Valetudo</i>	JUP344
563	Satélite	S/2017 J 2	<i>2017J2</i>	JUP344
564	Satélite	S/2017 J 3	<i>2017J3</i>	JUP344
565	Satélite	Pandia	<i>Pandia</i>	JUP344
566	Satélite	S/2017 J 5	<i>2017J5</i>	JUP344
567	Satélite	S/2017 J 6	<i>2017J6</i>	JUP344
568	Satélite	S/2017 J 7	<i>2017J7</i>	JUP344
569	Satélite	S/2017 J 8	<i>2017J8</i>	JUP344
570	Satélite	S/2017 J 9	<i>2017J9</i>	JUP344
571	Satélite	Ersa	<i>Ersa</i>	JUP344
572	Satélite	S/2011 J 1	<i>2011J1</i>	JUP344
599	Planeta	Jupiter	<i>Jupiter</i>	JUP344
601	Satélite	Mimas	<i>Mimas</i>	SAT427
602	Satélite	Encélado	<i>Enceladus</i>	SAT427
603	Satélite	Tetis	<i>Tethys</i>	SAT427
604	Satélite	Dione	<i>Dione</i>	SAT427
605	Satélite	Rea	<i>Rhea</i>	SAT427
606	Satélite	Titan	<i>Titan</i>	SAT427
607	Satélite	Hiperión	<i>Hyperion</i>	SAT427
608	Satélite	Japeto	<i>Iapetus</i>	SAT427
609	Satélite	Febe	<i>Phoebe</i>	SAT427
610	Satélite	Jano	<i>Janus</i>	SAT393
611	Satélite	Epimeteo	<i>Epimetheus</i>	SAT393
612	Satélite	Helena	<i>Helene</i>	SAT427
613	Satélite	Telesto	<i>Telesto</i>	SAT393
614	Satélite	Calipso	<i>Calypso</i>	SAT393
615	Satélite	Atlas	<i>Atlas</i>	SAT393
616	Satélite	Prometeo	<i>Prometheus</i>	SAT393
617	Satélite	Pandora	<i>Pandora</i>	SAT393
618	Satélite	Pan	<i>Pan</i>	SAT393
619	Satélite	Ymir	<i>Ymir</i>	SAT368
620	Satélite	Paaliaq	<i>Paaliaq</i>	SAT368
621	Satélite	Tarvos	<i>Tarvos</i>	SAT368
622	Satélite	Ijiraq	<i>Ijiraq</i>	SAT368
623	Satélite	Suttungr	<i>Suttungr</i>	SAT368
624	Satélite	Kiviuq	<i>Kiviuq</i>	SAT368
625	Satélite	Mundilfari	<i>Mundilfari</i>	SAT368
626	Satélite	Albiorix	<i>Albiorix</i>	SAT368
627	Satélite	Skadi	<i>Skathi</i>	SAT368

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
628	Satélite	Erriapo	<i>Erriapus</i>	SAT368
629	Satélite	Siarnaq	<i>Siarnaq</i>	SAT368
630	Satélite	Thrymr	<i>Thrymr</i>	SAT368
631	Satélite	Narvi	<i>Narvi</i>	SAT368
632	Satélite	Metone	<i>Methone</i>	SAT393
633	Satélite	Palene	<i>Pallene</i>	SAT393
634	Satélite	Pollux	<i>Polydeuces</i>	SAT393
635	Satélite	Dafne	<i>Daphnis</i>	SAT393
636	Satélite	Aegir	<i>Aegir</i>	SAT368
637	Satélite	Bebhionn	<i>Bebhionn</i>	SAT368
638	Satélite	Bergelmir	<i>Bergelmir</i>	SAT368
639	Satélite	Bestla	<i>Bestla</i>	SAT368
640	Satélite	Farbauti	<i>Farbauti</i>	SAT368
641	Satélite	Fenrir	<i>Fenrir</i>	SAT368
642	Satélite	Fornjot	<i>Fornjot</i>	SAT368
643	Satélite	Hati	<i>Hati</i>	SAT368
644	Satélite	Hyrokkin	<i>Hyrrokkin</i>	SAT368
645	Satélite	Kari	<i>Kari</i>	SAT368
646	Satélite	Loge	<i>Loge</i>	SAT368
647	Satélite	Skoll	<i>Skoll</i>	SAT368
648	Satélite	Surtur	<i>Surtur</i>	SAT368
649	Satélite	Anthe	<i>Anthe</i>	SAT393
650	Satélite	Jarnsaxa	<i>Jarnsaxa</i>	SAT368
651	Satélite	Greip	<i>Greip</i>	SAT368
652	Satélite	Tarqeq	<i>Tarqeq</i>	SAT368
653	Satélite	Egeón	<i>Aegaeon</i>	SAT393
654	Satélite	2004 S 20	<i>2004S20</i>	No disponible
655	Satélite	2004 S 22	<i>2004S22</i>	No disponible
656	Satélite	2004 S 23	<i>2004S23</i>	No disponible
657	Satélite	2004 S 25	<i>2004S25</i>	No disponible
658	Satélite	2004 S 26	<i>2004S26</i>	No disponible
659	Satélite	2004 S 27	<i>2004S27</i>	No disponible
660	Satélite	2004 S 29	<i>2004S29</i>	No disponible
661	Satélite	2004 S 30	<i>2004S30</i>	No disponible
662	Satélite	2004 S 32	<i>2004S32</i>	No disponible
663	Satélite	2004 S 33	<i>2004S33</i>	No disponible
664	Satélite	2004 S 34	<i>2004S34</i>	No disponible
665	Satélite	2004 S 35	<i>2004S35</i>	No disponible
666	Satélite	2004 S 38	<i>2004S38</i>	No disponible
699	Planeta	Saturno	<i>Saturn</i>	SAT368
701	Satélite	Ariel	<i>Ariel</i>	URA111
702	Satélite	Umbriel	<i>Umbriel</i>	URA111
703	Satélite	Titania	<i>Titania</i>	URA111
704	Satélite	Oberón	<i>Oberon</i>	URA111

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
705	Satélite	Miranda	<i>Miranda</i>	URA111
706	Satélite	Cordelia	<i>Cordelia</i>	URA115
707	Satélite	Ofelia	<i>Ophelia</i>	URA115
708	Satélite	Bianca	<i>Bianca</i>	URA115
709	Satélite	Cressida	<i>Cressida</i>	URA115
710	Satélite	Desdémona	<i>Desdemona</i>	URA115
711	Satélite	Julieta	<i>Juliet</i>	URA115
712	Satélite	Porcia	<i>Portia</i>	URA115
713	Satélite	Rosalinda	<i>Rosalind</i>	URA115
714	Satélite	Belinda	<i>Belinda</i>	URA115
715	Satélite	Puck	<i>Puck</i>	URA115
716	Satélite	Calibán	<i>Caliban</i>	URA116
717	Satélite	Sicorax	<i>Sycorax</i>	URA116
718	Satélite	Próspero	<i>Prospero</i>	URA116
719	Satélite	Setebos	<i>Setebos</i>	URA116
720	Satélite	Stefano	<i>Stephano</i>	URA116
721	Satélite	Trínculo	<i>Trinculo</i>	URA116
722	Satélite	Francisco	<i>Francisco</i>	URA116
723	Satélite	Margarita	<i>Margaret</i>	URA116
724	Satélite	Ferdinando	<i>Ferdinand</i>	URA116
725	Satélite	Perdita	<i>Perdita</i>	URA115
726	Satélite	Mab	<i>Mab</i>	URA115
727	Satélite	Cupido	<i>Cupid</i>	URA115
799	Planeta	Urano	<i>Uranus</i>	URA115
801	Satélite	Tritón	<i>Triton</i>	NEP095
802	Satélite	Nereida	<i>Nereid</i>	NEP095
803	Satélite	Náyade	<i>Naiad</i>	NEP095
804	Satélite	Talasa	<i>Thalassa</i>	NEP095
805	Satélite	Despina	<i>Despina</i>	NEP095
806	Satélite	Galatea	<i>Galatea</i>	NEP095
807	Satélite	Larisa	<i>Larissa</i>	NEP095
808	Satélite	Proteo	<i>Proteus</i>	NEP095
809	Satélite	Halimede	<i>Halimede</i>	NEP086
810	Satélite	Psámate	<i>Psamathe</i>	NEP086
811	Satélite	Sao	<i>Sao</i>	NEP086
812	Satélite	Laomedeia	<i>Laomedeia</i>	NEP086
813	Satélite	Neso	<i>Neso</i>	NEP086
814	Satélite	Hipocampo	<i>Hippocamp</i>	NEP095
899	Planeta	Neptuno	<i>Neptune</i>	NEP095
901	Satélite	Caronte	<i>Charon</i>	PLU058
902	Satélite	Nix	<i>Nix</i>	PLU058
903	Satélite	Hidra	<i>Hydra</i>	PLU058
904	Satélite	Cerbero	<i>Kerberos</i>	PLU058
905	Satélite	Estigia	<i>Styx</i>	PLU058

Código	Tipo	Nombre	Name	Kernel
999	Planeta enano	Plutón	<i>Pluto</i>	<i>PLU058</i>
136108	Planeta enano	Haumea	<i>Haumea</i>	<i>No disponible</i>
136199	Planeta enano	Eris	<i>Eris</i>	<i>No disponible</i>
136472	Planeta enano	Makemake	<i>Makemake</i>	<i>No disponible</i>
50000	Planeta enano	Quaoar ³⁹	<i>Quaoar</i>	<i>No disponible</i>
90482	Planeta enano	Orcó ⁴⁰	<i>Orcus</i>	<i>No disponible</i>

³⁹ Fue descubierto desde Palomar Mountain/NEAT el 4 de junio de 2002, aunque aún no es clasificado oficialmente como planeta enano (Wikipedia, s.f.-i)

⁴⁰ Descubierto el 17 de febrero de 2004, aunque aún no es clasificado oficialmente como planeta enano (Wikipedia, s.f.-j)

Anexo B. Datos relevantes de los cuerpos del sistema solar

Los datos de la Tabla 15 se obtienen de las efemérides disponibles en el sistema HORIZONS (ver numeral 2.4.1); en caso de que no existan datos ni de parámetro gravitacional estándar o masa en el sistema HORIZONS (NASA, s.f.-n), el dato se ha consultado de las tablas de Wikipedia⁴¹.

Tabla 15. Masas de los cuerpos del sistema solar

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
10	Estrella	Sol	<i>Efemérides</i>	1.3271E+11		<i>Efemérides</i>	1.9885E+30	
199	Planeta	Mercurio	<i>Efemérides</i>	2.2032E+04		<i>Efemérides</i>	3.3020E+23	
299	Planeta	Venus	<i>Efemérides</i>	3.2486E+05		<i>Efemérides</i>	4.8685E+24	
301	Satélite	Luna	<i>Efemérides</i>	4.9028E+03		<i>Efemérides</i>	7.3490E+22	
399	Planeta	Tierra	<i>Efemérides</i>	3.9860E+05	1.40E-03	<i>Efemérides</i>	5.9722E+24	6.00E+20
401	Satélite	Fobos	<i>Efemérides</i>	7.0875E-04		<i>Efemérides</i>	1.0800E+20	1.00E+19
402	Satélite	Deimos	<i>Efemérides</i>	9.6156E-05		<i>Efemérides</i>	1.8000E+20	1.50E+19
499	Planeta	Marte	<i>Efemérides</i>	4.2828E+04	2.80E-04	<i>Wikipedia</i>	6.4171E+23	
501	Satélite	Ío	<i>Efemérides</i>	5.9599E+03	4.00E-03			
502	Satélite	Europa	<i>Efemérides</i>	3.2027E+03	5.40E-03			
503	Satélite	Ganímedes	<i>Efemérides</i>	9.8878E+03	7.40E-03			
504	Satélite	Calisto	<i>Efemérides</i>	7.1793E+03	9.70E-03			
505	Satélite	Amaltea	<i>Efemérides</i>	1.6456E-01	2.60E-02			
506	Satélite	Himalia	<i>Efemérides</i>	1.5155E-01				

⁴¹ Para los satélites planetarios de Júpiter se ha extraído de (Wikipedia, s.f.-f). Para los satélites planetarios de Saturno se ha extraído de (Wikipedia, s.f.-g). Para los satélites planetarios de Neptuno se ha extraído de (Wikipedia, s.f.-h).

⁴² Se presenta en formato de notación científica, pero en el algoritmo se utilizan los decimales disponibles. En el caso de las efemérides, NASA dispone de 16 cifras decimales, pero ya que la tabla se almacena en archivo CSV, Excel limita a 15 decimales (especificación IEEE 754).

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
507	Satélite	Elara				Wikipedia	8.7000E+17	
508	Satélite	Pasifae				Wikipedia	3.0000E+17	
509	Satélite	Sinope				Wikipedia	7.5000E+16	
510	Satélite	Lisitea				Wikipedia	6.3000E+16	
511	Satélite	Carmé				Wikipedia	1.3000E+17	
512	Satélite	Ananke				Wikipedia	3.0000E+16	
513	Satélite	Leda				Wikipedia	1.1000E+16	
514	Satélite	Tebe	<i>Efemérides</i>	3.0148E-02	3.75E-02			
515	Satélite	Adrastea	<i>Efemérides</i>	1.3900E-04	6.00E-04			
516	Satélite	Metis	<i>Efemérides</i>	2.5010E-03	4.80E-03			
517	Satélite	Calírroe				Wikipedia	8.7000E+14	
518	Satélite	Temisto				Wikipedia	6.9000E+14	
519	Satélite	Megaclite				Wikipedia	2.1000E+14	
520	Satélite	Táigete				Wikipedia	1.6000E+14	
521	Satélite	Caldona				Wikipedia	7.5000E+13	
522	Satélite	Harpálice				Wikipedia	1.2000E+14	
523	Satélite	Cálice				Wikipedia	1.9000E+14	
524	Satélite	Yocasta				Wikipedia	1.9000E+14	
525	Satélite	Erínome				Wikipedia	4.5000E+13	
526	Satélite	Isonoé				Wikipedia	7.5000E+13	
527	Satélite	Praxídice				Wikipedia	4.3000E+14	
528	Satélite	Autónoe				Wikipedia	9.0000E+13	
529	Satélite	Tione				Wikipedia	9.0000E+13	
530	Satélite	Hermipé				Wikipedia	9.0000E+13	
531	Satélite	Aitne				Wikipedia	4.5000E+13	
532	Satélite	Euridome				Wikipedia	4.5000E+13	
533	Satélite	Euante				Wikipedia	4.5000E+13	

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
534	Satélite	Euporia				Wikipedia	1.5000E+13	
535	Satélite	Ortosia				Wikipedia	1.5000E+13	
536	Satélite	Espondé				Wikipedia	1.5000E+13	
537	Satélite	Calé				Wikipedia	1.5000E+13	
538	Satélite	Pasitea				Wikipedia	1.5000E+13	
539	Satélite	Hegémone				Wikipedia	4.5000E+13	
540	Satélite	Mnemea				Wikipedia	1.5000E+13	
541	Satélite	Aeдея				Wikipedia	9.0000E+13	
542	Satélite	Telxinoe				Wikipedia	1.5000E+13	
543	Satélite	Arce				Wikipedia	4.5000E+13	
544	Satélite	Kallichore				Wikipedia	1.5000E+13	
545	Satélite	Helike				Wikipedia	9.0000E+13	
546	Satélite	Carpo				Wikipedia	4.5000E+13	
547	Satélite	Eukelade				Wikipedia	9.0000E+13	
548	Satélite	Cilene				Wikipedia	1.5000E+13	
549	Satélite	Kore				Wikipedia	1.5000E+13	
550	Satélite	Herse				Wikipedia	1.5000E+13	
551	Satélite	S/2010 J 1						
552	Satélite	S/2010 J 2				Wikipedia	1.5000E+13	
553	Satélite	Dia				Wikipedia	9.0000E+13	
554	Satélite	S/2016 J 1						
555	Satélite	S/2003 J 18				Wikipedia	1.5000E+13	
556	Satélite	S/2011 J 2						
557	Satélite	Eirene				Wikipedia	9.0000E+13	
558	Satélite	Filofrosine				Wikipedia	1.5000E+13	
559	Satélite	S/2017 J 1						
560	Satélite	Eufeme				Wikipedia	1.5000E+13	

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
561	Satélite	S/2013 J 19						
562	Satélite	Valetudo						
563	Satélite	S/2017 J 2				Wikipedia	1.5000E+13	
564	Satélite	S/2017 J 3						
565	Satélite	Pandia				Wikipedia	1.5000E+13	
566	Satélite	S/2017 J 5				Wikipedia	1.5000E+13	
567	Satélite	S/2017 J 6				Wikipedia	1.5000E+13	
568	Satélite	S/2017 J 7				Wikipedia	1.5000E+13	
569	Satélite	S/2017 J 8				Wikipedia	1.5000E+13	
570	Satélite	S/2017 J 9				Wikipedia	1.5000E+13	
571	Satélite	Ersa				Wikipedia	1.5000E+13	
572	Satélite	S/2011 J 1						
599	Planeta	Jupiter	<i>Efemérides</i>	1.2669E+08	1.27E+00	<i>Efemérides</i>	1.8982E+30	8.82E+25
601	Satélite	Mimas	<i>Efemérides</i>	2.5036E+00		<i>Efemérides</i>	3.7500E+19	
602	Satélite	Encélado	<i>Efemérides</i>	7.2105E+00		<i>Efemérides</i>	1.0805E+20	
603	Satélite	Tetis	<i>Efemérides</i>	4.1214E+01	7.00E-03	<i>Efemérides</i>	6.1760E+20	1.10E+18
604	Satélite	Dione	<i>Efemérides</i>	7.3116E+01	2.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.0957E+21	
605	Satélite	Rea	<i>Efemérides</i>	1.5394E+02	1.60E-01	<i>Efemérides</i>	2.3090E+21	
606	Satélite	Titan	<i>Efemérides</i>	8.9781E+03	6.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.3455E+23	
607	Satélite	Hiperión	<i>Efemérides</i>	3.7042E-01	2.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.0800E+19	5.20E+18
608	Satélite	Japeto	<i>Efemérides</i>	1.2051E+02	3.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.8059E+21	
609	Satélite	Febe	<i>Efemérides</i>	5.5811E-01	6.00E-04	<i>Efemérides</i>	8.2890E+18	
610	Satélite	Jano	<i>Efemérides</i>	1.2658E-01		<i>Efemérides</i>	1.9800E+18	1.20E+17
611	Satélite	Epimeteo	<i>Efemérides</i>	3.5123E-02		<i>Efemérides</i>	5.5000E+17	3.00E+16
612	Satélite	Helena	<i>Efemérides</i>	4.5516E-04		<i>Efemérides</i>	2.5470E+19	
613	Satélite	Telesto	<i>Efemérides</i>	4.8000E-04		<i>Efemérides</i>	7.1940E+18	
614	Satélite	Calipso	<i>Efemérides</i>	2.4000E-04		<i>Efemérides</i>	3.5970E+18	

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
615	Satélite	Atlas	<i>Efemérides</i>	3.7189E-04				
616	Satélite	Prometeo	<i>Efemérides</i>	1.0752E-02		<i>Efemérides</i>	1.4000E+17	
617	Satélite	Pandora	<i>Efemérides</i>	9.2903E-03		<i>Efemérides</i>	1.3000E+17	
618	Satélite	Pan						
619	Satélite	Ymir						
620	Satélite	Paaliaq						
621	Satélite	Tarvos						
622	Satélite	Ijiraq						
623	Satélite	Suttungr						
624	Satélite	Kiviuq						
625	Satélite	Mundilfari						
626	Satélite	Albiorix						
627	Satélite	Skadi						
628	Satélite	Erriapo						
629	Satélite	Siarnaq						
630	Satélite	Thrymr						
631	Satélite	Narvi						
632	Satélite	Metone						
633	Satélite	Palene						
634	Satélite	Pollux						
635	Satélite	Dafne						
636	Satélite	Aegir						
637	Satélite	Bebhionn						
638	Satélite	Bergelmir						
639	Satélite	Bestla						
640	Satélite	Farbauti						
641	Satélite	Fenrir						

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
642	Satélite	Fornjot						
643	Satélite	Hati						
644	Satélite	Hyrokkin						
645	Satélite	Kari						
646	Satélite	Loge						
647	Satélite	Skoll						
648	Satélite	Surtur						
649	Satélite	Anthe						
650	Satélite	Jarnsaxa						
651	Satélite	Greip						
652	Satélite	Tarqeq						
653	Satélite	Egeón						
654	Satélite	2004 S 20						
655	Satélite	2004 S 22						
656	Satélite	2004 S 23						
657	Satélite	2004 S 25						
658	Satélite	2004 S 26						
659	Satélite	2004 S 27						
660	Satélite	2004 S 29						
661	Satélite	2004 S 30						
662	Satélite	2004 S 32						
663	Satélite	2004 S 33						
664	Satélite	2004 S 34						
665	Satélite	2004 S 35						
666	Satélite	2004 S 38						
699	Planeta	Saturno	<i>Efemérides</i>	3.7931E+07	9.80E+01	<i>Efemérides</i>	5.6834E+26	
701	Satélite	Ariel	<i>Efemérides</i>	8.3463E+01		<i>Efemérides</i>	1.3530E+21	1.20E+20

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
702	Satélite	Umbriel	<i>Efemérides</i>	8.5093E+01		<i>Efemérides</i>	1.1720E+21	1.35E+20
703	Satélite	Titania	<i>Efemérides</i>	2.2694E+02		<i>Efemérides</i>	3.5270E+21	9.00E+19
704	Satélite	Oberón	<i>Efemérides</i>	2.0532E+02		<i>Efemérides</i>	3.0140E+21	7.50E+19
705	Satélite	Miranda	<i>Efemérides</i>	4.3195E+00		<i>Efemérides</i>	6.5900E+19	7.50E+18
706	Satélite	Cordelia						
707	Satélite	Ofelia						
708	Satélite	Bianca						
709	Satélite	Cressida						
710	Satélite	Desdémona						
711	Satélite	Julieta						
712	Satélite	Porcia						
713	Satélite	Rosalinda						
714	Satélite	Belinda						
715	Satélite	Puck						
716	Satélite	Calibán						
717	Satélite	Sicorax						
718	Satélite	Próspero						
719	Satélite	Setebos						
720	Satélite	Stefano						
721	Satélite	Trínculo						
722	Satélite	Francisco						
723	Satélite	Margarita						
724	Satélite	Ferdinando						
725	Satélite	Perdita						
726	Satélite	Mab						
727	Satélite	Cupido						
799	Planeta	Urano	<i>Efemérides</i>	5.7940E+06	4.30E+00	<i>Efemérides</i>	8.6813E+25	

Código	Tipo	Nombre	GM			Masa		
			Fuente	Valor ⁴²	Tol	Fuente	Valor ⁴²	Tol
801	Satélite	Tritón	<i>Efemérides</i>	1.4290E+03		<i>Wikipedia</i>	2.1400E+22	
802	Satélite	Nereida				<i>Wikipedia</i>	3.0000E+19	
803	Satélite	Náyade	<i>Efemérides</i>	8.5303E-03		<i>Wikipedia</i>	2.0000E+17	
804	Satélite	Talasa	<i>Efemérides</i>	2.3589E-02		<i>Wikipedia</i>	2.0000E+17	
805	Satélite	Despina	<i>Efemérides</i>	1.1673E-01		<i>Wikipedia</i>	2.0000E+18	
806	Satélite	Galatea	<i>Efemérides</i>	1.8990E-01		<i>Wikipedia</i>	4.0000E+18	
807	Satélite	Larisa	<i>Efemérides</i>	2.5484E-01		<i>Wikipedia</i>	5.0000E+18	
808	Satélite	Proteo	<i>Efemérides</i>	2.5834E+00		<i>Wikipedia</i>	5.0000E+19	
809	Satélite	Halimede				<i>Wikipedia</i>	1.0000E+17	
810	Satélite	Psámate				<i>Wikipedia</i>	2.0000E+16	
811	Satélite	Sao				<i>Wikipedia</i>	1.0000E+17	
812	Satélite	Laomedeia				<i>Wikipedia</i>	1.0000E+17	
813	Satélite	Neso				<i>Wikipedia</i>	1.0000E+17	
814	Satélite	Hipocampo						
899	Planeta	Neptuno	<i>Efemérides</i>	6.8351E+06	1.00E+01	<i>Efemérides</i>	1.0241E+26	
901	Satélite	Caronte	<i>Efemérides</i>	1.0617E+02	6.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.5300E+21	
902	Satélite	Nix	<i>Efemérides</i>	1.8000E-03	5.20E-04	<i>Wikipedia</i>	5.0000E+16	2.00E+18
903	Satélite	Hidra	<i>Efemérides</i>	2.2491E-03	4.40E-04	<i>Wikipedia</i>	5.0000E+16	2.00E+18
904	Satélite	Cerbero	<i>Efemérides</i>	9.0000E-05	1.10E-04			
905	Satélite	Estigia	<i>Efemérides</i>	2.0000E-06				
999	Planeta enano	Plutón	<i>Efemérides</i>	8.6996E+02	8.00E-02	<i>Efemérides</i>	1.3070E+22	1.80E+20
136108	Planeta enano	Haumea				<i>Wikipedia</i>	4.0000E+21	
136199	Planeta enano	Eris				<i>Wikipedia</i>	1.6700E+22	2.00E+20
136472	Planeta enano	Makemake				<i>Wikipedia</i>	4.0000E+21	
50000	Planeta enano	Quaoar				<i>Wikipedia</i>	5.0000E+20	
90482	Planeta enano	Orco				<i>Wikipedia</i>	6.6000E+20	4.00E+19

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 16 se presentan algunos datos relevantes de los planetas del sistema solar.

Tabla 16. Datos relevantes de los planetas del sistema solar

Dato	Unidad	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Distancia media al sol	Km	57,909,175	108,208,930	149,597,870	227,936,640	778,412,010	1,426,725,400	2,870,972,200	4,498,252,900
	UA ⁷	0.38709893	0.72333199	1	1.52366231	5.20336301	9.53707032	19.19126393	30.06896348
Periodo rotacional ⁴³	días	58.646225	-243.0187 ⁴⁴	0.99726968	1.02595675	0.41354	0.44401	-0.71833 ⁴⁴	0.67125
Periodo orbital ⁴⁵	años	0.2408467	0.61519726	1.0000174	1.8808476	11.862615	29.447498	84.016846	164.79132
Radio medio	km	2,439.7	6,051.8	6,371	3,389.5	69,911	58,232	25,362	24,622
	/T ⁴⁶	0.3829	0.9499	1	0.5320	10.9733	9.1402	3.9809	3.8647
Inclinación orbital ⁴⁷	°	7.00487	3.39471	0.00005	1.85061	1.30530	2.48446	0.76986	1.76917
Velocidad orbital	km/s	47.8725	35.0214	29.7859	24.1309	13.0697	9.6724	6.8352	5.4778
Velocidad de escape ⁴⁸	km/s	4.25	10.36	11.18	5.02	59.54	35.49	21.29	23.71
Gravedad ecuatorial	m/s ²	3.7	8.9	9.81	3.71	24.79	9.1	7.8	11.00

Fuentes: NASA, 2021. La Colmena (López-Gómez, 2016)

⁴³ Tiempo en dar una vuelta sobre su propio eje

⁴⁴ Movimiento retrógrado: rotación en sentido antihorario visto desde el polo Norte solar

⁴⁵ Tiempo en recorrer su propia órbita

⁴⁶ Con respecto a la Tierra

⁴⁷ En los planetas del sistema solar la inclinación orbital i de un planeta se define como la inclinación del plano de la órbita con respecto al plano de la eclíptica. El plano orbital de la Tierra es el plano que contiene su trayecto en su movimiento de traslación alrededor del Sol a lo largo de un año, y es precisamente el plano de la eclíptica, por lo que la inclinación orbital de la Tierra es nula por propia definición

⁴⁸ La velocidad de escape es aquella que un objeto cualquiera necesita para alejarse indefinidamente de un cuerpo o sistema masivo al cual le vincula únicamente la gravedad.

Anexo C. Mecánica Hamiltoniana

1. Principio de D'Alembert

Un concepto relevante para entender la evolución de la mecánica Newtoniana es la *ligadura*. Como se describió en la mecánica Newtoniana, el resultado es $3N$ ecuaciones diferenciales con la dificultad manifestada; pero la aplicación exclusiva de las leyes de Newton, específicamente la segunda Ley, puede estar ignorando restricciones existentes en el sistema.

Como indica (Soldovieri C, Introducción a la mecánica clásica, 2017, pág. 286): “Se denominan *Ligaduras* a las restricciones sobre las coordenadas de un sistema (independiente de las fuerzas actuantes), es decir, son condiciones que restringen la variedad de movimientos posibles de las partículas que constituyen su sistema de partículas”. “Las ligaduras se expresan mediante ecuaciones a las cuales se les denomina *Ecuaciones de Ligadura*, que describen la geometría y/o la cinemática de las mismas”.

Un ejemplo de ligaduras es un péndulo donde el movimiento se restringe por la tensión de la cuerda, o una montaña rusa donde el movimiento se restringe a la normal resultante de la forma de los rieles o las cuencas de un ábaco donde el movimiento es unidireccional guiado por las varillas (Díaz Sánchez, 2012) y (Goldstein, 1994).

Existen diferentes clasificaciones para las ligaduras (Soldovieri C, Introducción a la mecánica clásica, 2017), de acuerdo a si pueden expresarse o no como una desigualdad (unilaterales y bilaterales), si dependen del tiempo (reónomas y esclerónomas), pero la clasificación que tiene mayor aplicabilidad e interés depende de “si representan o no una relación bilateral entre las coordenadas” (Soldovieri C, 2013, pág. 82), por lo cual se dividen en *holónomas* y no *holónomas*.

Una ligadura holónoma es aquella que no depende de la velocidad y que depende exclusivamente de las coordenadas de las partículas y posiblemente del tiempo de forma explícita (Soldovieri C, Introducción a la mecánica clásica, 2017). Así, la ecuación de ligadura se puede representar como:

$$f(r_1, r_1, \dots, r_1, t) = 0. \quad (21)$$

Un ejemplo de ligaduras holónomas es la montaña rusa o las cuencas del ábaco, donde la partícula es obligada a moverse a lo largo de una trayectoria definida donde las ecuaciones de la trayectoria definen las ecuaciones de la ligadura (Goldstein, 1994).

Una ligadura no holónoma es aquella que no puede ser expresada como una ligadura holónoma. Un ejemplo es el gas en un contenedor, en el cual el gas está restringido a la forma del contenedor, pero no de forma exclusiva, es decir que puede ocupar cualquier lugar dentro de la forma de este, generando una desigualdad (el espacio ocupado es menor al límite).

En la aplicación de la segunda ley de Newton sobre cada una de las partículas de un sistema es necesario incluir las fuerzas relacionadas con las ligaduras (fuerzas de ligadura), por lo cual empiezan a hacer parte de las ecuaciones que caracterizan al sistema. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se conocen las fuerzas de ligadura y por tanto generan variables desconocidas a resolver, pues solo se conocen en función de su efecto en el movimiento de las partículas del sistema (Goldstein, 1994).

Aquí se requiere incorporar el concepto de *desplazamiento virtual*, el cual consiste en “el cambio de configuración de un sistema como resultado de un cambio infinitesimal de las coordenadas, denotado como δr_i , y consistente con las fuerzas y ligaduras impuestas sobre el sistema en un instante dado t ” (Díaz Sánchez, 2012, pág. 16). Este es diferente a un desplazamiento real, pues el tiempo se considera fijo y, por tanto, los cambios en las ligaduras y las fuerzas que provengan de la evolución temporal se ignoran (Díaz Sánchez, 2012). Tomando una partícula i y las fuerzas que actúan en ella durante un desplazamiento virtual, a partir de la segunda Ley de Newton, el trabajo virtual asociado es (Díaz Sánchez, 2012):

$$F_i - \dot{p}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0.$$

Las fuerzas que actúan en la partícula se pueden dividir entre las fuerzas de la ligadura (f_i) y las fuerzas aplicadas ($F_i^{(a)}$), de tal forma que $F_i = F_i^{(a)} + f_i$, por lo cual el trabajo realizado por cada fuerza también se divide (Díaz Sánchez, 2012):

$$\sum_{i=1}^n (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^n (f_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0.$$

Ahora, si en el sistema los trabajos realizados por las fuerzas de ligadura se anulan, entonces los trabajos virtuales netos asociados a estas fuerzas también se anulan. Esto está presente, por ejemplo, en un péndulo donde las fuerzas de ligadura, correspondientes a la tensión de la cuerda, no realizan trabajo sobre el cuerpo colgado. Así, en este tipo de sistemas (Díaz Sánchez, 2012):

$$\sum_{i=1}^n (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (22)$$

Esta expresión corresponde al principio de D'Alembert (enunciado por Jean D'Alembert en 1743), en el cual se logra la eliminación de las fuerzas de ligadura y, en consecuencia, reducción de complejidad en las ecuaciones diferenciales que caracteriza al sistema mecánico. Se considera como una generalización de la segunda Ley de Newton en una forma que incluye el concepto de ligaduras.

2. Mecánica Lagrangiana

En 1788 Lagrange postuló una reformulación de la mecánica clásica, mediante la simplificación de los problemas físicos. La mecánica Lagrangiana permite generalizar las ecuaciones de movimiento de tal forma que sean invariantes con respecto al sistema de coordenadas, lo que genera que se pueda trabajar tanto con marcos de referencia inerciales y como no inerciales, superando una de las limitaciones de la mecánica Newtoniana.

Si bien el principio de D'Alembert generó ya una simplificación teórica de las ecuaciones diferenciales que caracterizan el sistema, δr_i seguía estando atados las ligaduras del sistema y era necesario encontrar un nuevo de sistemas de coordenadas que fuese independiente de las ligaduras, reflejando así los verdaderos grados de libertad del sistema (Díaz Sánchez, 2012).

En el sistema de coordenadas cartesianas se tienen $3N$ coordenadas independientes; pero si el sistema tiene ligaduras holónomas, existe una relación de dependencia entre algunas de esas coordenadas (Soldovieri C, Introducción a la mecánica clásica, 2017) y así estas ligaduras generan k ecuaciones de la forma (21), por lo cual se pueden eliminar estas coordenadas y quedarán $3N - k$ coordenadas que equivalen a los grados de libertad del sistema (Goldstein, 1994). Esta reducción se puede expresar introduciendo $3N - k$ variables nuevas e independientes $(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k})$, donde las antiguas coordenadas (r_1, r_2, \dots, r_N) se pueden expresar en términos de las nuevas coordenadas, así:

$$\begin{cases} r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ \vdots \\ r_N = r_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{cases} .$$

Teniendo en cuenta que el número de coordenadas corresponde al número de variables y por tanto al número de ecuaciones que caracterizan al sistema, la reducción de coordenadas constituye una disminución de ecuaciones, simplificando la caracterización del sistema. Esta transformación del sistema de coordenadas (r_N) al sistema de coordenadas (q_{3N-k}) corresponde a representaciones paramétricas de las variables (r_N) . Las coordenadas q_j son denominadas *coordenadas generalizadas* y a diferencia de las coordenadas cartesianas, no requieren ser agrupadas en conjuntos de 3 para formar vectores; por ejemplo, si una partícula es obligada a moverse exclusivamente en la superficie de una esfera, los 2 ángulos que expresan la posición de la esfera pueden ser coordenadas generalizadas (Goldstein, 1994).

Realizando la transformación del sistema de coordenadas, es posible definir una nueva función única que caracterice al sistema mecánico utilizando la energía cinética (T) y la energía potencial (V) del sistema, conocida como el *Lagrangiano*:

$$L = T - V, \quad (23)$$

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \in R^{2n}.$$

A partir del principio de D'Alembert y utilizando el Lagrangiano, se deduce la *ecuación Euler-Lagrange*⁴⁹:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (24)$$

Utilizando esta ecuación se obtienen n ecuaciones diferenciales (ecuaciones de movimiento), normalmente de orden 2, correspondientes a los n grados de libertad del sistema mecánico.

3. Mecánica Hamiltoniana

Esta teoría fue formulada por Hamilton en 1833. Aunque puede ser formulada por si sola, es común derivarla a partir de la mecánica Lagrangiana. Como indica (Díaz Sánchez, 2012, pág.

⁴⁹ Al derivarse del principio de D'Alembert, aplica en sistemas con ligaduras holónomas y fuerzas conservativas. No obstante, se puede deducir una ecuación más general y métodos ampliados cuando aparecen fuerzas no conservativas y ligaduras no holónomas, como los multiplicadores de Lagrange.

92): “La formulación Hamiltoniana no tiene un contenido Físico nuevo, y no es particularmente ventajosa para la solución de problemas concretos en mecánica. El poder de este formalismo consiste en que es fácilmente extensible a otras áreas de la Física”; estas áreas se refieren especialmente a la mecánica relativista y la mecánica cuántica. No obstante, una ventaja de la teoría Hamiltoniana es que permite que las $3N$ ecuaciones de orden 2 con $3N$ condiciones iniciales resultantes de la mecánica Lagrangiana (sin descontar aquellas que se eliminan por efecto de las ligaduras) puedan convertirse en $6N$ ecuaciones de primer orden con $6N$ condiciones iniciales, mejorando la probabilidad de integración (Díaz Sánchez, 2012).

Como ha sucedido en las demás teorías, es necesario acotar algunos conceptos importantes para explicar la mecánica Hamiltoniana. Un primer concepto importante son las *transformaciones de Legendre*, cuya utilidad en mecánica clásica es “establecer la correspondencia entre los marcos Lagrangiano y Hamiltoniano de los sistemas dinámicos” (Soldovieri C, Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton, 2013, pág. 293).

Como indica (Abramson, 2018, pág. 244): “Una transformación de Legendre es un cambio de variable de una función $f(x)$ definida por que las derivadas de la función y su transformada sean inversas una de la otra”. Lo que se busca con la transformada es, dada una función $F(u)$, contar con una función $G(v)$ que almacene información de una manera más conveniente, para lo cual deben cumplirse las siguientes condiciones (Soldovieri C, Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton, 2013):

1. La función $F(u)$ debe ser suave, por lo cual debe tener suficientes derivadas continuas
2. La función $F(u)$ debe ser estrictamente convexa en el intervalo deseado
3. Debe ser más fácil medir, controlar o pensar sobre la derivada de F con respecto a u que medir o pensar directamente respecto a u .

Así, la transformada de Legendre se obtiene al aplicar (Soldovieri C, Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton, 2013):

$$G(v) = u \cdot v - F(u), \quad (25)$$

$$v = \frac{dF(u)}{du}. \quad (26)$$

Sumando las transformadas de Legendre para el Lagrangiano de cada una de las coordenadas generalizadas del sistema mecánico, se obtiene el *Hamiltoniano*:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (27)$$

$$p_j = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j}, \quad (28)$$

donde;

q_j, p_j : variables canónicas

p_j : momentos conjugados (también cantidad de movimiento conjugada)

Con base en el Hamiltoniano se deducen las ecuaciones canónicas de Hamilton, que constituyen el sistema buscado de $6N$ ecuaciones que reemplazan a las $3N$ de Lagrange:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (29)$$

Adicionalmente, una propiedad importante del hamiltoniano es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (30)$$

Según esta propiedad, la derivada total del Hamiltoniano con respecto al tiempo equivale a su derivada parcial con respecto al tiempo, lo que indica que basta con verificar que el tiempo se encuentre explícito para hallar tal derivada. Adicionalmente, también es equivalente al negativo de la derivada parcial del Lagrangiano con respecto al tiempo, lo que indica que también basta con revisar el Lagrangiano y sus expresiones explícitas con respecto al tiempo.

El procedimiento para utilizar las ecuaciones de Hamilton para resolver un problema es el siguiente (Díaz Sánchez, 2012) y (Goldstein, 1994):

1. Se elige un sistema de coordenadas generalizadas q_j y se construye el Lagrangiano $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$.
2. Mediante la ecuación (28) se definen los momentos conjugados en función de q_j, \dot{q}_j, t .
3. Se construye el Hamiltoniano mediante la ecuación (27). En este punto se obtiene un Hamiltoniano $H(q_j, \dot{q}_j, p_j, t)$.

4. Ya sea utilizando las ecuaciones canónicas (29) o mediante la inversión de la ecuación (28), se obtiene $\dot{q}_j(q_j, p_j, t)$.
5. Se eliminan los \dot{q}_j de $H(q_j, \dot{q}_j, p_j, t)$, obteniendo finalmente $H(q_j, p_j, t)$.

Este proceso puede ser a veces lento y complejo. Sin embargo, existen condiciones que pueden reducir la complejidad e inclusive los pasos. En el caso en que el Lagrangiano del sistema sea una suma de funciones homogéneas⁵⁰ (en grado 0, 1 y 2) y las fuerzas se derivan de un potencial conservativo, entonces se cumple (Goldstein, 1994):

$$H = T + V = E. \quad (31)$$

De cumplirse estas condiciones, la complejidad algebraica del Hamiltoniano se reduce significativamente (Goldstein, 1994). Así, se pueden encontrar varias condiciones que simplifican este procedimiento.

Un principio muy importante asociado a la teoría de Hamilton es el principio de mínima acción⁵¹. Este principio indica que entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , entre todas las trayectorias posibles, una partícula seguirá la trayectoria donde la acción S sea mínima (Landáu & Lifshitz, 1965):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0. \quad (32)$$

A partir del concepto de acción S es posible derivar las ecuaciones canónicas, el Hamiltoniano y las ecuaciones de Euler-Lagrange. A partir del principio de mínima acción se pueden derivar diversos principios operacionales parecidos, como el principio de Hertz de la mínima curvatura (Goldstein, 1994), pues es transferible a los marcos de la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica (Soldovieri C, Introducción a la mecánica clásica, 2017).

⁵⁰ Si todos los argumentos se multiplican por un factor constante, entonces el valor de la función resulta ser un cierto número de veces el factor multiplicativo elevado a una potencia. Dicha potencia es el grado de la función homogénea

⁵¹ Se considera más exacto llamarlo el principio de acción estacionaria, aunque es menos popular

Anexo D. Jacobiano del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\|r_i - r\|^3} \left(3 \left(\frac{x_i - x}{\|r_i - r\|} \right)^2 - 1 \right) & -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (x_i - x)(y_i - y)}{\|r_i - r\|^3} & -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (x_i - x)(z_i - z)}{\|r_i - r\|^3} & 0 & 0 & 0 \\
 -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (x_i - x)(y_i - y)}{\|r_i - r\|^3} & -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\|r_i - r\|^3} \left(3 \left(\frac{y_i - y}{\|r_i - r\|} \right)^2 - 1 \right) & -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (y_i - y)(z_i - z)}{\|r_i - r\|^3} & 0 & 0 & 0 \\
 -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (x_i - x)(z_i - z)}{\|r_i - r\|^3} & -3G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (y_i - y)(z_i - z)}{\|r_i - r\|^3} & -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\|r_i - r\|^3} \left(3 \left(\frac{z_i - z}{\|r_i - r\|} \right)^2 - 1 \right) & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Anexo E. Resultados de pruebas de PVI

1. PVI seleccionados

Las EDO tipo PVI seleccionadas para la prueba (ver numeral 4.4) se indican en la Tabla 17.

Tabla 17. PVI utilizados para la selección del método numérico

PVI	EDO tipo PVI	Solución analítica
1.	$y'(t) = (1 - 2t)y(t), y(0) = 1, t \in [0,3]$	$y(t) = e^{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2}t)^2}$
2.	$\begin{cases} x' = 3x + 2y - (2t^2 + 1)e^{2t}, & x(0) = 1 \\ y' = 4x + y + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, & y(0) = 1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{5t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + e^{2t} \\ y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2e^{2t} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x' = y, & x(0) = 1 \\ y' = -x - 2e^t + 1, & y(0) = 0 \\ z' = -x - e^t + 1, & z(0) = 1 \\ t \in [0,2] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sen(t) - e^t + 1 \\ y(t) = -\sen(t) + \cos(t) - e^t \\ z(t) = \cos(t) - \sen(t) \end{cases}$
4.	$\begin{aligned} y''' &= -6y^4, t \in [1,1.9] \\ y(1) &= -1, y'(1) = -1, y''(1) = -2 \end{aligned}$	$y(t) = \frac{1}{t-2}$
5.	$\begin{aligned} y'' + 2y' &= t^2y, t \in [0,1] \\ y(0) &= 1, y'(0) = -1 \end{aligned}$	$y(t) = e^{(t-2)t/2}$
6.	$\begin{aligned} ru'' + u' &= 0, r \in [1,3] \\ u(1) &= 1, u'(1) = \frac{1}{2\ln(\frac{1}{3})} \end{aligned}$	$u(r) = \frac{\ln(\frac{r}{3}) - \frac{1}{2}\ln(r)}{\ln(\frac{1}{3})}$
7.	$\begin{aligned} y''' &= \frac{36}{y''} - \frac{60}{(x-1)^6} + 3(x-1)^5, \\ x &\in [0, 1/2] \\ y(0) &= -1, y'(0) = -3, y''(0) = -12 \end{aligned}$	$y(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Fuente: Elaboración propia

En los casos 4 al 7, es necesario realizar conversiones para obtener EDO de primer grado, como se muestra en la Tabla 18.

Tabla 18. Conversiones de las EDO tipo PVI de orden superior a 1

No	Conversión	EDO resultante
4.	$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y_1' = y' \\ \Rightarrow y_2' &= y_1'' = y'' \\ y_3 &= y_2' = y_1''' = y''' \\ \Rightarrow y_3' &= y_2'' = y_1'''' = y'''' \end{aligned}$	$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(1) = -1 \\ y_2' = y_3, & y_2(1) = -1 \\ y_3' = -6y_1^4, & y_3(1) = -2 \\ t \in [1,1.9] \end{cases}$
5.	$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y_1' = y' \\ \Rightarrow y_2' &= y_1'' = y'' \end{aligned}$	$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 1 \\ y_2' = t^2y_1 - 2y_2, & y_2(0) = -1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$

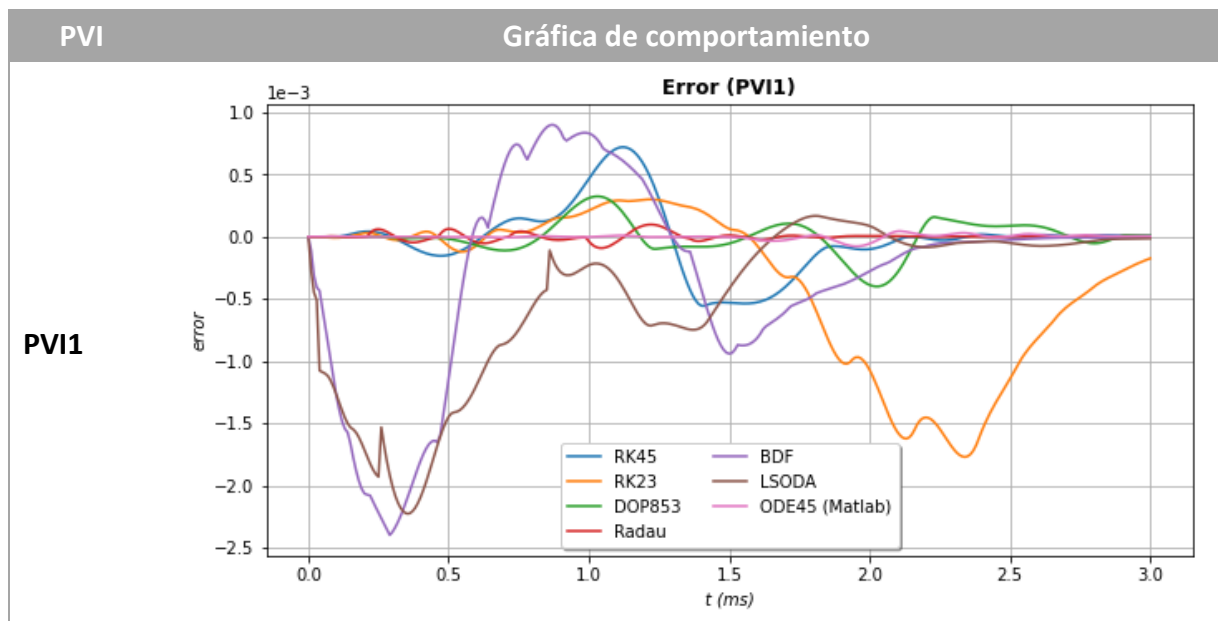
No	Conversión	EDO resultante
6.	$u_1 = u$ $u_2 = u'_1 = u'$ $\Rightarrow u'_2 = u''_1 = u''$	$\begin{cases} u'_1 = u_2, & u_1(1) = 1 \\ u'_2 = -\frac{u_2}{r}, & u_2(1) = \frac{1}{2\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$ $r \in [1,3]$
7.	$y_1 = y$ $y_2 = y'_1 = y'$ $\Rightarrow y'_2 = y''_1 = y''$ $y_3 = y'_2 = y''_1 = y''$ $\Rightarrow y'_3 = y''_2 = y'''_1 = y'''$	$\begin{cases} y'_1 = y_2, & y_1(0) = -1 \\ y'_2 = y_3, & y_2(0) = -3 \\ y'_3 = \frac{36}{y_3} - \frac{60}{(x-1)^6} + 3(x-1)^5, & y_3(0) = -12 \end{cases}$ $x \in [0, 1/2]$

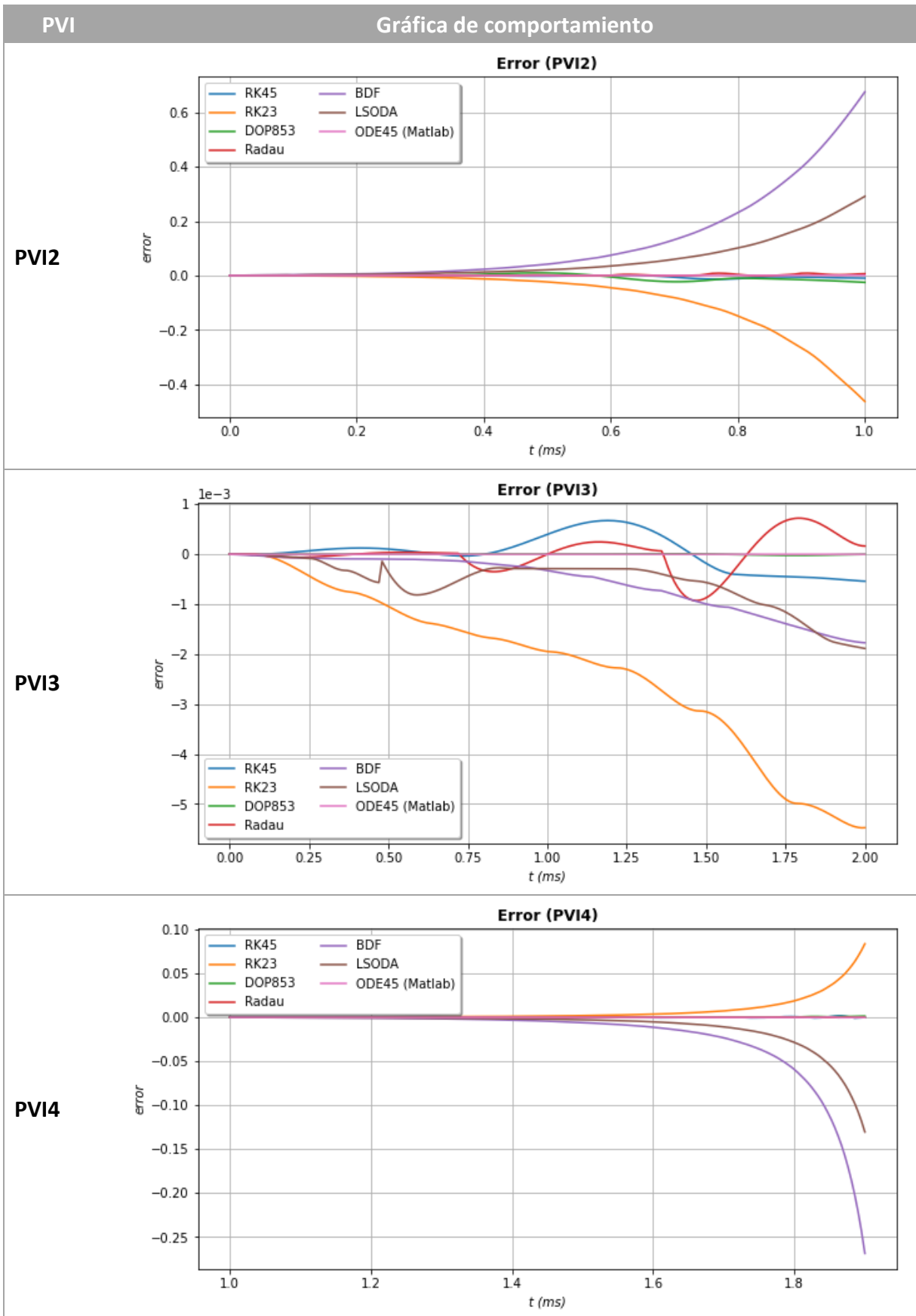
Fuente: Elaboración propia

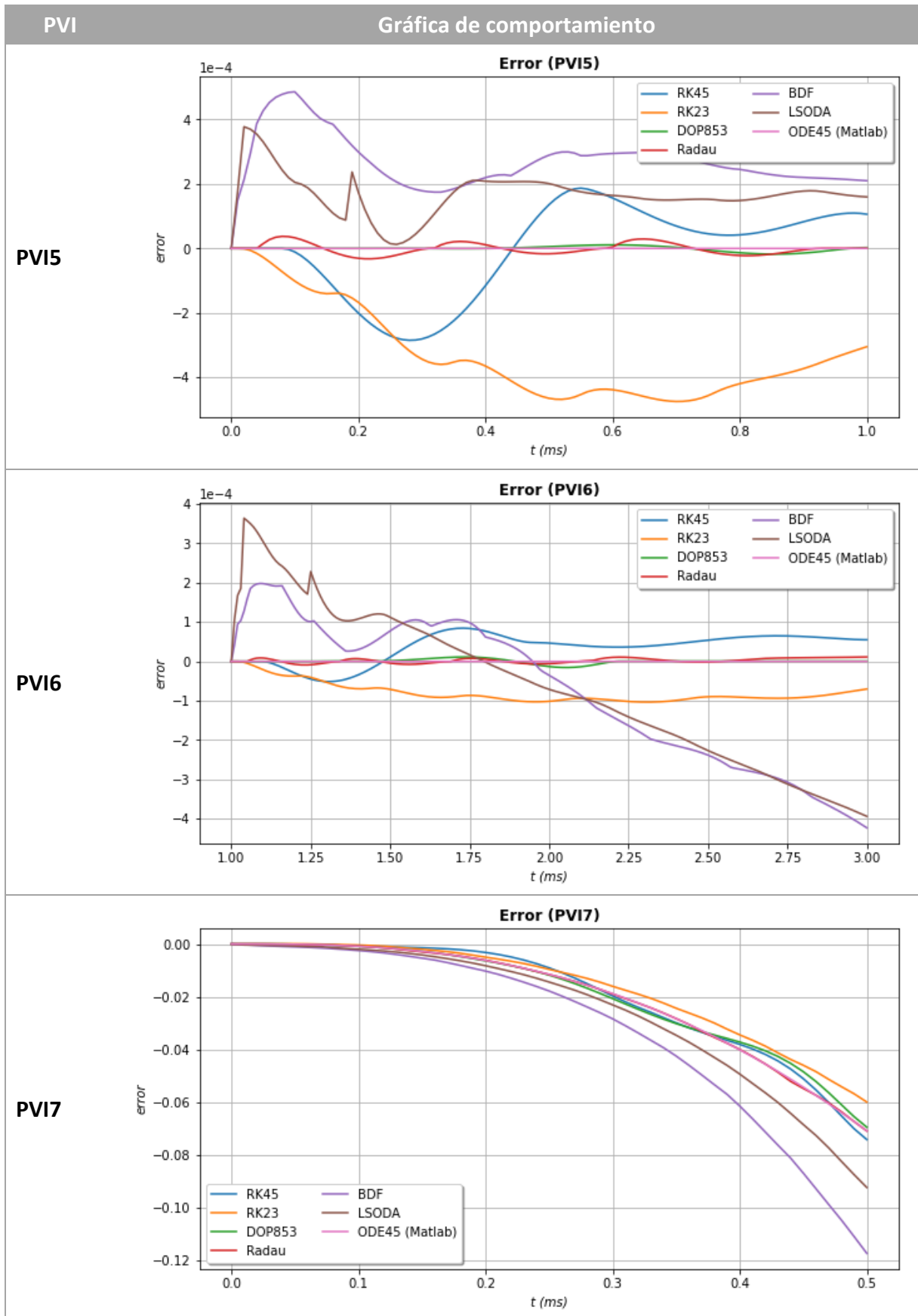
2. Evaluación del error en cada PVI

En la Tabla 19 se presenta el comportamiento del error a lo largo del vector de la variable independiente (tiempo) para los métodos evaluados en cada uno de los PVI seleccionados. Ya que el comportamiento es dinámico, el error representado corresponde al promedio de 100 iteraciones.

Tabla 19. Comportamiento del error en cada PVI







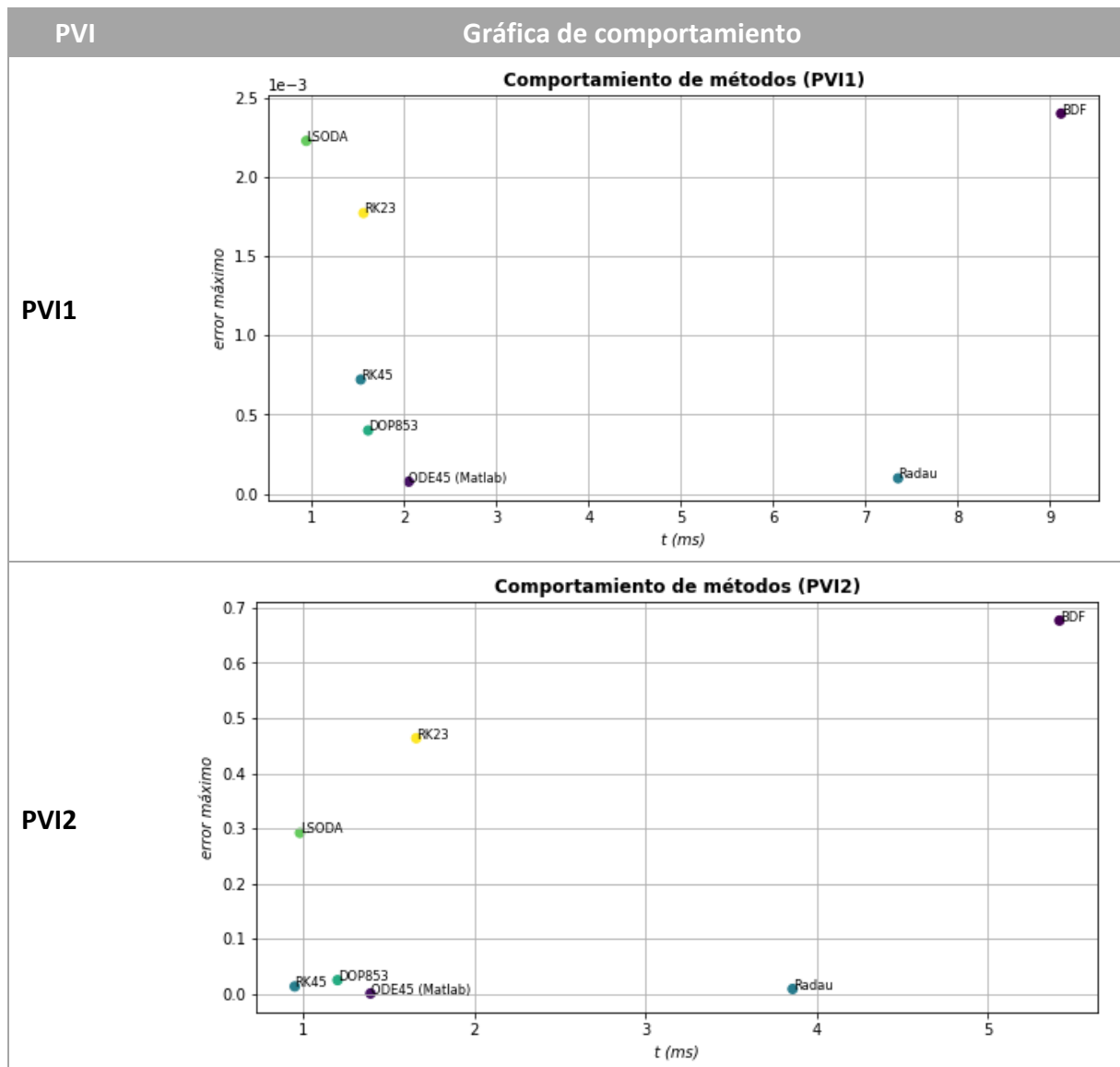
Fuente: Elaboración propia

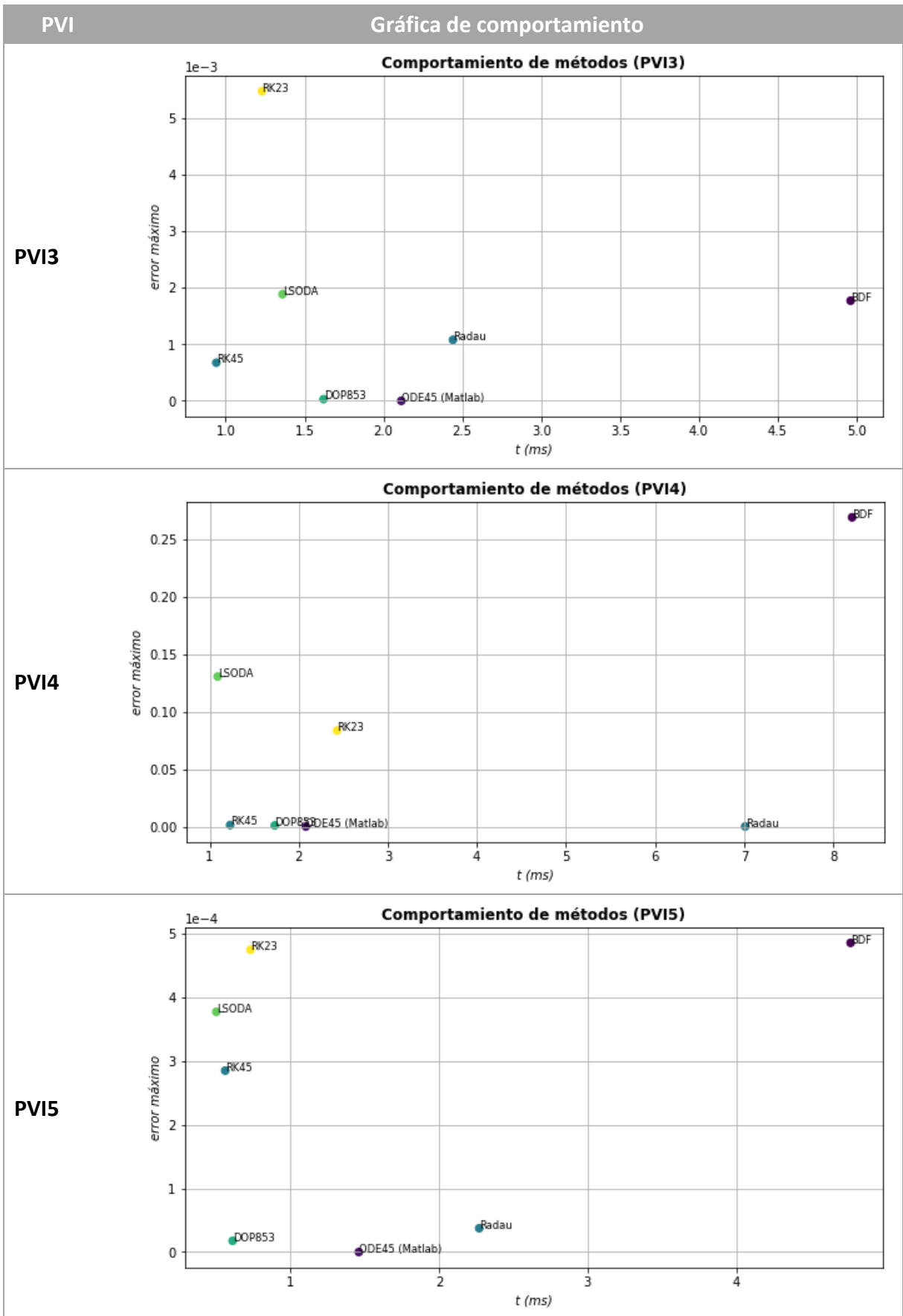
En estas gráficas se puede observar:

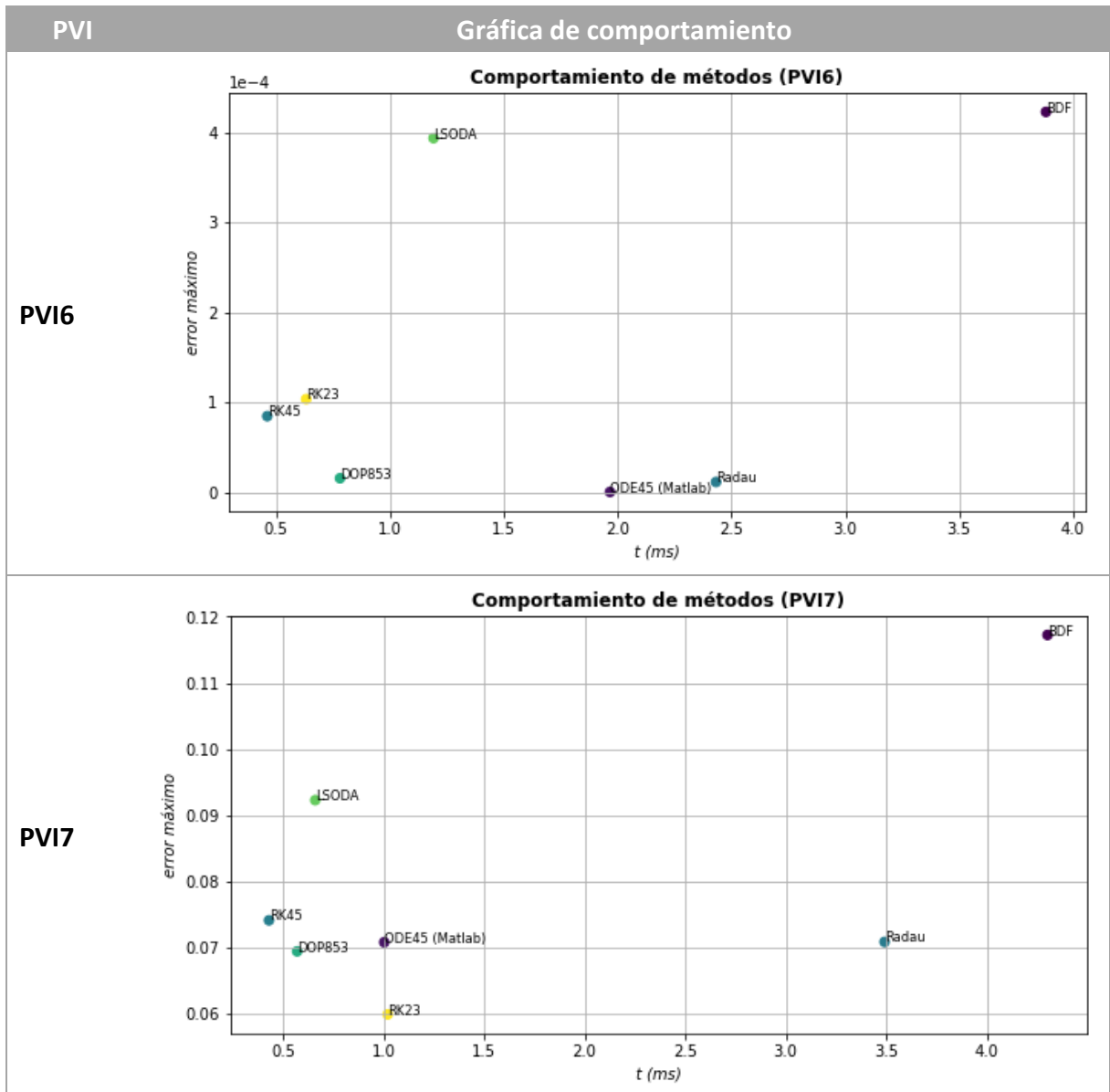
- a. Los métodos *LSODA*, *BDF* y *RK23* presentan mayor error y mayor dispersión.
- b. El método *RK45* presenta un buen comportamiento, en algunos de los PVI presentó bajo error, sin embargo, en otros tuvo una fluctuación importante.
- c. Los métodos *DOP853*, *Radau* y *ODE45* muestran los menores niveles de error y los comportamientos más estables (menos fluctuación).

Con el fin de complementar las observaciones visuales, los resultados de la aplicación de las ecuaciones (13), (14) y (15) en los errores determinados y del tiempo de procesamiento para los métodos evaluados en cada uno de los PVI seleccionados se presenta en la Tabla 20; se presenta el comportamiento del resultado promedio de 100 iteraciones.

Tabla 20. Comportamiento de los métodos en cada PVI







Fuente: Elaboración propia

Con base en estas gráficas se pueden complementar las observaciones iniciales:

- a. Se confirma que el método *BDF* presenta un error máximo superior al presentado por los demás métodos, pero además es el método más lento.
- b. Si bien los métodos *RK23* y *LSODA* se muestran con un error máximo superior a los demás métodos, el tiempo de procesamiento es similar o menor a los demás métodos.
- c. Si bien se confirma que el método *Radau* es un método con un error máximo bajo, su tiempo de procesamiento es alto en comparación con los demás métodos.
- d. Se confirma que el método *RK45* tiene valores de error máximo intermedios, pero con tiempos de procesamiento bajos.

- e. Se confirma que los métodos *DOP853* y *ODE45* además de presentar un error máximo bajo, presentan tiempos de procesamiento bajos.

Finalmente, para lograr un entendimiento mayor al comportamiento de los métodos en la prueba realizada, en la Tabla 8 se presentan los datos detallados resultantes.

Tabla 21. Resultados de la evaluación de los métodos numéricos

PVI	Método\parámetro	Norma	Max(abs)	Desv.Std	Tiempo (ms)
PVI1	RK45	4.6917E-03	7.2073E-04	2.7042E-04	1.5302
	RK23	1.2441E-02	1.7709E-03	6.1561E-04	1.5603
	DOP853	2.3390E-03	3.9962E-04	1.3503E-04	1.6104
	Radau	5.0540E-04	9.8108E-05	2.9173E-05	7.3553
	BDF	1.4530E-02	2.3984E-03	7.8552E-04	9.1218
	LSODA	1.4060E-02	2.2260E-03	6.4239E-04	0.9401
	ODE45 (Matlab)	3.2139E-04	7.6479E-05	1.8552E-05	2.0510
PVI2	RK45	7.2244E-02	1.3562E-02	4.1526E-03	0.9500
	RK23	2.0153E+00	4.6362E-01	1.1635E-01	1.6603
	DOP853	1.5996E-01	2.5043E-02	1.0066E-02	1.2002
	Radau	3.9878E-02	9.0178E-03	2.4376E-03	3.8610
	BDF	3.0063E+00	6.7692E-01	1.7071E-01	5.4213
	LSODA	1.3109E+00	2.9194E-01	7.3425E-02	0.9802
	ODE45 (Matlab)	4.2260E-03	8.6416E-04	2.4068E-04	1.3930
PVI3	RK45	7.0812E-03	6.7534E-04	2.6053E-04	0.9402
	RK23	4.0001E-02	5.4766E-03	1.3454E-03	1.2302
	DOP853	2.5193E-04	3.1294E-05	1.0211E-05	1.6203
	Radau	8.3925E-03	1.0799E-03	3.3862E-04	2.4404
	BDF	1.3371E-02	1.7718E-03	5.0510E-04	4.9611
	LSODA	1.3928E-02	1.8860E-03	5.5512E-04	1.3603
	ODE45 (Matlab)	9.7527E-06	1.0272E-06	3.1173E-07	2.1130
PVI4	RK45	5.9709E-03	1.6836E-03	4.3121E-04	1.2301
	RK23	2.2055E-01	8.3678E-02	1.4301E-02	2.4305
	DOP853	3.9109E-03	1.2916E-03	2.5842E-04	1.7305
	Radau	1.0179E-03	4.1392E-04	6.6878E-05	7.0116
	BDF	7.0267E-01	2.6873E-01	4.5551E-02	8.2118
	LSODA	3.3985E-01	1.3055E-01	2.2053E-02	1.0901
	ODE45 (Matlab)	1.2209E-03	4.2169E-04	8.6235E-05	2.0800
PVI5	RK45	1.4004E-03	2.8494E-04	1.3990E-04	0.5601
	RK23	3.5948E-03	4.7470E-04	1.4171E-04	0.7302
	DOP853	7.3599E-05	1.7643E-05	7.3216E-06	0.6102
	Radau	1.7368E-04	3.7434E-05	1.7339E-05	2.2705
	BDF	2.8271E-03	4.8560E-04	8.1454E-05	4.7710
	LSODA	1.7920E-03	3.7730E-04	6.6154E-05	0.5000
	ODE45 (Matlab)	2.5159E-07	9.0468E-08	2.4313E-08	1.4600
PVI6	RK45	7.2436E-04	8.4492E-05	3.7215E-05	0.4602
	RK23	1.1854E-03	1.0341E-04	2.5512E-05	0.6313
	DOP853	7.7272E-05	1.5462E-05	5.4559E-06	0.7798

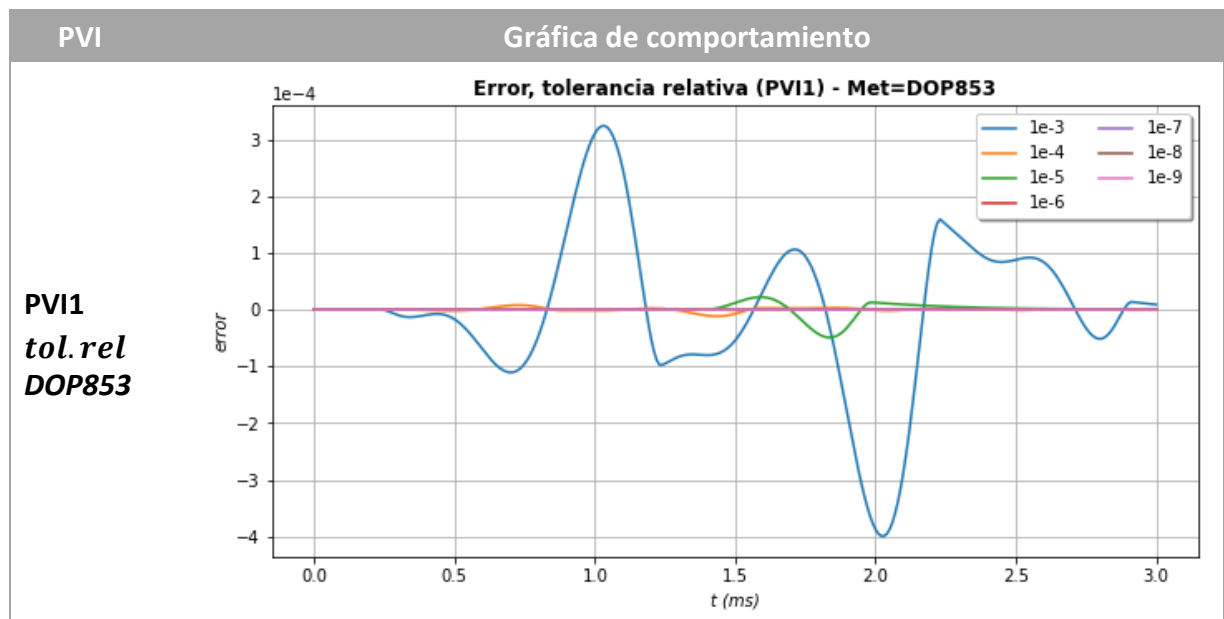
PVI	Método\parámetro	Norma	Max(abs)	Desv.Std	Tiempo (ms)
	Radau	8.8567E-05	1.1293E-05	5.8787E-06	2.4319
	BDF	2.7802E-03	4.2282E-04	1.8096E-04	3.8811
	LSODA	2.8890E-03	3.9363E-04	1.9439E-04	1.1907
	ODE45 (Matlab)	6.2799E-07	1.8557E-07	4.0318E-08	1.9660
PVI7	RK45	2.0602E-01	7.4119E-02	2.1711E-02	0.4300
	RK23	1.7695E-01	5.9905E-02	1.8329E-02	1.0204
	DOP853	1.9907E-01	6.9433E-02	2.0151E-02	0.5701
	Radau	2.0878E-01	7.0861E-02	2.1485E-02	3.4909
	BDF	3.3226E-01	1.1725E-01	3.4280E-02	4.3011
	LSODA	2.6329E-01	9.2281E-02	2.7057E-02	0.6601
	ODE45 (Matlab)	2.0853E-01	7.0808E-02	2.1472E-02	1.0030

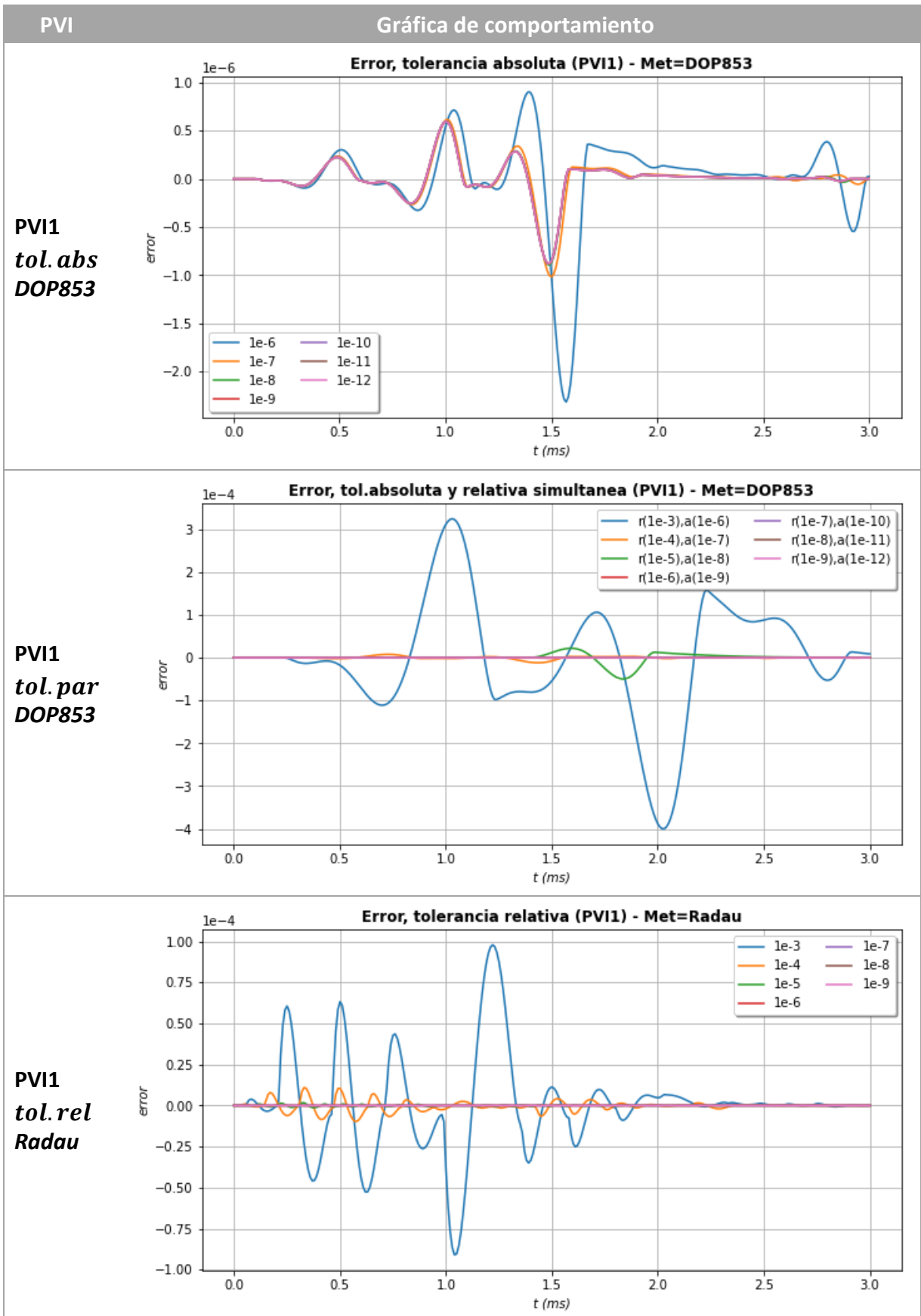
Fuente: Elaboración propia

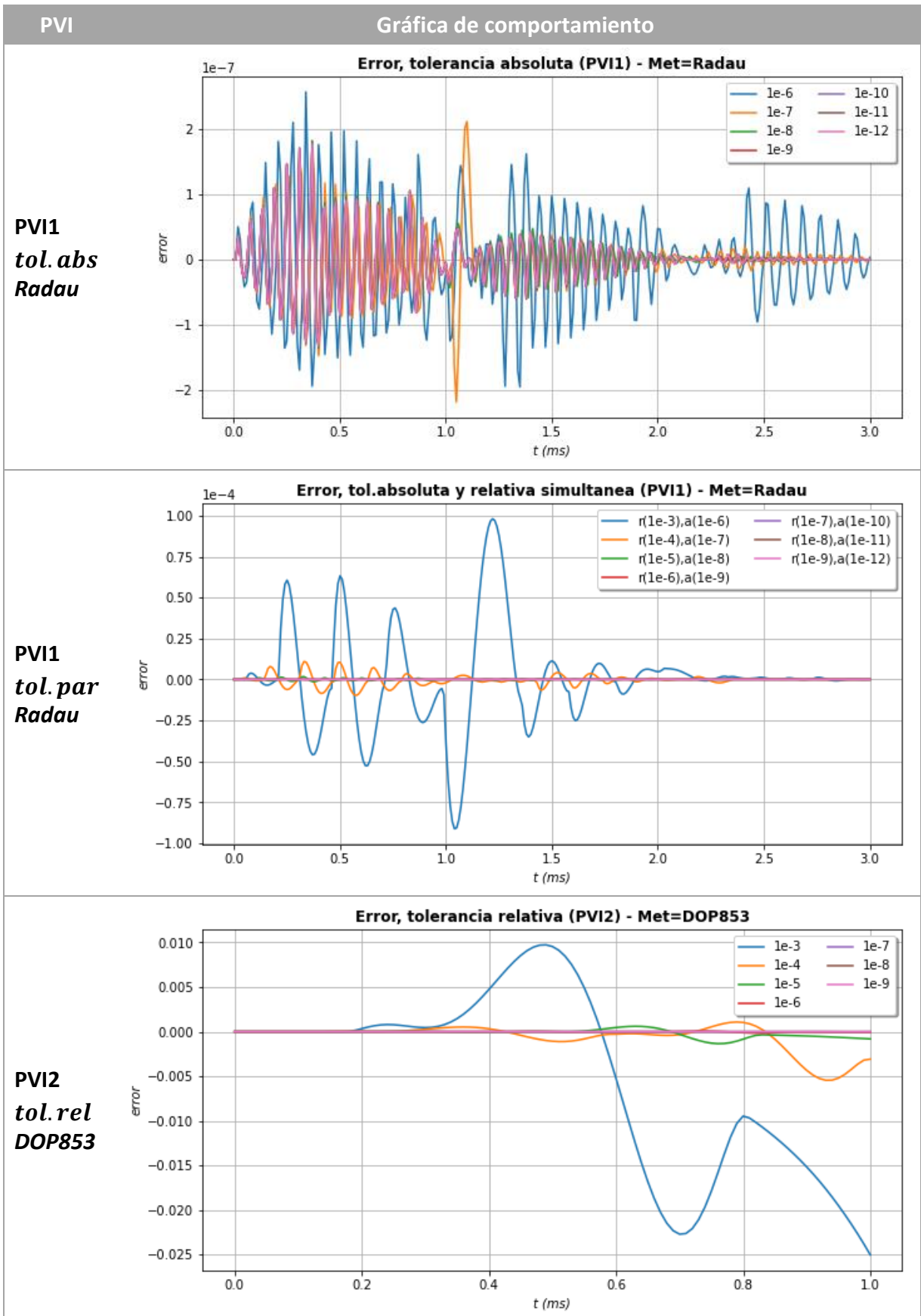
3. Evaluación del efecto de la tolerancia en cada PVI

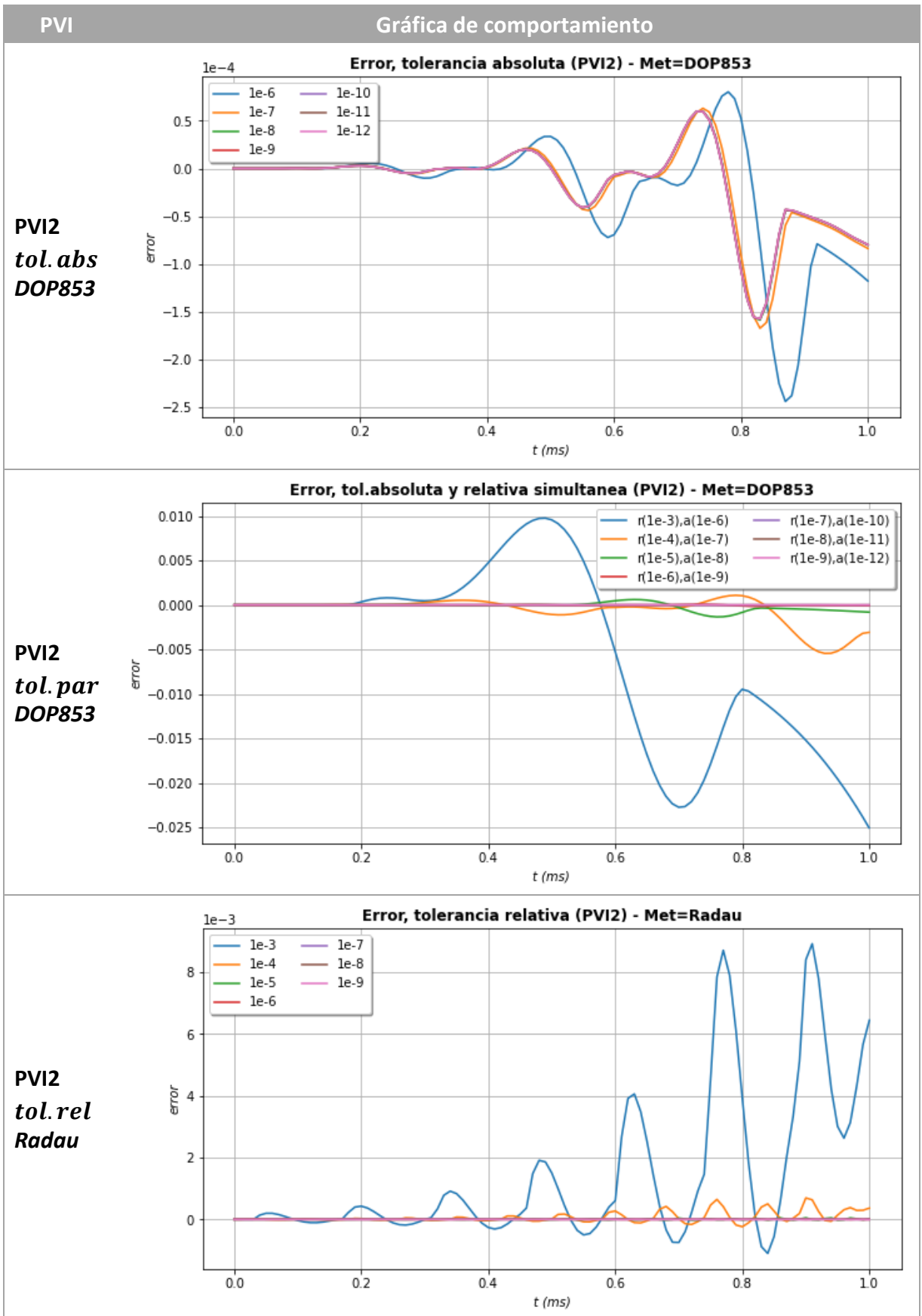
Siguiendo el procedimiento indicado en el numeral 4.4.5, se obtienen los resultados presentados en la Tabla 22. Se observa la incidencia en el error a lo largo del vector de la variable independiente (tiempo) para los métodos seleccionados en cada uno de los PVI seleccionados.

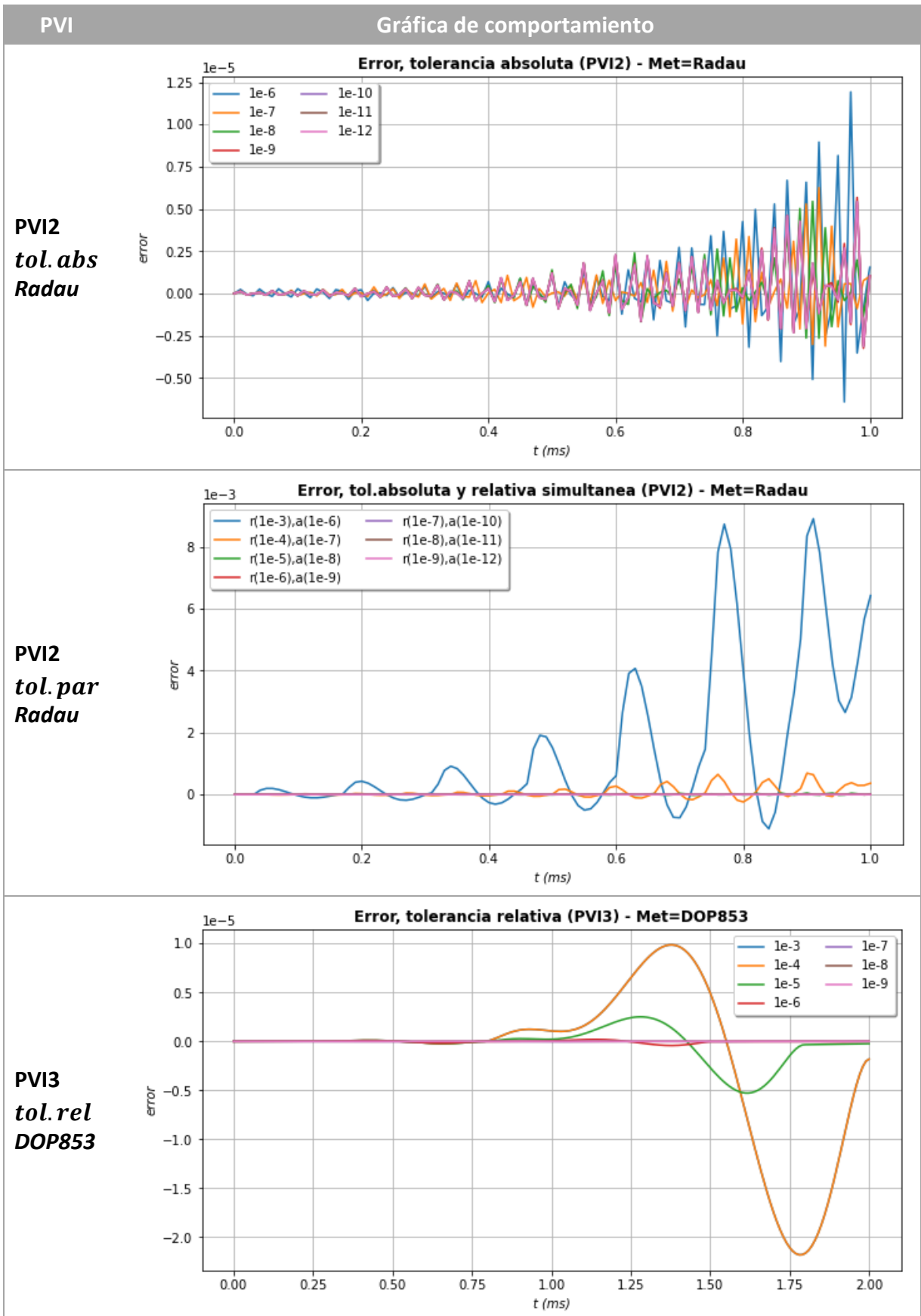
Tabla 22. Efecto de la disminución de tolerancia en el error para cada PVI

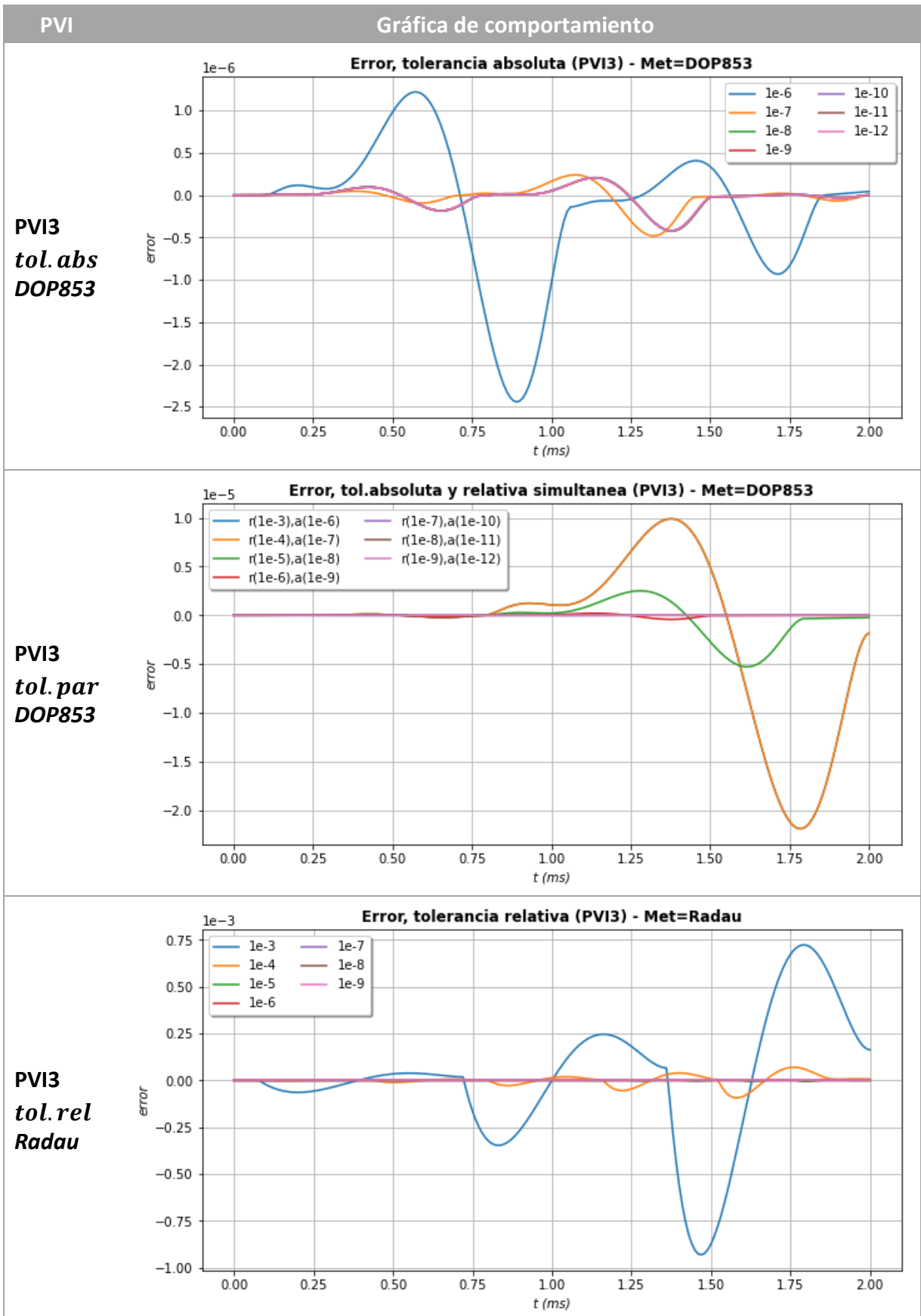


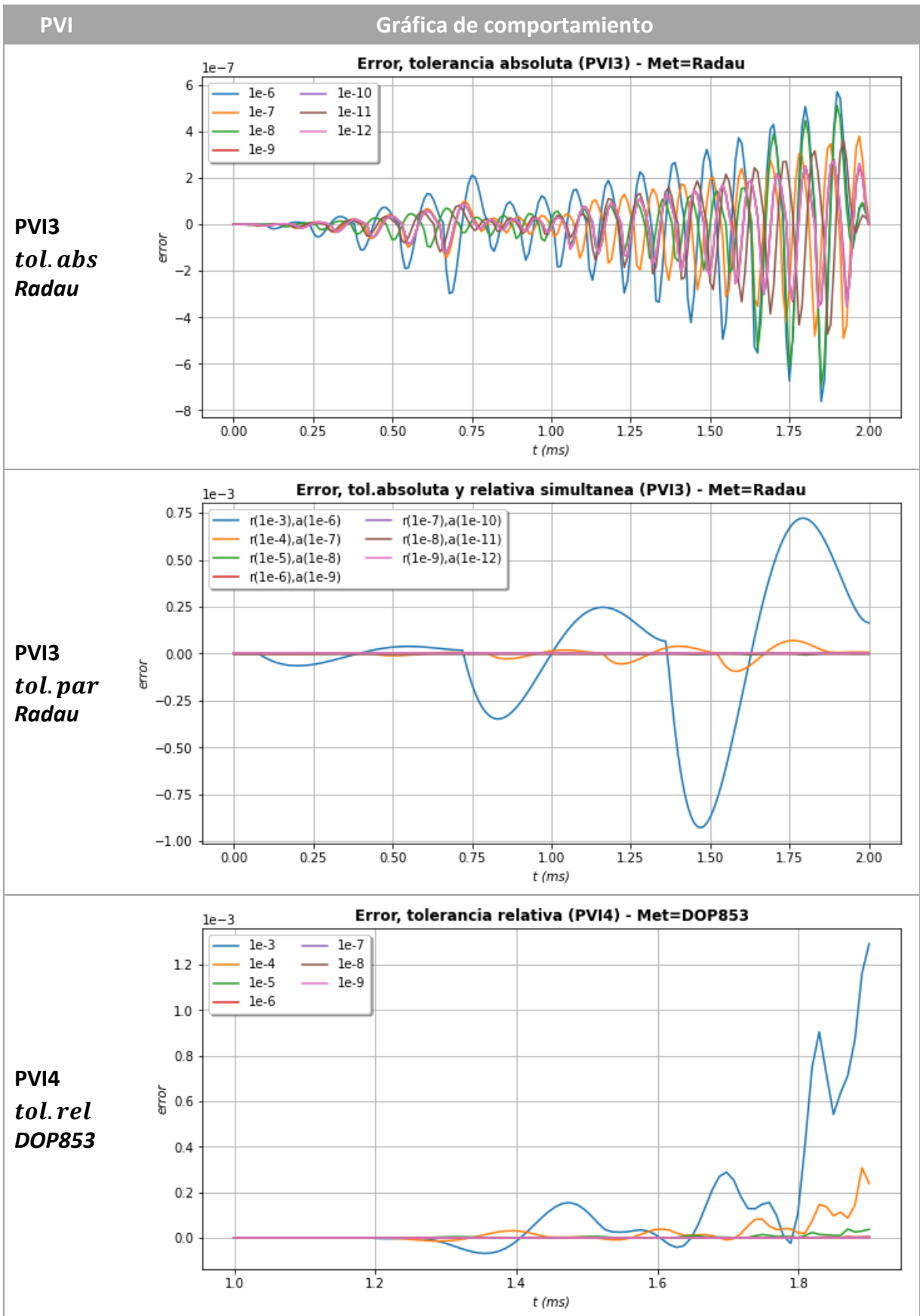


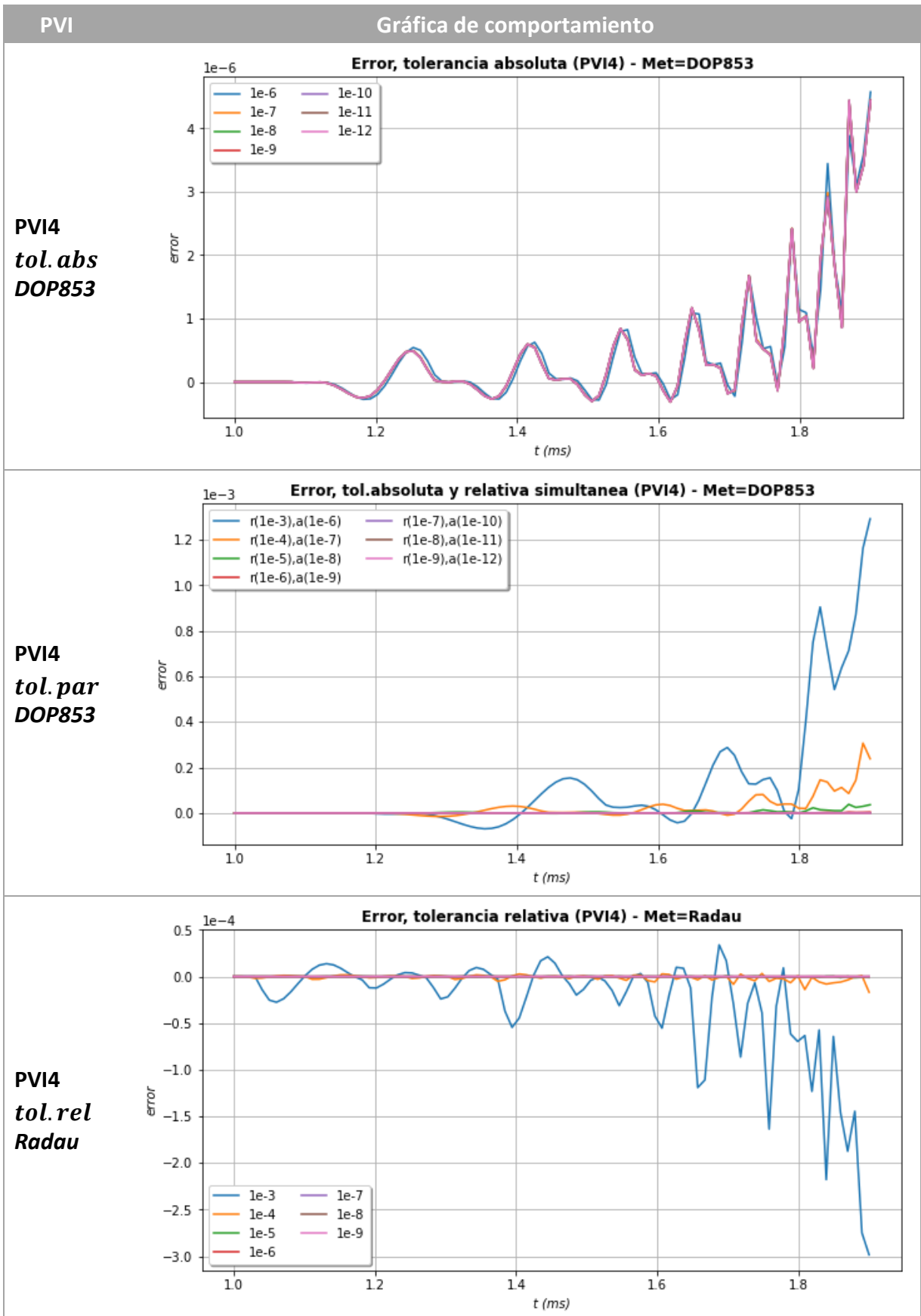


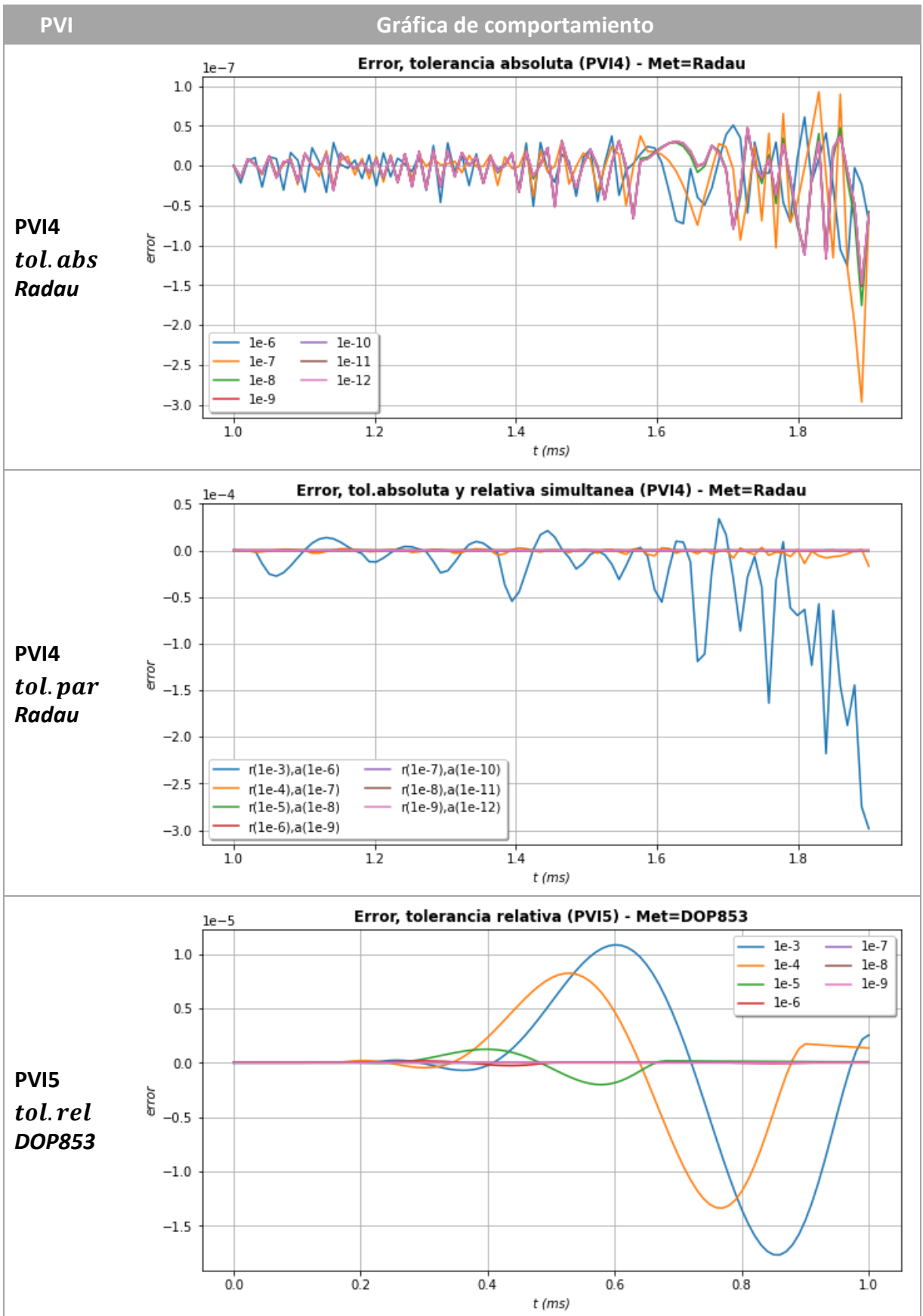


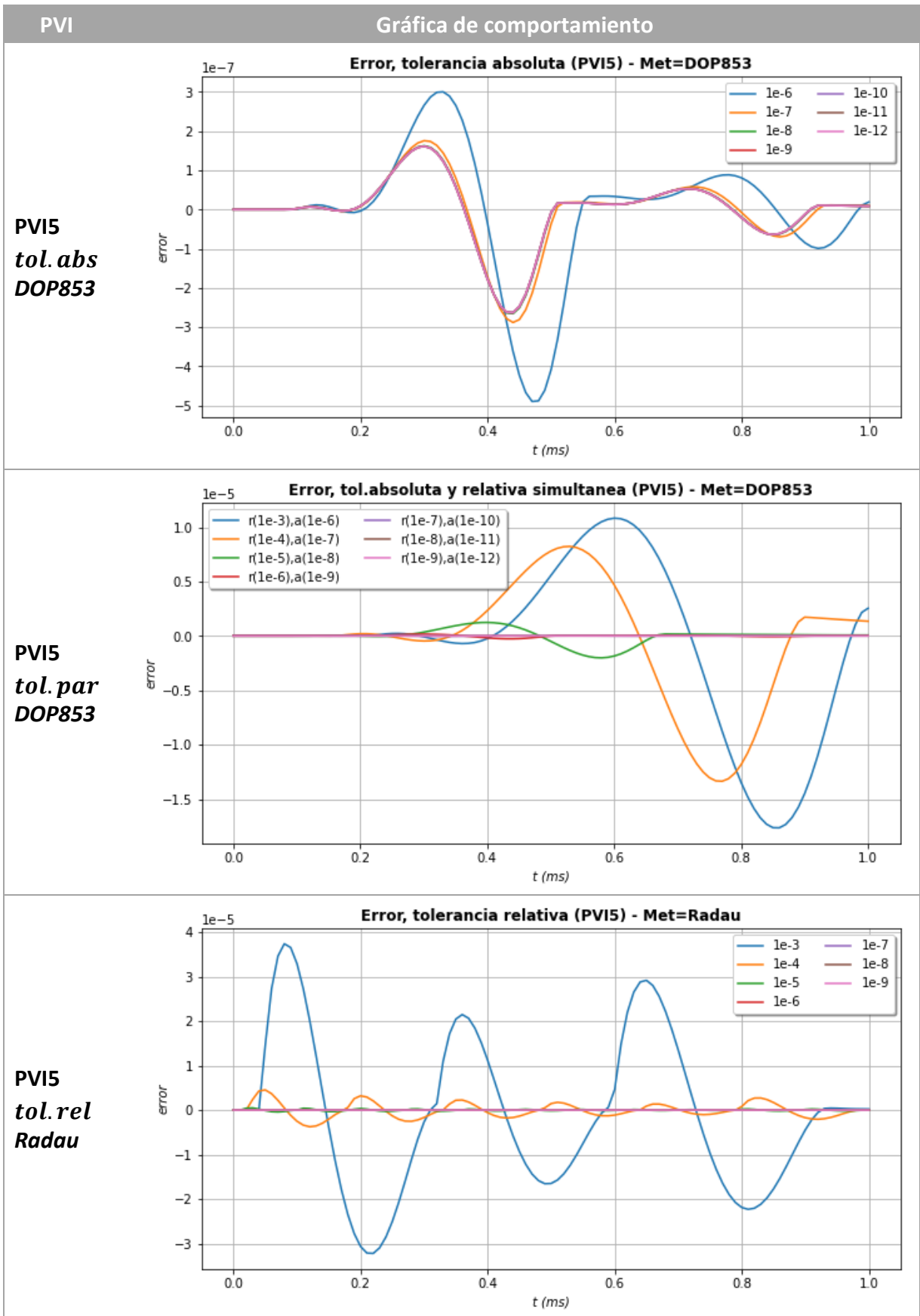


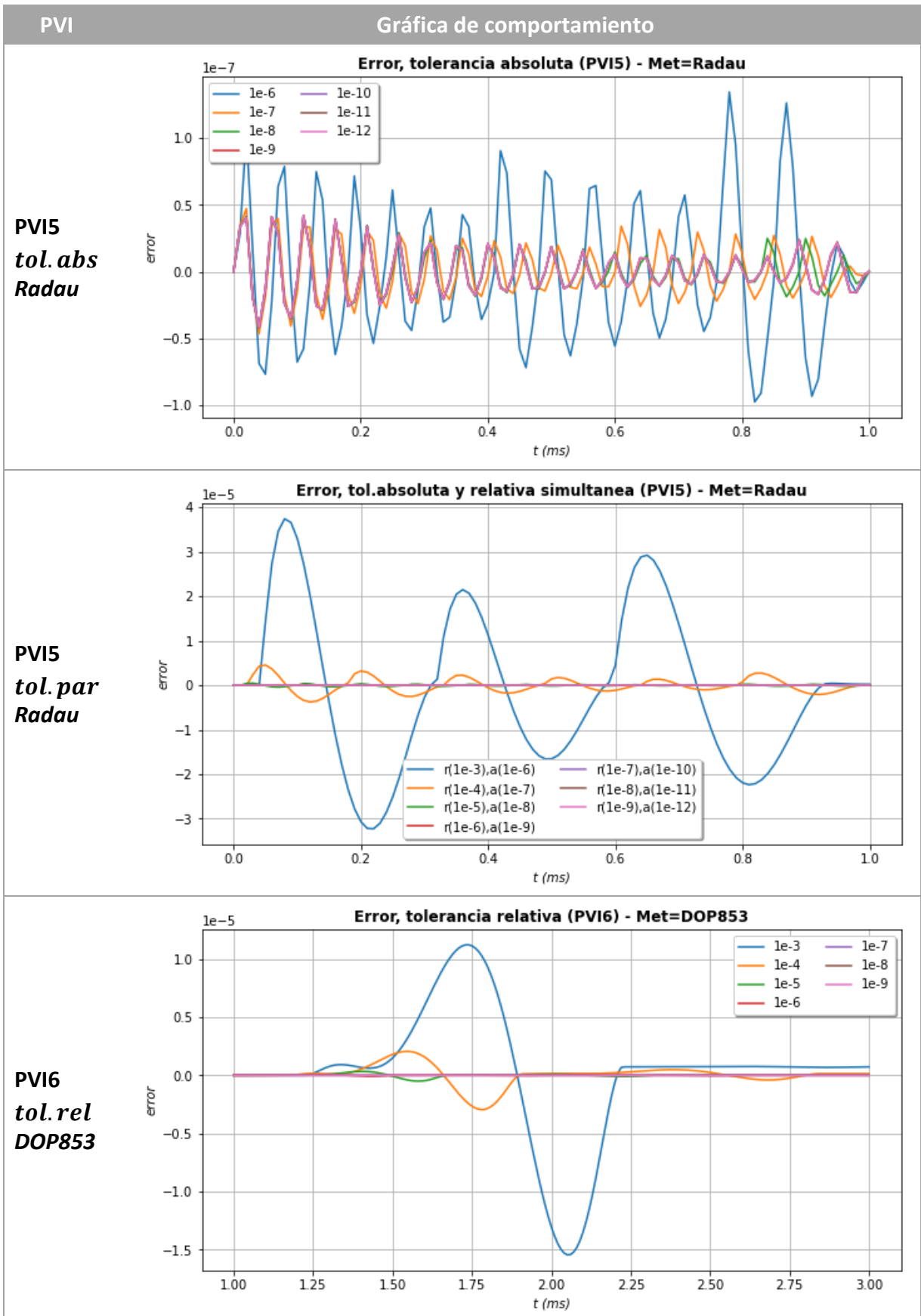


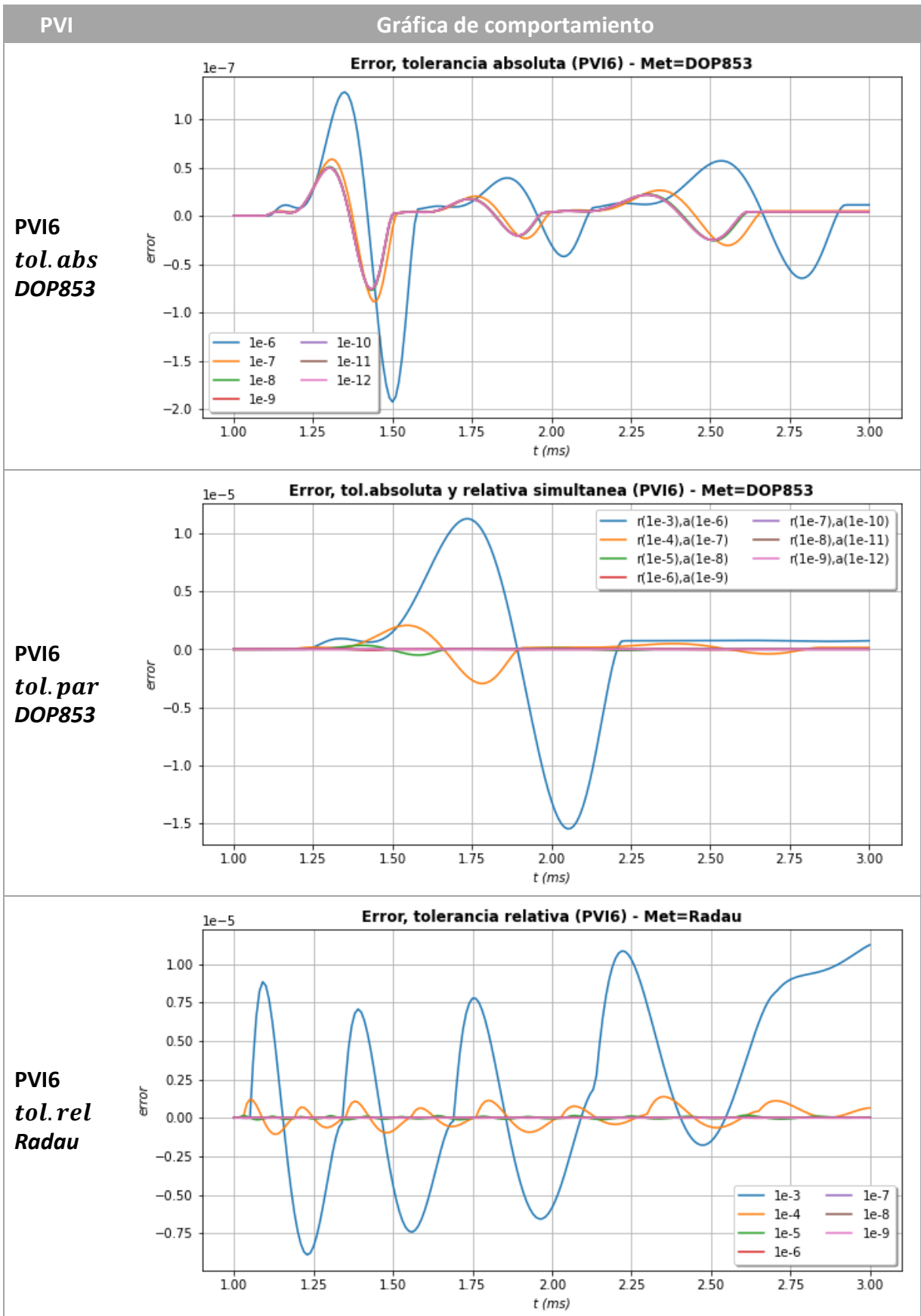


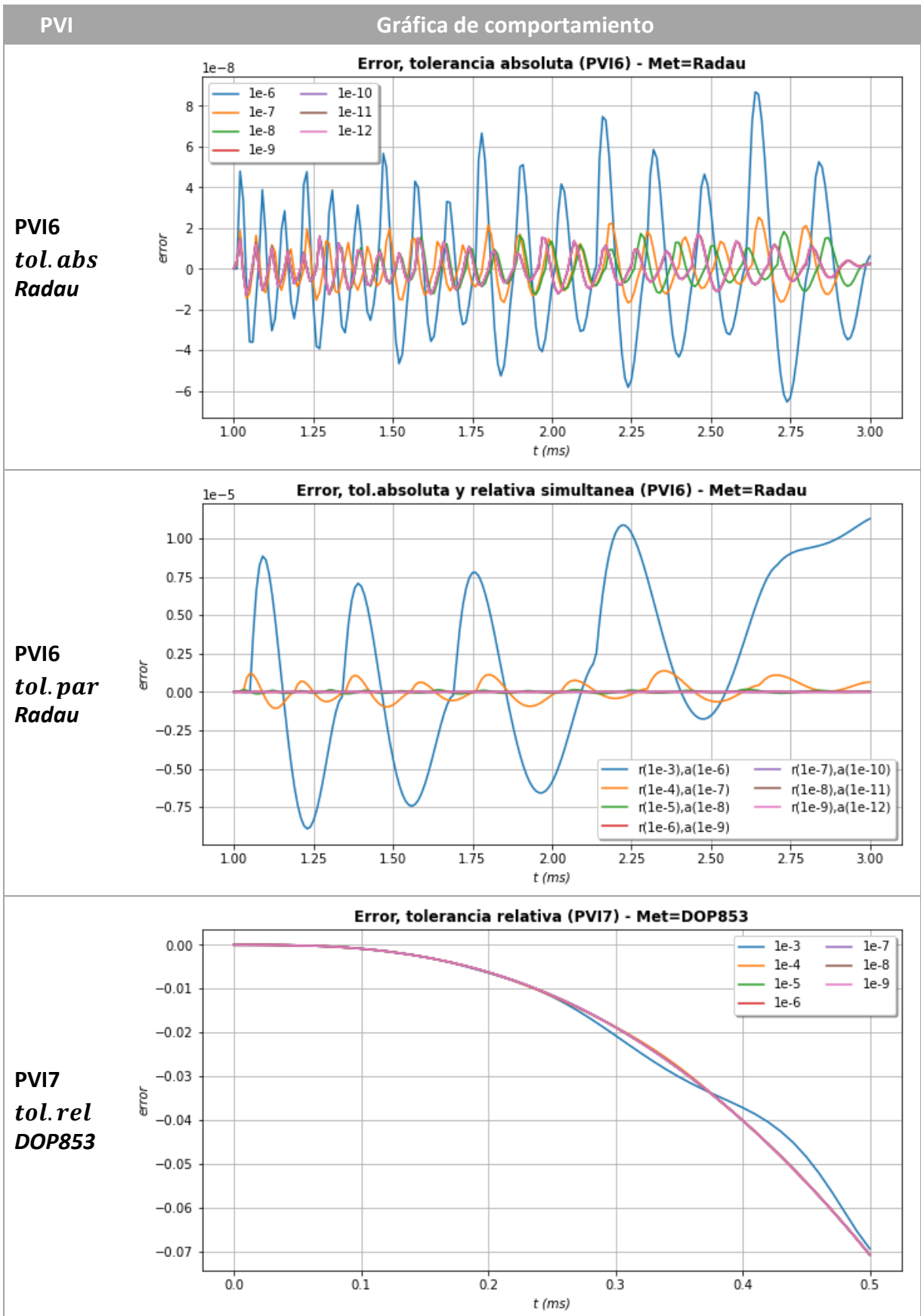


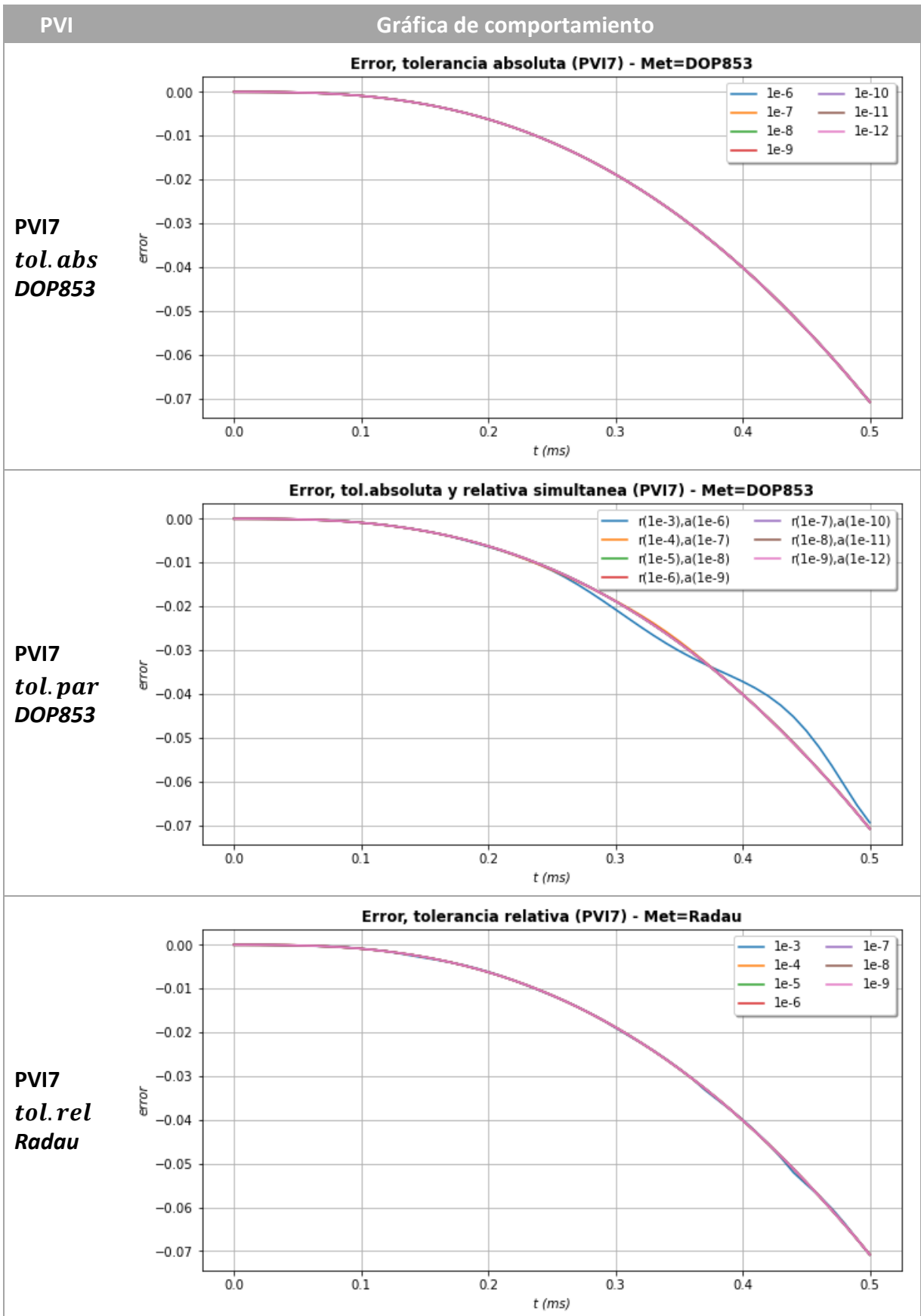


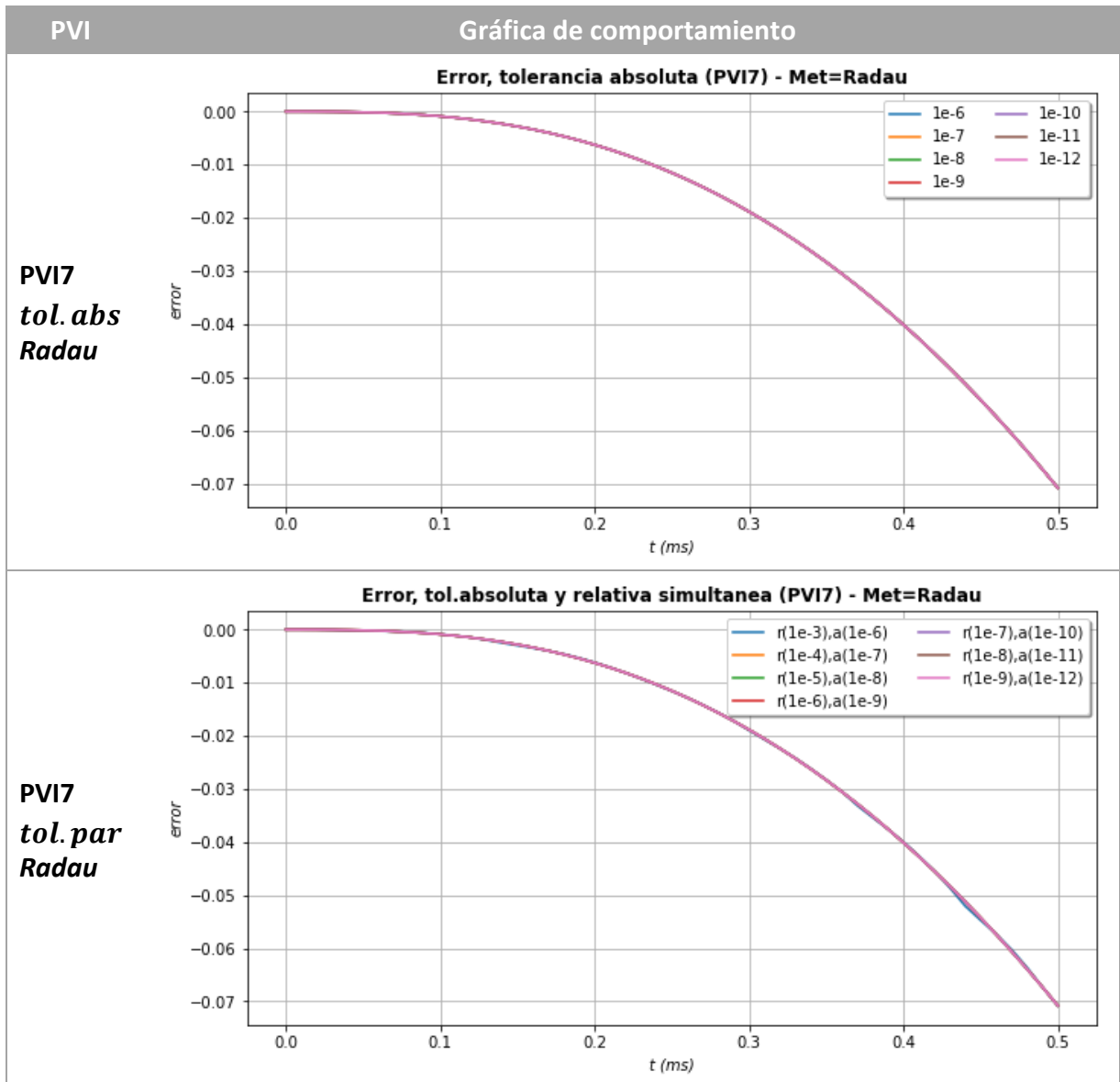












Fuente: Elaboración propia

Se observa en estas gráficas de comportamiento que, en general, el error presenta poca variación cuando $tol. rel < 10^{-6}$. Esto se confirma en las gráficas que se presentan en la Tabla 23 en la cual se presenta el error vs el tiempo de procesamiento (100 iteraciones), donde se concluye que para $tol. rel < 10^{-6}$ la disminución de error es mínima mientras el tiempo de procesamiento aumenta considerablemente.

Tabla 23. Comportamiento de la tolerancia (error vs t.procesamiento) para cada PVI

